Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.36

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ И СФЕРИЧЕСКОЕ ДВИЖЕНИЕ ГИРОСТАТА В ПСЕВДОЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Н. Н. Макеев

(Саратов)

Метод исследования вырождений динамических систем с помощью резонансных соотношений, известный в теории линейных колебаний, применяется для установления частных случаев сферического движения тяжелого гиростата в трехмерном псевдоевклидовом пространстве, при которых существует линейный инвариант уравнений движения.

Н. Е. Жуковским [1] рассмотрена задача о сферическом движении твердого тела с полостями, целиком заполненными однородной несжимаемой жидкостью. Пуанкаре [2] установил взаимосвязь между вопросом о нахождении дополнительных интегралов гамильтоновой системы и явлением вырождения, аналогичным вырождению резонансного характера при линейных колебаниях. В работах [3, 4] идея Пуанкаре применена для истолкования частных случаев сферического движения тяжелого твердого тела, при которых динамические уравнения Эйлера имеют линейный инвариант. В основе этой идеи лежит соображение о том, что малые колебания твердого тела в окрестности положения его устойчивого равновесия могут характеризоваться первыми членами разложения интегралов нелинейных динамических уравнений Эйлера. При этом начальные условия не должны быть связаны ограничениями, исключающими малые колебания твердого тела в окрестности этого положения. Как известно [2], резонанс при малых колебаниях системы связанных осцилляторов указывает на возможность существования дополнительных интегралов ее динамических уравнений. При некоторых ограничениях, налагаемых на геометрию масс тела и на начальные параметры, дополнительные интегралы линейной задачи о малых колебаниях могут являться одновременно интегралами нелинейных динамических уравнений Эйлера.

В данной работе упомянутый выше метод распространяется на случай сферического движения гиростата в однородном поле тяжести псевдоевклидова пространства ${}^1R_3$, метрический тензор которого $g_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j$ имеет компоненты $g_{11} = g_{22} = -1$, $g_{33} = 1$, $g_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Здесь $\mathbf{e}_i$ — орты некоторого орторепера данного пространства [1]. В дальнейшем под гиростатом в псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_3$ будем понимать гиростат, расположенный внутри изотропного конуса этого пространства, а под неподвижной точкой O — вершину данного конуса. Тогда радиус-векторы точек гиростата являются собственными векторами. В работах [6, 7] [2] при допущении о справедливости основных аксиом классической динамики в псевдоевклидовом пространстве введены понятия кинетического момента и моментов инерции твердого тела относительно неизотропных осей, а также аналоги углов Эйлера.

1. Предполагая, что аксиомы и принципы классической динамики справедливы в псевдоевклидовом пространстве ${}^1R_3$, получим аналоги динами-

---

[1] Обозначение ${}^lR_n$ введено *Б. А. Розенфельдом* [5].

[2] См. также *Косогляд Э. И.* К динамике твердого тела в псевдоевклидовом пространстве и на плоскости Лобачевского. Диссертация. Казанск. ун-т, 1970.

ческих уравнений Жуковского [1] для гиростата в осях главного орторепера S (O, x, y, z) этого пространства с базисом $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$. Здесь оси x, y — идеальные, z — собственная ось.

Пусть

$$\mathbf{G} = \mathbf{I}\cdot\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}, \quad \mathbf{g} = g\boldsymbol{\gamma}, \quad \mathbf{l} = M\ \mathbf{r}_c$$

где $\mathbf{G}$, $\boldsymbol{\lambda}$ — кинетический момент гиростата и гиростатический момент относительно точки O ($\boldsymbol{\lambda} = \mathrm{const}$ для S); $\mathbf{I}$ — тензор инерции преобразованного по Жуковскому тела, построенный для точки O, с главными компонентами A, B, C; $\boldsymbol{\omega}$ (p, q, r) — абсолютная мгновенная угловая скорость орторепера S; $\boldsymbol{\gamma}$ — направляющий орт однородного поля силы тяжести напряженности $\mathbf{g}$; M, $\mathbf{r}_c$ — масса и радиус-вектор центра тяжести гиростата.

