ЛИТЕРАТУРА

1. *Каландия А. И., Лурье А. И., Манджавидзе Г. Ф., Прокопов В. К., Уфлянд Я. С.* Линейная теория упругости. В кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3. М., «Наука», 1972.
2. *Губенко В. С., Улитко А. Ф.* Смешанные задачи теории упругости для полупространства и слоя с несколькими круговыми линиями раздела краевых условий. В сб.: Контактные задачи и их инженерные приложения. М., НИИМАШ, 1969.
3. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Барчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости. Изд-во Тбилисск. ун-та, 1968.
4. *Рвачев В. Л.* О давлении на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму клина. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
5. *Ворович И. И.* О поведении решений основных краевых задач плоской теории упругости в окрестности особых точек границы. Материалы 3-го Всес. съезда по теор. и прикл. механике. М., «Наука», 1968.
6. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
7. *Benthem J. P.* A Laplace transforms method for the solution of semi-infinite and finite strip problems in stress analysis. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1963, vol. 16, No. 4.
8. *Williams M. L.* On the stress distribution at the base of a stationary crack. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No. 1.
9. *Бородачев Н. М., Бородачева Ф. Н.* Вдавливание кольцевого штампа в упругое полупространство. Инж. ж. МТТ, 1966, № 4.
10. *Sneddon I. N.* Dual equations in elasticity. В кн.: Приложения теории функций в механике сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1965.
11. *Cooke J. C.* The solution of triple integral equations in operational form. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1965, vol. 18, pt 1.
12. *Sneddon I. N.* Fractional integration and dual integral equations. North Carolina State Colledge, PSR-6, 1962.

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ МОМЕНТНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Х. К. Сейфуллаев

(Баку)

Рассматривается задача устойчивости при осевом сжатии круговых цилиндрических оболочек переменной толщины с учетом моментности исходного докритического состояния.

Начальные моментные состояния равновесия оболочек переменной толщины описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, а затем на основании работ [1, 2] получена линеаризованная система дифференциальных уравнений устойчивости с переменными коэффициентами. Переменные коэффициенты отражают влияние начального моментного состояния и переменности толщины оболочки. Нелинейные уравнения докритического состояния решаются методом малого параметра при осесимметричной начальной форме равновесия. Применением метода малого параметра к линеаризованной системе уравнений устойчивости строится итерационный процесс для определения критических сил. Задача решается в трех приближениях по малым параметрам.

1. Нелинейные уравнения докритического состояния цилиндрических оболочек переменной толщины имеют вид [3]

$$M^-(D, w, \Phi) \equiv \Delta (D\Delta w) - (1-\nu) L(D, w) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \tag{1.1}$$
$$- L(\Phi, w) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$
$$M^+(H, w, \Phi) \equiv \Delta (H\Delta \Phi) - (1+\nu) L(H, \Phi) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{2} L(w, w) = 0$$
$$D = \frac{Eh^3(x, y)}{12(1-\nu^2)}, \quad H = \frac{1}{Eh(x, y)}$$
$$L(u, v) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$$

Функции напряжений и нормального перемещения представим в виде

$$\Phi = \varphi_0 + \varphi(x, y), \; w = w_0 + w(x, y) \tag{1.2}$$

Здесь φ_0 и w_0 — функции напряжений и прогиба, соответствующие докритическому состоянию оболочки, а $\varphi(x, y)$ и $w(x, y)$ — приращения этих величин, возникающие при потере устойчивости.

Подставляя (1.2) в (1.1) и пренебрегая величинами второго порядка, получим линеаризованную систему уравнений

$$\Delta (D\Delta w) - (1-\nu) L(D, w) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - L(\varphi, w_0) - \tag{1.3}$$
$$- L(\varphi_0 w) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - M^-(D, w_0, \varphi_0)$$
$$\Delta (H\Delta \varphi) - (1-\nu) L(H, \varphi) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + L(w_0, w) = - M^+(H, w_0, \varphi_0)$$

Система (1.3) дает возможность найти решения нелинейной системы, а также решить вопрос об устойчивости начального моментного состояния. Правые части (1.3) по виду совпадают с левыми частями (1.1). Поэтому, когда будет найдено решение (1.1), система (1.3) становится однородной и при фиксированном значении параметра нагрузки будет иметь нетривиальное решение.

