Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

В. С. Сергеев

(Москва)

Рассматриваются перманентные вращения вокруг главной оси инерции тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Исследуется их устойчивость на основании теоремы [1, 2] об устойчивости гамильтоновых систем с двумя степенями свободы в общем эллиптическом случае. Показывается, что при отсутствии некоторых резонансных соотношений в области необходимых условий устойчивости, в первом приближении, не совпадающей с областью известных достаточных условий, будет иметь место устойчивость за исключением, быть может, случая, когда параметры задачи лежат на определенных многообразиях в пространстве параметров. В каждой из областей необходимых условий устойчивости указывается подобласть, где эти исключительные многообразия отсутствуют.

Необходимые условия устойчивости для перманентных вращений вокруг главных осей инерции твердого тела исследованы Граммелем [3]. Н. Г. Четаев получил [4] в случае интегрируемости Лагранжа, а В. В. Румянцев [5] — в случае С. В. Ковалевской, достаточные условия, совпадающие с необходимыми. Случай перманентных вращений вокруг главной оси инерции для тела с произвольным распределением масс был рассмотрен в работах [6–8], где установлены достаточные условия устойчивости методом Четаева и на основании теоремы Рауса. Вопросы бифуркации перманентных вращений и смены устойчивости были исследованы в [9].

1. Введем неподвижную прямоугольную систему координат $Oxyz$, ось Oz которой совпадает с направлением действия силы тяжести тела mg, а также систему координат $OXYZ$, оси которой совпадают с главными осями инерции тела для неподвижной точки O. Положение подвижной системы координат $OXYZ$ по отношению к неподвижной $Oxyz$ зададим тремя углами ψ, α, β, получающимися в результате трех последовательных поворотов. При этом ψ — угол поворота вокруг оси Oz, α — вокруг нового направления оси Ox и β — вокруг направления оси Oy, занятого осью после второго поворота.

Движение твердого тела будем характеризовать переменными ψ, α, β и сопряженными им каноническими импульсами P_ψ, P_α, P_β.

Функция Гамильтона H, выраженная через канонические переменные, имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad H &= \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{A\cos^2\alpha}(P_\alpha\cos\alpha\cos\beta + P_\beta\sin\alpha\sin\beta - P_\psi\sin\beta)^2 + \\
&+ \frac{1}{B}P_\beta^2 + \frac{1}{C\cos^2\alpha}(P_\alpha\cos\alpha\sin\beta - P_\beta\sin\alpha\cos\beta + P_\psi\cos\beta)^2\Big] - \\
&- mg(-x_0\cos\alpha\sin\beta + y_0\sin\alpha + z_0\cos\alpha\cos\beta) \\
P_\psi &= -Ap\cos\alpha\sin\beta + Bq\sin\alpha + Cr\cos\alpha\cos\beta \\
P_\alpha &= Ap\cos\beta + Cr\sin\beta, \quad P_\beta = Bq
\end{aligned}
$$

Здесь x_0, y_0, z_0 — координаты центра тяжести тела в системе координат $OXYZ$, p, q, r — проекции вектора мгновенной угловой скорости тела, выражаемые обычным образом через ψ, α, β и их производные по времени, A, B, C — главные моменты инерции тела для неподвижной точки.

В дальнейшем будем рассматривать уравнения Гамильтона для переменных α, β, P_α, P_β с функцией H (1.1), в которой импульс, отвечающий циклической координате, $P_\psi = l = \mathrm{const}$.

2. Исследуем устойчивость перманентного вращения вокруг главной оси инерции OZ $(x_0 = y_0 = 0)$.