Представим

$$\mathbf{G} = (Ap + \lambda_x)\mathbf{e}_x + (Bq + \lambda_y)\mathbf{e}_y - (Cr + \lambda_z)\,\mathbf{e}_z$$

и применим теорему об изменении кинетического момента гиростата относительно точки O. При этом примем определение векторного произведения векторов в пространстве ${}^1R_3$, данное в работе [7]. В результате получим

$$\begin{aligned} &Ap^{\bullet} + (C + B)qr + \lambda_z q + \lambda_y r = l_z\gamma_y - l_y\gamma_z \\ &Bq^{\bullet} - (A + C)rp - \lambda_x r - \lambda_z p = l_x\gamma_z - l_z\gamma_x \\ &Cr^{\bullet} - (B - A)pq - \lambda_y p + \lambda_x q = l_y\gamma_x - l_x\gamma_y \end{aligned} \tag{1.1}$$

Уравнения Пуассона имеют вид [7]

$$\gamma_x^{\bullet} = q\gamma_z - r\gamma_y, \quad \gamma_y^{\bullet} = r\gamma_x - p\gamma_z, \quad \gamma_z^{\bullet} = q\gamma_x - p\gamma_y \tag{1.2}$$

причем $\boldsymbol{\gamma}^2 = -\gamma_x^2 - \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = \varkappa$, где $\varkappa = 1, -1, 0$ для случаев, когда вектор силы тяжести является соответственно собственным, идеальным и изотропным. Примем условия

$$y_c = \lambda_y = 0 \tag{1.3}$$

Положение устойчивого равновесия преобразованного тела при условиях (1.3) в данном поле характеризуется соотношениями

$$\begin{aligned} &\gamma_y^{\circ} = 0, \quad l_x\gamma_z^{\circ} - l_z\gamma_x^{\circ} = 0, \quad l_z\gamma_z^{\circ} - l_x\gamma_x^{\circ} = l \\ &r_c^2 = z_c^2 - x_c^2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Здесь и далее параметры гиростата, соответствующие данному положению, обозначаются нулевым индексом сверху.

Пусть p, q, r — величины первого порядка малости, а орт $\boldsymbol{\gamma}$ мало отличается от $\boldsymbol{\gamma}^{\circ}$. Тогда линеаризованная система (1.1) при условиях (1.3), (1.4) примет вид

$$\begin{aligned} &p^{\bullet\bullet} + a_{11}p + a_{13}r = 0, \qquad q^{\bullet\bullet} + a_{22}q = 0 \\ &r^{\bullet\bullet} + a_{31}p + a_{33}r = 0 \\ &a_{11} = A^{-1}(B^{-1}\lambda_z^2 + l_z\gamma_z^{\circ}), \quad a_{13} = A^{-1}(B^{-1}\lambda_x\lambda_z - l_z\gamma_x^{\circ}) \\ &a_{22} = B^{-1}(C^{-1}\lambda_x^2 + A^{-1}\lambda_z^2 + l) \\ &a_{31} = C^{-1}(B^{-1}\lambda_x\lambda_z - l_x\gamma_z^{\circ}), \quad a_{33} = C^{-1}(B^{-1}\lambda_x^2 + l_x\gamma_x^{\circ}) \\ &(a_{11}^2 + a_{31}^2 \neq 0) \end{aligned} \tag{1.5}$$

Систему (1.5) можно рассматривать как уравнения первого (линейного) приближения в окрестности начального положения.

Предположим, что векторы λ, γ° в пространстве ${}^1R_3$ коллинеарны. Тогда $a_{13}a_{31} = a_{11}a_{33}$, что эквивалентно условию

(1.6) $$\lambda_x\gamma_z{}^\circ + \lambda_z\gamma_x{}^\circ = 0$$

Линейное преобразование

(1.7) $$P = -a_{31}p + a_{11}r, \quad Q = q, \quad R = a_{11}p + a_{13}r$$

в соответствии с условием (1.6) преобразует систему (1.5) в следующую:

(1.8) $$P^{\cdot\cdot} = 0, \quad Q^{\cdot\cdot} + \omega_2{}^2Q = 0, \quad R^{\cdot\cdot} + \omega_3{}^2R = 0$$
$$\omega_2{}^2 = a_{22}, \quad \omega_3{}^2 = a_{11} + a_{33}$$

Уравнения (1.8) имеют форму уравнений продольных колебаний линейно связанных осцилляторов с главными частотами $\omega_1=0$, ω_2, ω_3 [8,9]. Отметим, что вырождение аналогичного характера возникает и в задаче о малых крутильных колебаниях вала с жестко насаженными на него дисками [10] (см. также [11]).