Предположим, что решение системы (1.1) найдено, тогда получим уравнения устойчивости цилиндрических оболочек переменной толщины при моментном состоянии

$$\Delta (D\Delta w) - (1-\nu) L(D, w) - \frac{1}{R}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - L(\varphi_0, w) - L(\varphi, w_0) + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \tag{1.4}$$
$$\Delta (H\Delta \varphi) - (1-\nu) L(H, \varphi) + \frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + L(w_0, w) = 0$$

Уравнения (1.4) имеют переменные коэффициенты, отражающие влияния начального моментного состояния и переменности толщины оболочки.

Таким образом, решение задачи устойчивости моментного состояния цилиндрических оболочек переменной толщины приводится к интегрированию системы (1.1) и уравнений устойчивости (1.4).

Предположим, что толщину оболочки можно представить в виде

$$h = h_0 [1 + \varepsilon f(x, y)], \quad \varepsilon = \frac{h_{\max} - h_{\min}}{2h_0} \tag{1.5}$$

где h_0 — среднее значение толщины, ε — малый параметр.

Тогда переменные жесткости D и H можно записать следующим образом:

$$D = D_0 [1 + \varepsilon f(x, y)]^3, \quad H = H_0 [1 - \varepsilon f(x, y) + \varepsilon^2 f^2(x, y) - \ldots]$$

Подставляя эти переменные величины в (1.1), а затем принимая решения в виде рядов, разложенных по степеням малого параметра ε, получим следующие решения осесимметричной начальной формы равновесия, если оболочка по торцам $x = 0$ и $x = L$ оперта шарнирно:

$$w_0 = f_m \left(\sin \lambda_\mu x + \varepsilon \sum_\rho \alpha_{1\mu\rho} \sin \lambda_\rho x\right) \tag{1.6}$$

$$\varphi_0 = f_m \left(\frac{1}{RH_0 \lambda_\mu^2} \sin \lambda_\mu x + \varepsilon \sum_\rho \beta_{1\mu\rho} \sin \lambda_\rho x\right) \tag{1.7}$$

$$\alpha_{1\mu\rho} = \frac{1}{\lambda_\rho^2 (N_{0\rho} - N_{0\mu})} \left(C^{(1)}_{1\mu\rho} - \frac{1}{RH_0 D_0 \lambda_\rho^2} C^{(2)}_{1\mu\rho} \right)$$

$$\beta_{1\mu\rho} = \frac{\alpha_{1\mu\rho}}{RH_0 \lambda_\rho^2} + \frac{1}{\lambda_\rho^4} C^{(2)}_{1\mu\rho}, \qquad N_{0\mu} = D_0 \lambda_\mu^2 + \frac{1}{R^2 H_0 \lambda_\mu^2}$$

Здесь f_m — начальный докритический прогиб, $N_{0\rho}$ — величина, получающаяся из $N_{0\mu}$, если μ заменить на ρ; $C^{(1)}_{1\mu\rho}$ и $C^{(2)}_{1\mu\rho}$ — правые части уравнений первого приближения, имеющие вид, указанный в [3]. В зависимости от закона изменения толщины можно найти $C^{(1)}_{1\mu\rho}$ и $C^{(2)}_{1\mu\rho}$.