Невозмущенное движение характеризуется следующими значениями переменных:

$$\alpha_0 = \beta_0 = \alpha_0^\cdot = \beta_0^\cdot = 0, \qquad \psi_0^\cdot = \mathrm{const}$$

$$p_0 = q_0 = 0, \quad r_0 = \psi_0^\cdot, \quad P_{\alpha 0} = P_{\beta 0} = 0, \quad P_{\psi 0} = Cr_0 = l$$

В возмущенном движении будем считать α, β, P_α, P_β малыми величинами, а l — фиксированным числом, тогда функцию Гамильтона H (1.1) представим, опуская аддитивную постоянную, в виде ряда, составленного из однородных форм четных степеней от переменных α, β, P_α, P_β

$$H = \sum_{m=1}^{\infty} H_{2m} \tag{2.1}$$

где первые два члена имеют вид

$$H_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{A}\left(P_\alpha + \frac{l(A-C)}{C}\beta\right)^2 + \frac{1}{B}\left(P_\beta - \frac{lB}{C}\alpha\right)^2 + a_1\alpha^2 + a_2\beta^2\right] \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} H_4 = \frac{1}{2}\Big[\frac{A-C}{AC}\Big(&P_\alpha^2\beta^2 - l^2\alpha^2\beta^2 + \frac{1}{3}l^2\beta^4 - 2P_\alpha P_\beta\alpha\beta + lP_\alpha\beta\alpha^2 - \\ &- \frac{4}{3}lP_\alpha\beta^3 + 2lP_\beta\alpha\beta^2\Big) + \frac{1}{C}\left(P_\beta^2\alpha^2 + \frac{2}{3}l^2\alpha^4 - \frac{5}{3}lP_\beta\alpha^3\right)\Big] - \\ &- \frac{a}{24}(\alpha^4 + 6\alpha^2\beta^2 + \beta^4) \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$a_1 = \frac{l^2(C-B)}{C^2} + a, \quad a_2 = \frac{l^2(C-A)}{C^2} + a, \quad a = mgz_0$$

Если функция H_2 положительно определена, то имеет место устойчивость; поэтому представляет интерес случай, когда H_2 представляет собой функцию знакопеременную.

При исследовании устойчивости по отношению к α, β, P_α, P_β нулевого решения системы уравнений Гамильтона с функцией H (2.1) — (2.3) будем опираться на теорему [1,2] об устойчивости гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Формулировка теоремы предполагает, что функция H вещественным каноническим преобразованием приведена в членах до четвертого порядка включительно к нормальной форме

$$H = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\omega_j r_j + \frac{1}{4}\sum_{j,k=1}^{2}\alpha_{jk}' r_j r_k + \sum_{m=5}^{\infty} H_m \tag{2.4}$$

$$r_j = \xi_j^2 + \eta_j^2, \quad \alpha_{12}' = \alpha_{21}'$$

где ω_j, α_{jk}' — действительные постоянные. Тогда положение равновесия будет устойчивым по Ляпунову, если выполняется неравенство

$$D \equiv \alpha_{11}'\omega_2^2 - 2\alpha_{12}'\omega_1\omega_2 + \alpha_{22}'\omega_1^2 \neq 0 \tag{2.5}$$

3. Перейдем к определению инвариантов ω_j, α_{jk}' ($j, k = 1, 2$) нормальной формы (2.4). Будем в дальнейшем наряду с (2.4) рассматривать для H нормальную форму вида

$$H = \sum_{j=1}^{2} \varkappa_j u_j v_j + \sum_{j,k=1}^{2} \alpha_{jk} u_j v_j u_k v_k + \sum_{m=5}^{\infty} H_m \tag{3.1}$$

$$\varkappa_j = I\omega_j, \quad \alpha_{jk} = -\alpha_{jk}'$$

которая получается из (2.4) с помощью канонического преобразования

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(u_j + Iv_j), \quad \eta_j = \frac{I}{\sqrt{2}}(u_j - Iv_j)$$

Приведем, прежде всего, к нормальной форме члены второго порядка H_2 функции H. Это можно сделать линейным каноническим симплектическим преобразованием, которое строится с помощью собственных векторов матрицы G, фигурирующей в уравнениях в вариациях

$$dP/dt = GP, \quad P = \{\alpha, \beta, P_\alpha, P_\beta\} \tag{3.2}$$

$$G = \begin{Vmatrix} 0 & \dfrac{A-C}{AC}\,l & \dfrac{1}{A} & 0 \\ -\dfrac{l}{C} & 0 & 0 & \dfrac{1}{B} \\ -\left(\dfrac{l^2}{C}+a\right) & 0 & 0 & \dfrac{l}{C} \\ 0 & \dfrac{A-C}{AC}\,l^2 - a & \dfrac{C-A}{AC}\,l & 0 \end{Vmatrix}$$