Обратимся к фазовому представлению движения. Заметим, что линейное преобразование (1.7) не изменяет топологическую структуру фазовой плоскости. Согласно уравнениям (1.8) изображающая точка в фазовой плоскости ξ, η пространства ${}^1R_3$ движется по эллиптической окружности

$$\xi^2 + \eta^2 = \sigma^2$$
$$\xi = \begin{Vmatrix}\omega_2 Q \\ \omega_3 R\end{Vmatrix}, \quad \eta = \begin{Vmatrix}Q^\cdot \\ R^\cdot\end{Vmatrix}, \quad \sigma^2 = \xi_0{}^2 + \eta_0{}^2$$

Здесь и всюду в дальнейшем нижний нулевой индекс соответствует значению параметров при $t = 0$.

Рассмотрим интеграл $P^\cdot = 0$, вытекающий из первого уравнения системы (1.8). Здесь постоянная интегрирования равна нулю в соответствии с линеаризованной системой (1.1) и условиями (1.3), (1.4), (1.6). Действительно, из условий (1.4), (1.6) непосредственно следует

(1.9) $$\lambda_x l_z + \lambda_z l_x = 0$$

Это условие выражает коллинеарность векторов λ, $\mathbf{l}$ в пространстве ${}^1R_3$. Таким образом, если векторы λ, γ° коллинеарны, то при условиях (1.3), (1.4) векторы λ, $\mathbf{l}$ также коллинеарны. Условие (1.9) служит одним из соотношений, характеризующих гиростатический аналог случая Гесса — Аппельрота в пространстве ${}^1R_3$.

Из интеграла $P^\cdot = 0$ для уравнений (1.5) следует инвариант

(1.10) $$-a_{31}p + a_{11}r = m$$

где m — постоянная интегрирования. Это соответствует утверждению, что линейный инвариант системы (1.5) существует в случае, когда ее характеристическое уравнение

$$\nu^3 - (\omega_2 + \omega_3)\nu^2 + \omega_2\omega_3\nu = 0$$

имеет корень $\omega_1 = 0$ [12].

Получим условие, при котором в совокупности с принятыми допущениями линейный инвариант (1.10) линеаризованной системы (1.5) является также инвариантом нелинейной системы (1.1). Из условия $P^{\boldsymbol{\cdot}} = 0$ с учетом (1.9) для уравнений (1.1) находим

$$[A(B-A)a_{11}p + C(C+B)a_{31}r]q = 0 \tag{1.11}$$

Соотношение (1.11) представляет собой частный случай (при условиях (1.3)) уравнения конуса Штауде в пространстве $^1R_3$; образующие этого конуса — оси перманентных вращений тяжелого гиростата.

Пусть $q(t) \neq 0$. Тогда инвариант (1.10) при условии (1.11) можно представить так:

$$[A(B-A)a_{11}^2 + C(C+B)a_{31}^2]p = \text{const}$$

или, исключая случай $p(t) = \text{const}$, получим

$$C(B-A)(\lambda_z^2 + Bl_z\gamma_z^\circ)^2 + A(C+B)(\lambda_x\lambda_z - Bl_x\gamma_z^\circ)^2 = 0$$

откуда согласно равенству (1.9) следует

$$C(B-A)z_c^2 + A(C+B)x_c^2 = 0 \tag{1.12}$$

Это условие в совокупности с ограничением $y_c = 0$ (1.3) соответствует аналогу случая Гесса — Аппельрота для твердого тела в пространстве $^1R_3$ [13]. Отметим, что при условиях (1.12), (1.9) имеем $m = 0$. Поэтому инвариант (1.10) принимает известную форму [13]

$$Ax_cp + Cz_cr = 0 \tag{1.13}$$

Если $x_cz_c \neq 0$, то из формулы (1.12) в силу условия (1.9) получаем

$$C(B-A)\lambda_z^2 + A(C+B)\lambda_x^2 = 0 \tag{1.14}$$

Соотношения (1.12), (1.14) показывают, что векторы $\mathbf{r}_c$, $\boldsymbol{\lambda}$ ортогональны круговому сечению эллипсоида инерции преобразованного тела в точке O. Здесь $A > B$, причем если $A = B$ или если $z_c = \lambda_z = 0$, то $x_c = \lambda_x = 0$; если $x_c = \lambda_x = 0$, то либо $A = B$, либо $z_c = \lambda_z = 0$.

2. Рассмотрим случай, когда в системе линейно связанных осцилляторов, характеризуемой уравнениями (1.8), возникает резонанс

$$\omega_3 = \omega_2 \tag{2.1}$$

Отсюда непосредственно следуют соотношения (1.12), (1.14), причем резонанс, определяемый условием (2.1), характеризуется соотношением, не зависящим от компонент λ_x, λ_z. Это отражено в равенствах (1.12), (1.13).