С учетом (1.5) и (1.6) система (1.4) принимает следующий вид:

(1.8)
$$\Delta\Delta w + 3\varepsilon L_\nu^- (f, w) + 3\varepsilon^2 L_\nu^- (f^2, w) + \varepsilon^3 L_\nu^- (f^3, w) +$$
$$+ \frac{f_0 h_0}{D_0} \left(\lambda_\mu^2 \sin \lambda_\mu x + \varepsilon \sum_\rho \alpha_{1\mu\rho} \lambda_\rho^2 \sin \lambda_\rho x \right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} +$$
$$+ \frac{f_0 h_0}{D_0} \left(\frac{1}{RH_0} \sin \lambda_\mu x + \varepsilon \sum_\rho \beta_{1\mu\rho} \lambda_\rho^2 \sin \lambda_\rho x \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} -$$
$$- \frac{1}{RD_0} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{N_x}{D_0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$
$$\Delta\Delta \varphi - \varepsilon L_\nu^+ (f, \varphi) + \varepsilon^2 L_\nu^+ (f^2, \varphi) - \varepsilon^3 L^+ (f^3, \varphi) + \frac{1}{RH_0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} -$$
$$- \frac{f_0 h_0}{H_0} \left(\lambda_\mu^2 \sin \lambda_\mu x + \varepsilon \sum_\rho \alpha_{1\mu\rho} \lambda_\rho^2 \sin \lambda_\rho x \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$
$$L_\nu^\pm (u^k, v) = \Delta (u \Delta v) - (1 \pm \nu) L (u^k, v), \qquad k = 1, 2, 3$$

Система (1.8) содержит два малых параметра: ε и $f_0 = f_m / h_0$. Решение системы (1.8) ищем в виде рядов по степеням малых параметров [4]

(1.9)
$$\varphi = \sum_{k=0}^\infty \sum_{s=0}^\infty \varepsilon^k f_0^s \varphi_{ks} (x, y), \qquad w = \sum_{k=0}^\infty \sum_{s=0}^\infty \varepsilon^k f_0^s w_{ks} (x, y)$$
$$N_x = \sum_{k=0}^\infty \sum_{s=0}^\infty \varepsilon^k f_0^s N_{ks}$$

Подставляя (1.9) в (1.8) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях малых параметров, получим систему последовательных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

(1.10)
$$M_1 (w_{00}, \varphi_{00}) = 0, \quad M_2 (w_{00}, \varphi_{00}) = 0$$
$$M_1 (w_{10}, \varphi_{10}) = -3L_\nu^- (f, w_{00}) - \frac{N_{10}}{D_0} \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial x^2}, \qquad M_2 (w_{10}, \varphi_{10}) = L_\nu^+ (f, \varphi_{00})$$
$$M_1 (w_{20}, \varphi_{20}) = -3L_\nu^- (f, w_{10}) - 3L_\nu^- (f^2, w_{00}) - \frac{N_{10}}{D_0} \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial x^2} - \frac{N_{20}}{D_0} \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial x^2}$$
$$M_2 (w_{20}, \varphi_{20}) = L_\nu^+ (f, \varphi_{10}) - L_\nu^+ (f^2, \varphi_{00})$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

(1.11)
$$M_1 (w_{01}, \varphi_{01}) = \frac{h_0}{D_0} \sin \lambda_\mu x \left(\lambda_\mu^2 \frac{\partial^2 \varphi_{00}}{\partial y^2} + \frac{1}{RH_0} \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial y^2} \right) - \frac{N_{01}}{D_0} \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial x^2}$$
$$M_2 (w_{01}, \varphi_{01}) = \frac{\lambda_\mu^2 h_0}{H_0} \sin \lambda_\mu x \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial y^2}$$
$$M_1 (w_{02}, \varphi_{02}) = -\frac{h_0}{D_0} \sin \lambda_\mu x \left(\lambda_\mu^2 \frac{\partial^2 \varphi_{01}}{\partial y^2} + \frac{1}{RH_0} \frac{\partial^2 w_{01}}{\partial y^2} \right) -$$
$$- \frac{N_{01}}{D_0} \frac{\partial^2 w_{01}}{\partial x^2} - \frac{N_{02}}{D_0} \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial x^2}$$

$$M_2(w_{02}, \varphi_{02}) = \frac{\lambda_\mu^2 h_0}{H_0} \sin \lambda_\mu x \frac{\partial^2 w_{01}}{\partial x^2}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