Будем рассматривать случай, когда корни $\varkappa_1$, $-\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $-\varkappa_2$ характеристического уравнения для системы (3.2)

$$\varkappa^4 + 2S_1\varkappa^2 + S_2 = 0 \tag{3.3}$$

$$S_1 = \frac{1}{2}\left[\left(1 + \frac{(A-C)(B-C)}{AB}\right)\frac{l^2}{C^2} + \frac{A+B}{AB}a\right], \quad S_2 = \frac{a_1 a_2}{AB}$$

являются чисто мнимыми и среди них нет равных, для чего необходимо и достаточно выполнение следующих совместных неравенств:

$$S_1 > 0, \quad S_2 > 0, \quad S_3 = S_1^2 - S_2 > 0 \tag{3.4}$$

Пусть $\Delta_m(\varkappa)$ ($m = 1, 2, 3, 4$) — алгебраическое дополнение, взятое с обратным знаком, m-го элемента последней строки матрицы $G - \varkappa E$ (E — единичная матрица)

$$\Delta_1(\varkappa) = \frac{\varkappa l}{ABC}(A + B - C), \quad \Delta_2(\varkappa) = \frac{1}{B}\left(\varkappa^2 + \frac{a_1}{A}\right) \tag{3.5}$$

$$\Delta_3(\varkappa) = \frac{l}{C}\left(\varkappa^2 + \frac{C-A}{AB}a_1\right), \quad \Delta_4(\varkappa) = \varkappa\left(\varkappa^2 + \frac{l^2}{C^2} + \frac{a}{A}\right)$$

тогда искомое преобразование будет

(3.6) $$P = \Lambda Q, \quad Q = \{x_1, \ x_2, \ y_1, \ y_2\}$$

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} \dfrac{\Delta_1(\varkappa_1)}{I\delta_1} & \dfrac{\Delta_1(\varkappa_2)}{I\delta_2} & -\dfrac{\Delta_1(\varkappa_1)}{\delta_1} & -\dfrac{\Delta_1(\varkappa_2)}{\delta_2} \\ \dfrac{\Delta_2(\varkappa_1)}{I\delta_1} & \dfrac{\Delta_2(\varkappa_2)}{I\delta_2} & \dfrac{\Delta_2(\varkappa_1)}{\delta_1} & \dfrac{\Delta_2(\varkappa_2)}{\delta_2} \\ \dfrac{\Delta_3(\varkappa_1)}{I\delta_1} & \dfrac{\Delta_3(\varkappa_2)}{I\delta_2} & \dfrac{\Delta_3(\varkappa_1)}{\delta_1} & \dfrac{\Delta_3(\varkappa_2)}{\delta_2} \\ \dfrac{\Delta_4(\varkappa_1)}{I\delta_1} & \dfrac{\Delta_4(\varkappa_2)}{I\delta_2} & -\dfrac{\Delta_4(\varkappa_1)}{\delta_1} & -\dfrac{\Delta_4(\varkappa_2)}{\delta_2} \end{Vmatrix}$$

причем

(3.7) $$I\delta_j^2 = 2\,(\Delta_1(\varkappa_j)\,\Delta_3(\varkappa_j) - \Delta_4(\varkappa_j)\,\Delta_2(\varkappa_j)), \qquad j = 1, 2$$

Преобразование (3.6) приводит матрицу G к диагональному виду, а квадратичные члены функции H к нормальной форме. Это преобразование каноническое унивалентное, поскольку на основании (3.6) выражение

$$P_\alpha d\alpha + P_\beta d\beta - y_1 dx_1 - y_2 dx_2$$

есть полный дифференциал, в чем можно непосредственно убедиться, если учесть, что постоянные $\Delta_m(\varkappa_j)$ (3.5) удовлетворяют соотношениям

$$\Delta_1(\varkappa_1)\,\Delta_3(\varkappa_2) - \Delta_2(\varkappa_2)\,\Delta_4(\varkappa_1) = 0$$
$$\Delta_1(\varkappa_2)\,\Delta_3(\varkappa_1) - \Delta_2(\varkappa_1)\,\Delta_4(\varkappa_2) = 0$$