Замечание. Данное утверждение можно получить непосредственно из уравнений (1.1), не затрагивая соответствующую линейную систему. Пусть

$$-a_1p + a_2r = 0 \quad (a_1^2 + a_2^2 \neq 0) \tag{2.2}$$

есть инвариант системы (1.1) при условиях (1.3), где a_1, a_2 — некоторые постоянные коэффициенты. Тогда, если выполняется условие

$$Aa_2l_x + Ca_1l_z = 0 \tag{2.3}$$

то, исключая значение $p = \text{const}$ (или $r = \text{const}$), согласно уравнениям (1.1) при $q \neq 0$ получаем условия

$$A(B-A)a_2^2 + C(C+B)a_1^2 = 0 \tag{2.4}$$

$$Aa_2\lambda_x - Ca_1\lambda_z = 0 \tag{2.5}$$

Таким образом, условие (2.4) существования линейного инварианта (2.2) системы (1.1), полученное при ограничениях (1.3), (2.3), не зависит от компонент λ_x, λ_z. Если теперь потребовать, чтобы соотношение (2.2) было одновременно инвариантом и для системы (1.5), то как следствие получим $a_1 = a_{31}$, $a_2 = a_{11}$, а условия (2.4), (2.5) совпадут с формулами (1.12), (1.9).

3. Пусть существует интеграл

$$r(t) = r_0 \tag{3.1}$$

Для системы (1.5) этот интеграл существует при $a_{31} = a_{33} = 0$, что соответствует условиям

$$\lambda_x = (-Bl_x\gamma_x^\circ)^{1/2} \qquad \lambda_z = -(-Bl_z\gamma_z^\circ)^{1/2} \tag{3.2}$$

Из соотношений (3.2) следует, что если λ_x, λ_z отличны от нуля, то согласно (1.4), $x_c < 0$, а $z_c > 0$ при $\gamma_z^\circ < 0$ и $z_c < 0$ при $\gamma_z^\circ > 0$. Кроме того, условия существования интеграла (3.1) для системы (1.5) тождественно удовлетворяются при $\lambda_x = x_c = 0$. Эти соотношения в совокупности с (1.3) составляют неполную систему условий симметризации типа Лагранжа.

Если величины $\Delta_1 = a_{11}\omega_3^2$, $\Delta_2 = a_{13}\omega_3^2$ отличны от нуля, то существует единственное преобразование

$$p = (-a_{13}P + a_{11}R)\Delta_1^{-1}, \quad r = (a_{13}P + a_{33}R)\Delta_2^{-1} \tag{3.3}$$

обратное преобразованию (1.7). Если же $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, то либо $a_{11} = a_{13} = 0$, либо $\omega_3 = 0$ и a_{11}, a_{13} отличны от нуля. В первом случае компоненты λ_x, λ_z подчинены условиям (3.2), а во втором — условию

$$A(\lambda_x^2 + Bl_x\gamma_x^\circ) + C(\lambda_z^2 + Bl_z\gamma_z^\circ) = 0 \tag{3.4}$$

Из соотношения (3.4) при условиях (1.4), (1.9) находим

$$Ax_c^2 + Cz_c^2 = 0$$

откуда $x_c = z_c = 0$. Это означает, что центр тяжести гиростата находится на изотропном конусе. Поскольку здесь рассматривается движение гиростата только внутри изотропного конуса, заключаем, что второй случай в силу принятых допущений невозможен. Следовательно, не существует и линейного инварианта системы (1.5) вида

$$a_{11}p + a_{13}r = \text{const}$$

соответствующего значению $\omega_3 = 0$.

Итак, если Δ_1, Δ_2 отличны от нуля, то соотношения (1.7), (3.3) определяют гомеоморфизм в окрестности положения равновесия преобразованного тела.

Пусть $x_c = \lambda_x = 0$. Тогда, если принять, что при $q \neq 0$ либо $p(t) = 0$, либо $A = B$, то интеграл (3.1) системы (1.5) является одновременно интегралом и для системы (1.1). Последний из этих случаев в совокупности с условиями (1.3) характеризует гиростатический аналог типа Лагранжа в пространстве ${}^1R_3$. Структурные условия для этого случая могут быть получены из резонансного соотношения (2.1).