(1.12)

$$M_1(w_{11}, \varphi_{11}) = -\frac{h_0}{D_0} \sin \lambda_\mu x \left(\lambda_\mu^2 \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial y^2} + \frac{1}{RH_0} \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial y^2}\right) -$$

$$-\frac{h_0}{D_0} \sum_\rho \lambda_\rho^2 \sin \lambda_\rho x \left(\alpha_{1\mu\rho} \frac{\partial^2 \varphi_{00}}{\partial y^2} + \beta_{1\mu\rho} \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial y^2}\right) - 3L_\nu^-(f, w_{01}) - \frac{N_{11}}{D_0} \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial x^2}$$

$$M_2(w_{11}, \varphi_{11}) = L_\nu^+(f, \varphi_{01}) + \frac{\lambda_\mu^2 h_0}{H_0} \sin \lambda_\mu x \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial y^2} + \frac{h_0}{H_0} \sum_\rho \alpha_{1\mu\rho} \lambda_\rho^2 \sin \lambda_\rho x \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial y^2}$$

$$M_1(w_{21}, \varphi_{21}) = -3L_\nu^-(f, w_{11}) - 3L_\nu^-(f^2, w_{01}) -$$

$$-\frac{h_0}{D_0} \sin \lambda_\mu x \left(\lambda_\mu^2 \frac{\partial^2 \varphi_{20}}{\partial y^2} + \frac{1}{RH_0} \frac{\partial^2 w_{20}}{\partial y^2}\right) - \frac{h_0}{D_0} \sum_\rho \lambda_\rho^2 \sin \lambda_\rho x \left(\alpha_{1\mu\rho} \frac{\partial^2 \varphi_{10}}{\partial y^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta_{1\mu\rho}}{RH_0} \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial y^2}\right) - \frac{N_{21}}{D_0} \frac{\partial^2 w_{00}}{\partial x^2} - \frac{N_{11}}{D_0} \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial x^2} - \frac{N_{20}}{D_0} \frac{\partial^2 w_{01}}{\partial x^2} - \frac{N_{01}}{D_0} \frac{\partial^2 w_{20}}{\partial x^2}$$

$$M_2(w_{21}, \varphi_{21}) = L_\nu^+(f, \varphi_{11}) - L_\nu^+(f^2, \varphi_{01}) +$$

$$+ \frac{\lambda_\mu^2 h_0}{H_0} \sin \lambda_\mu x \frac{\partial^2 w_{20}}{\partial y^2} + \frac{h_0}{H_0} \sum_\rho \alpha_{1\mu\rho} \lambda_\rho^2 \sin \lambda_\rho x \frac{\partial^2 w_{10}}{\partial y^2}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Здесь

$$M_1(u, v) = \Delta\Delta u - \frac{1}{RD_0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{N_{00}}{D_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$M_2(u, v) = \Delta\Delta v + \frac{1}{RH_0} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Системы уравнений (1.10) — (1.12) по своей структуре полностью совпадают с уравнениями теории круговых цилиндрических оболочек постоянной толщины при безмоментном начальном состоянии. Решение этих уравнений можно получить известными методами теории цилиндрических оболочек.

Таким образом, при помощи метода малого параметра для определения сжимающей силы построен итерационный процесс. В нулевом приближении решение первых двух уравнений системы (1.10) известно [1].

Поправки к решению нулевого приближения, учитывающие переменности толщины и начального моментного состояния получим, решая последовательно системы уравнений (1.10) — (1.12).

Первая группа уравнений (1.10) учитывает влияние только переменности толщины, вторая группа уравнений (1.11) — начального моментного состояния, а третья группа — взаимное влияние переменности толщины и моментного состояния.

2. Рассмотрим схему определения критических сил для цилиндрических оболочек переменной толщины, когда края оболочки при $x = 0$ и $x = L$ шарнирно оперты.