Преобразование (3.6) — комплексное, однако оно должно быть таким, чтобы совместно с преобразованием

(3.8) $$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + Iy_j), \qquad \eta_j = \frac{I}{\sqrt{2}}(x_j - Iy_j)$$

приводящим гамильтониан H к вещественной форме (2.4), давало вещественное каноническое преобразование. Поскольку постоянные $\Delta_1(\varkappa_j)$, $\Delta_4(\varkappa_j)$ — чисто мнимые величины, а $\Delta_2(\varkappa_j)$, $\Delta_3(\varkappa_j)$ — действительные, то преобразование α, β, P_α, $P_\beta \to \xi_1$, ξ_2, η_1, η_2 (3.6), (3.8) будет вещественным, если вещественными будут постоянные δ_1 и δ_2.

Выражение (3.7) для $I\delta_j^2$ можно представить следующим образом:

(3.9) $$I\delta_j^2 = I\omega_j\,[\sigma_1 + (-1)^j\sigma_2]$$

где действительные числа σ_1, σ_2 не зависят от j. Выбором знаков $\omega_j = -I\varkappa_j$ всегда можно добиться на основании (3.9), чтобы $\delta_j^2 > 0$, и следовательно, условие вещественности преобразования (3.6), (3.8) определяет, будут ли в нормальной форме (2.4) частоты ω_j одного или разных знаков. С другой стороны, представляющий интерес случай, когда $\omega_1\omega_2 < 0$, характеризуется тем, что сигнатура квадратичной формы H_2 равна нулю

(3.10) $$a_1 < 0, \quad a_2 < 0$$

Преобразование (3.6) неособенное, если $\delta_1\delta_2 \neq 0$, что приводит к условию

(3.11) $$\delta_1^2\delta_2^2 \equiv 4\omega_1\omega_2\,\frac{l^2(A+B-C)^2}{A^2B^3C^2}\,S_3 a_1 \neq 0$$

По предположению имеют место неравенства (3.4) и, таким образом, $\omega_1\omega_2 a_1 S_3 \neq 0$. Требование выполнения условия (3.11) приводит к необходимости исключить из рассмотрения случай диска $A + B - C = 0$. Однако в этом случае

$$\varkappa_1^2 = -\frac{l^2}{C^2} - \frac{a}{A}, \quad \varkappa_2^2 = -\frac{l^2}{C^2} - \frac{a}{B}$$

а значит, $a_1 > 0$, $a_2 > 0$ и функция H_2 положительно определена.

Граммель [3] провел подробный анализ необходимых условий устойчивости (3.4), на основании чего можно выделить следующие области устойчивости в первом приближении, удовлетворяющие неравенствам (3.10):

(3.12) $\quad z_0 > 0, \quad C < B \leqslant A, \quad l > l_2$

(3.13) $\quad z_0 < 0, \quad C \geqslant A \geqslant B, \quad R > 0, \quad l_3 < l < l_2$

(3.14) $\quad z_0 < 0, \quad A \geqslant C \geqslant B, \quad R > 0, \quad l_3 < l < l_2$

(3.15) $\quad z_0 < 0, \quad C < B \leqslant A, \quad l > l_3$

Здесь

$$R = C^2 + B^2 + 3AB - 2C(A + B)$$

$$l_2^2 = \frac{aC^2}{B - C}, \quad l_3^2 = \frac{4AB - AC - BC + 2\sqrt{AB(2A - C)(2B - C)}}{C - A - B}\, a$$

4. Для приведения к нормальной форме членов четвертой степени (2.3) функции H воспользуемся преобразованием Биркгофа [10] и введем канонические переменные u_j, v_j $(j = 1, 2)$ по формулам

$$u_j = \frac{\partial K}{\partial v_j}, \quad y_j = \frac{\partial K}{\partial x_j}, \quad K = \sum_{j=1}^{2} v_j x_j + K_4 \tag{4.1}$$

где K_4 — однородный полином четвертой степени от переменных v_j, x_j.