Пусть теперь $x_c = q(t) = 0$; тогда система (1.1) имеет интеграл (3.1), причем

$$\begin{aligned} &p^{\cdot} = k\gamma_y, \qquad p = f^{-1}(l_z\gamma_x - \lambda_x r_0) \\ &k = A^{-1}l_z, \qquad f = \lambda_z + (A + C)r_0 \neq 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Дифференцируя по t последнее равенство с учетом первого уравнения (1.2) и сравнивая результат с формулой (3.5) для $p^{\boldsymbol{\cdot}}$, получаем

$$\lambda_z + (2A + C)r_0 = 0 \tag{3.6}$$

При этом опущены случаи вырождения, когда $z_c = 0$ или $\gamma_y = 0$. Отметим, что структурное условие $2A = C$, характеризующее в совокупности с предыдущими условиями случай Бобылева — Стеклова (в форме Бобылева) для евклидова пространства [14], в условии (3.6) не содержится. Однако можно найти гиростатический аналог данного случая в пространстве ${}^1R_3$.

В рассматриваемом случае система (1.1), кроме интеграла (3.1), имеет интегралы энергии и площадей

$$Ap^2 + Cr_0^2 + 2l_z\gamma_z = h$$

$$(Ap + \lambda_x)\gamma_x + (Cr_0 + \lambda_z)\gamma_z = H$$

где h, H — постоянные интегрирования. Подставляя в интеграл площадей выражения для γ_x, γ_z, взятые из уравнения (3.5) и интеграла энергии, получаем соотношение, которое обращается в тождество при выполнении двух независимых условий. Одно из этих условий выражено соотношением (3.6), а другое имеет вид

$$\lambda_x^2 r_0 = Hl_z + Ar_0\,(h - Cr_0^2) \tag{3.7}$$

Подставляя в тривиальный интеграл $\gamma^2 = \varkappa$ выражения для γ_x, γ_z, с учетом условия (3.6) получим

$$\gamma_y^2 = (2l_z)^{-2}[(h - Cr_0^2 - Ap^2)^2 - 4\,(Ap - \lambda_x)^2 r_0^2 - 4\varkappa l_z^2] \tag{3.8}$$

Из уравнений (3.5) и интеграла энергии получаем

$$\gamma_x = (Ak)^{-1} r_0\,(\lambda_x - Ap), \qquad \gamma_z = a - (2k)^{-1}p^2 \tag{3.9}$$

$$kt = \int\limits_{p_0}^{p} \gamma_y^{-1}(s)\,ds, \qquad a = (2l_z)^{-1}\cdot(h - Cr_0^2)$$

причем λ_x определяется условием (3.7). Здесь s — переменная интегрирования.

Аналогично тому, как это было сделано в работе [7], на основе проективной модели Бельтрами — Клейна результат (3.8), (3.9) можно интерпретировать на плоскости Лобачевского. Такая интерпретация возможна в случае, когда все точки приведенного тела расположены на одной из полостей сферы вещественного радиуса пространства ${}^1R_3$.

Поступила 5 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Н. Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью. Собр. соч., т. 2. М. — Л., Гостехиздат, 1949.
2. *Пуанкаре А.* Новые методы небесной механики. Избр. тр., т. 1. М., «Наука», 1971.
3. *Цельман Ф. Х.* Резонансы и некоторые случаи интегрируемости движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Докл. АН СССР, 1972, т. 207, № 3.

4. *Цельман Ф. Х.* Малые колебания тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки и некоторые случаи существования «линейных интегралов». ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
5. *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы геометрии. М., Гостехиздат, 1955.
6. *Крюков М. С.* Движение твердого тела по инерции в плоскости Лобачевского. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1963, т. 123.
7. *Косогляд Э. И.* Движение твердого тела под действием сил на плоскости Лобачевского. Изв. вузов. Сер. матем., 1970, № 9.
8. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
9. *Лич Дж. У.* Классическая механика. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
10. *Голдстейн Г.* Классическая механика. М., Гостехиздат, 1957.
11. *Парс Л.* Аналитическая динамика. М., «Наука», 1971.
12. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., «Наука», 1965.
13. *Косогляд Э. И.* О некоторых условиях существования однозначных решений уравнений движения твердого тела в псевдоевклидовом пространстве $^1R_3$. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1970, т. 129.
14. *Харламов П. В.* Один случай интегрируемости уравнений движения тяжелого твердого тела, имеющего полости, заполненные жидкостью. Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 4.