В случае отсутствия резонанса вида

$$n\omega_1 + m\omega_2 = 0 \tag{4.2}$$

где n, m — целые числа, удовлетворяющие равенству $|n| + |m| = 4$, постоянные коэффициенты полинома K_4 могут быть выбраны так, что в новых переменных u_j, v_j в функции H_4 будут исключены все члены, не входящие в нормальную форму, и следовательно, гамильтониан H будет иметь вид (3.1)

В дальнейшем будем предполагать, что равенство (4.2) не имеет места, т. е. будем рассматривать общий (не резонансный) случай.

Применим преобразования (3.6), (4.1) к функции H_4, тогда получим для инвариантов α_{11}, α_{22}, α_{12} нормальной формы следующие выражения:

$$\alpha_{jj} = \Psi_1(\varkappa_j)\,\delta_j^{-4}, \quad j = 1, 2 \tag{4.3}$$

$$\alpha_{12} = (\Psi_2(\varkappa_1, \varkappa_2) + \Psi_2(\varkappa_2, \varkappa_1) + \frac{a}{2}\Psi_3(\varkappa_1)\Psi_3(\varkappa_2))\,\delta_1^{-2}\delta_2^{-2}$$

$$\Psi_1(x) = \frac{C - A}{AC}\Delta_2(x)\,[\Delta_2(x)(3\Delta_3^2(x) + l^2\Delta_1^2(x) + l^2\Delta_2^2(x) -$$

$$- 4l\Delta_2(x)\Delta_3(x) - 2l\Delta_1(x)\Delta_4(x)) + \Delta_1(x)(2\Delta_3(x)\Delta_4(x) -$$

$$- l\Delta_1(x)\Delta_3(x))] - \frac{1}{C}\Delta_1^2(x)(3\Delta_4^2(x) + 2l^2\Delta_1^2(x) -$$

$$- 5l\Delta_1(x)\Delta_4(x)) + \frac{a}{4}(\Delta_1^2(x) - \Delta_2^2(x))^2$$

$$\Psi_2(x,y) = \frac{C-A}{AC}[\Delta_2^2(y)(\Delta_3^2(x) + l^2\Delta_2^2(x) + l^2\Delta_1^2(x)) +$$
$$+ \Delta_1(x)\Delta_2(y)(2\Delta_3(y)\Delta_4(x) - l\Delta_1(x)\Delta_3(y) - 2l\Delta_2(y)\Delta_4(x)) +$$
$$+ 2\Delta_2(x)\Delta_2(y)\Delta_3(y)(\Delta_3(x) - 2l\Delta_2(x))] -$$
$$- \frac{\Delta_1(x)}{C}[2\Delta_1(y)(\Delta_4(x)\Delta_4(y) + l^2\Delta_1(x)\Delta_1(y)) +$$
$$+ \Delta_1(x)\Delta_4(y)(\Delta_4(y) - 5l\Delta_1(y))]$$
$$\Psi_3(x) = \Delta_1^2(x) - \Delta_2^2(x)$$

Исследовать неравенство (2.5) в общем виде затруднительно, однако можно показать, что в областях (3.12) — (3.15) D — аналитическая функция l, не обращающаяся тождественно в нуль, и что в каждой из этих четырех областей существует подобласть, в которой $D \neq 0$ [1]. Отметим, что случай $A = B$, исследованный в работе [4], может быть здесь исключен из рассмотрения.

5. Остановимся прежде всего на областях (3.12), (3.15). Рассмотрим величину D как функцию параметра $\mu = C/l$ в некотором кольце $\mu_1 < |\mu| < \mu_2$ комплексной плоскости μ, где $\mu_2 > \mu_1 > 0$ и μ_1 сколь угодно мало. Покажем, что в этом кольце D представляет собой аналитическую функцию μ и вычислим главную часть разложения этой функции в ряд Лорана по степеням параметра μ. Корни $\varkappa_1^2$, $\varkappa_2^2$ векового уравнения (3.3) можно представить в виде рядов по степеням параметра μ^2

$$(5.1) \qquad \varkappa_1^2 = -\frac{1}{\mu^2} + \chi_1(\mu^2), \quad \varkappa_2^2 = -\frac{(A-C)(B-C)}{\mu^2 AB} + \chi_2(\mu^2)$$

где $\chi_1(\mu^2)$, $\chi_2(\mu^2)$ — тейлоровские части соответствующих разложений. Значение $\mu_3^2 = C^2/l_3^2$, являющееся корнем уравнения $S_3 = 0$, отвечает ближайшей к $\mu = 0$ особой точке функций $\varkappa_1^2$, $\varkappa_2^2$, поэтому ряды $\chi_1(\mu^2)$, $\chi_2(\mu^2)$ сходятся в круге

$$(5.2) \qquad 0 \leqslant |\mu| < |\mu_3|$$

Для величин $\Delta_m(\varkappa_j)$ ($m = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2$) (3.5) имеем выражения

$$(5.3) \qquad \Delta_1(\varkappa_j) = \frac{\varkappa_j}{\mu AB}(A+B-C), \quad \Delta_2(\varkappa_1) = \frac{C-A-B}{\mu^2 AB} + \chi_{21}(\mu^2)$$
$$\Delta_2(\varkappa_2) = \frac{C-A-B}{\mu^2 AB^2}(B-C) + \chi_{22}(\mu^2)$$
$$\Delta_3(\varkappa_1) = \frac{1}{\mu}\left[\frac{(C-A-B)C}{\mu^2 AB} + \chi_{31}(\mu^2)\right]$$
$$\Delta_3(\varkappa_2) = \frac{1}{\mu}\left[\frac{a(2A-C)}{ABC}(B-C) + \chi_{32}(\mu^2)\right]$$
$$\Delta_4(\varkappa_1) = \varkappa_1\left[\frac{a(C-2A)}{AC} + \chi_{41}(\mu^2)\right]$$
$$\Delta_4(\varkappa_2) = \varkappa_2\left[\frac{(A+B-C)C}{\mu^2 AB} + \chi_{42}(\mu^2)\right]$$

[1] В последнее время вышла из печати статья [11], в которой, показывается, что $D \not\equiv 0$.

в которых $\chi_{kj}(\mu^2)$ $(k = 2, 3, 4; j = 1, 2)$ — ряды по целым положительным степеням параметра μ^2. Разложения функций $\chi_{kj}(\mu^2)$ в нуле сходятся в круге (5.2). Представив δ_1^2, δ_2^2 (3.7) рядами Лорана в кольце $\mu_1 < |\mu| < \mu_3$, получим разложения, в которых выделим первые члены

$$\delta_1^2 = \frac{\omega_1}{\mu^4}\left[-\frac{2C(A+B-C)^2}{A^2B^2} + \chi_3(\mu^2)\right] \tag{5.4}$$
$$\delta_2^2 = \frac{\omega_2}{\mu^4}\left[\frac{2C(B-C)(A+B-C)^2}{A^2B^3} + \chi_4(\mu^2)\right]$$

Здесь функции $\chi_3(\mu^2)$, $\chi_4(\mu^2)$ того же вида, что и функции $\chi_{kj}(\mu^2)$, причем $\chi_3(0) = \chi_4(0) = 0$.

На основании формул (5.1), (5.3), (5.4), (4.3), (2.5) D представляется рядом Лорана по степеням параметра μ^2, сходящимся в кольце $\mu_1 \leqslant |\mu| < \mu^*$, $\mu^* = \min(C/|l_2|, |\mu_3|)$

$$D = \frac{2C-A-B}{4AB\mu^2} + \chi(\mu^2) \tag{5.5}$$

где $\chi(\mu^2)$ — тейлоровская часть разложения. Ряд (5.5), рассматриваемый как функция параметра $l = C/\mu$, сходится для всех конечных значений l, лежащих вне окружности $|l| = |l_3|$. В случае (3.12) все корни уравнения (относительно l) $\delta_1^2\delta_2^2 = 0$, отвечающего неравенству (3.11), и, следовательно, все особые точки конечной плоскости для функции D будут расположены на мнимой оси или на действительной оси левее особой точки $l_2 > 0$. Поэтому в данном случае разложение для функции $\chi(\mu)$ может быть аналитически продолжено вдоль действительной оси комплексной плоскости l до значения $l = l_2$. Аналогичным образом, в случае (3.15) все особые точки функции D расположены на мнимой оси или на действительной оси левее особой точки $l_3 > 0$, и поэтому ряд $\chi(\mu)$ может быть аналитически продолжен вдоль действительной оси до точки l_3.

Таким образом, для всех конечных значений $l > 0$, допустимых в случаях (3.12), (3.15), величина D будет аналитической функцией l. В рассматриваемых случаях $A > B > C$, поэтому для достаточно больших значений l величина D отлична от нуля.

6. Рассмотрим области (3.13), (3.14) и будем считать, что $B \neq C$. Если же $B = C \neq A$, то тогда $l_2 = +\infty$, что приводит к случаю, разобранному в п. 5. Покажем, что на интервале $l_3 < l < l_2$ величина D — аналитическая функция l и что существует область в некоторой достаточно малой окрестности l_2, в которой $D \neq 0$. Введем малый параметр $\lambda > 0$, полагая, что

$$l^2 = l_2^2 - \lambda^2 C^2 \tag{6.1}$$

тогда в круге $|\lambda^2| < (l_2^2 - l_3^2)/C^2$ будем иметь для $\varkappa_1^2$, $\varkappa_2^2$ разложения по целым положительным степеням λ^2, при этом

$$\varkappa_1^2 = \lambda^2\left[-\frac{(C-B)(A-B)}{R} + \varphi_1(\lambda^2)\right], \quad \varkappa_2^2 = -\frac{Rl_2^2}{ABC^2} + \varphi_2(\lambda^2) \tag{6.2}$$

где ряды $\varphi_j(\lambda^2)$ такие, что $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$. Для $\Delta_m(\varkappa_j)$ на основании

(3.5), (6.1) получим выражения

$$
(6.3)\qquad \Delta_1(\varkappa_j) = \frac{\varkappa_j l}{ABC}(A+B-C), \qquad \Delta_2(\varkappa_j) = \frac{1}{B}\left(\varkappa_j^2 - \frac{C-B}{A}\lambda^2\right)
$$

$$
\Delta_3(\varkappa_j) = \frac{l}{C}\left(\varkappa_j^2 - \frac{(A-C)(B-C)}{AB}\lambda^2\right)
$$

$$
\Delta_4(\varkappa_j) = \varkappa_j\left(\frac{A+B-C}{AC^2}\, l_2^2 + \varkappa_j^2 - \lambda^2\right)
$$

Постоянные δ_j^2 представим в виде

$$
(6.4)\qquad \delta_1^2 = \omega_1\lambda^2\left[\frac{2l_2^2(C-B)}{A^2B^2C^2}(A+B-C)^2 + \varphi_3(\lambda^2)\right]
$$

$$
\delta_2^2 = \omega_2\left(-\frac{2l_2^4}{A^2B^3C^4}R^2 + \varphi_4(\lambda^2)\right)
$$

Здесь функции $\varphi_3(\lambda^2)$, $\varphi_4(\lambda^2)$ такого же типа, что и функции $\varphi_j(\lambda^2)$ ($j = 1, 2$). Тогда для функции D, принимая во внимание формулы (2.5), (4.3), (6.1) — (6.4), будем иметь в кольце

$$
\lambda_1 \leqslant |\lambda^2| < (l_2^2 - l_3^2)/C^2
$$

где $\lambda_1 > 0$ — сколь угодно малое число, разложение в ряд Лорана по степеням параметра λ^2

$$
(6.5)\qquad D = \frac{3l_2^4(3C-4B)(B-A)}{16ABC^5\lambda^2} + \varphi(\lambda^2)
$$

Здесь $\varphi(\lambda^2)$ представляет собой тейлоровскую часть разложения. При условии $A > B$, $C > B$, величина D (6.5) может обратиться в нуль при малых значениях λ лишь при $3C - 4B = 0$. В случае $3C - 4B = 0$ можно показать, что ряд (6.5) начинается членом

$$
\varphi(0) = \frac{l_2^2(3C-4A)}{256AC^2R}(52A - 11C)
$$

который при $A > B$ не равен нулю.

7. Величина D является аналитической функцией параметра l в рассматриваемых областях (3.12) — (3.15) и $D \neq 0$ при $l \gg 1$, поэтому для каждого фиксированного набора постоянных A, B, C, z_0 существует лишь конечное число значений l, для которых $D = 0$.

Сформулируем полученный результат.

Теорема. Если частоты ω_1, ω_2 различны и между ними нет резонансов четвертого порядка, то необходимые условия устойчивости в первом приближении (2.6) для перманентных вращений тяжелого твердого тела вокруг главной оси инерции будут также и достаточными за исключением, быть может, значений параметров A, B, C, z_0, l, для которых величина D (2.5) обращается в нуль. При этом уравнение $D = 0$ относительно l в областях (3.12) — (3.15) имеет лишь конечное число корней, и в каждой из этих областей существует подобласть, где $D \neq 0$.

Устойчивость перманентных вращений по отношению к переменным α, β, P_α, P_β при выполнении неравенства $D \neq 0$ показана в предположении, что постоянная l (или ψ_0) не возмущается. Если же l получает достаточно малое приращение Δl, то полное возмущенное движение можно представить как возмущенное движение для некоторого другого перманентного вращения при фиксированном значении $l_1 = l + \Delta l$. Семейство перманентных вращений непрерывно по l, и каждое перманентное вращение из достаточно малой окрестности исследуемого условно устойчиво. Тогда можно сделать заключение о безусловной устойчивости по отношению к переменным α, β, P_α, P_β подобно замечанию [12] о характере устойчивости, устанавливаемой на основании теоремы Рауса.

При указанных выше условиях перманентные вращения будут устойчивы также и по отношению к переменным p, q, r, γ, γ', γ''.

Автор благодарит В. В. Румянцева за обсуждение работы и замечания.

Поступила 10 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.* Об устойчивости положения равновесия гамильтоновой системы обыкновенных дифференциальных уравнений в общем эллиптическом случае. Докл. АН СССР, 1961, т. 137, № 2.
2. *Moser J.* Lectures on Hamiltonian systems. Mem. Amer. Math. Soc., 1968, No. 81, p. 1—60. (Рус. перев.: Лекции о гамильтоновых системах. М., «Мир», 1973.)
3. *Граммель Р.* Гироскоп, его теория и применения, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
4. *Четаев Н. Г.* Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. ПММ, 1954, т. 18, вып. 1.
5. *Румянцев В. В.* Об устойчивости вращения тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой в случае С. В. Ковалевской. ПММ, 1954, т. 18, вып. 4.
6. *Румянцев В. В.* Устойчивость перманентных вращений тяжелого твердого тела. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
7. *Румянцев В. В.* К устойчивости перманентных вращений твердого тела около неподвижной точки. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
8. *Скимель В. Н.* К задачам устойчивости движения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
9. *Рубановский В. Н.* О бифуркации и устойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела с одной неподвижной точкой. Теоретична и приложна механика, 1974, т. 5, № 2.
10. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.— Л., Гостехиздат, 1941.
11. *Ковалев А. М.*, *Савченко А. Я.* Устойчивость равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси. ПММ, 1975, т. 39, вып. 4.
12. *Ляпунов А. М.* О постоянных винтовых движениях твердого тела в жидкости. Собр. соч., т. 1. М., Изд-во АН СССР. 1954.