Функции напряжений и прогиба, удовлетворяющие граничным условиям, в нулевом приближении примем в виде

$$w_{00} = f_{mn} w_{0mn}, \quad \varphi_{00} = \frac{\lambda_m^2 f_{mn}}{RH_0 \Delta_{mn}^2} w_{0mn} \tag{2.1}$$

$$w_{0mn} = \sin \lambda_m x \sin \frac{ny}{R}, \quad \lambda_m = \frac{m\pi}{L}$$

Подставляя (2.1) в первые пары уравнений системы (1.10), получим известное значение сжимающей силы при безмоментном начальном состоянии [1]

$$N_{00} = D_0 \frac{\Delta_{mn}^2}{\lambda_m^2} + \frac{\lambda_m^2}{RH_0 \Delta_{mn}^2}, \quad \Delta_{mn}^2 = \left[\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{n}{R}\right)^2\right]^2 \tag{2.2}$$

Это значение нулевого приближения ничем не отличается от «верхнего» значения критической силы круговых цилиндрических оболочек постоянной толщины h.

Решив последовательно остальные пары дифференциальных уравнений системы (1.10), найдем поправочные члены к значениям (2.2). Эти поправочные члены находим следующим образом.

Решение ks-го приближения, удовлетворяющего граничным условиям, примем

$$w_{ks}(x, y) = \sum_p \sum_q B_{pq}^{(ks)} w_{0pq}, \qquad \varphi_{ks}(x, y) = \sum_p \sum_q A_{pq}^{(ks)} w_{0pq} \tag{2.3}$$

Подставляя (2.3) в уравнения (1.10) — (1.12) ks-го приближения, а затем умножив обе части уравнения на w_{0pq} и проинтегрировав по области оболочки, получим систему относительно $B_{pq}^{(ks)}$, $A_{pq}^{(ks)}$. Решив эту систему, находим

$$B_{pq}^{(ks)} = \frac{1}{\lambda_p{}^2 (N_{0pq} - N_{0mn})} \left(C_{pqks}^{(1)} - \frac{\lambda_p{}^2}{RH_0 D_0 \Delta_{pq}^2} C_{pqks}^{(2)} \right) \tag{2.4}$$

$$A_{pq}^{(ks)} = \frac{\lambda_p{}^2}{RH_0 \Delta_{pq}^2} B_{pq}^{(ks)} + \frac{1}{\Delta_{pq}^2} C_{pqks}^{(2)}$$

Полагая в (2.4) $m = p$ и $n = q$, получим следующие условия для определения поправок к значениям (2.2):

$$C_{mnks}^{(1)} - \frac{\lambda_m{}^2}{RD_0 \Delta_{mn}^2} C_{mnks}^{(2)} = 0 \tag{2.5}$$

$$\left(C_{mnks}^{(i)} = \frac{4}{LT} \iint\limits_G F_{ks}^{(i)}(x, y)\, w_{0mn}\, dxdy, \qquad i = 1, 2 \right)$$

Здесь $F_{ks}^{(1)}(x, y)$ и $F_{ks}^{(2)}(x, y)$ — правые части ks-го приближения систем (1.10) — (1.12). Из условия (2.5) в каждом приближении находим значения N_{ks}.

Таким образом, задаваясь законом изменения толщины, определяем поправки значения (2.2), учитывающие моментное состояние и переменность толщины оболочки.

3. В качестве примера рассмотрим замкнутую круговую цилиндрическую оболочку с линейно-изменяющейся толщиной в направлении оси x: $h(x) = h_{\min}(1 + \lambda x / L)$.

Преобразовав $h(x)$ через среднее значение толщины в виде (1.5), имеем

$$f(x) = 2x / L - 1, \quad \varepsilon = \lambda / (2 + \lambda)$$

$$\alpha_{1\mu\rho} = \frac{48\mu\rho D_0}{\pi^2 \lambda_\rho{}^2 (\mu^2 - \rho^2)^2 (N_{0\rho} - N_{0\mu})} \left(\lambda_\mu{}^4 + \frac{\mu^2}{3R^2 H_0 D_0 \rho^2} \right)$$

$$\beta_{1\mu\rho} = \frac{\alpha_{1\mu\rho}}{RH_0 \lambda_\rho{}^2} - \frac{16\mu\rho}{\pi^2 (\mu^2 - \rho^2)^2} \frac{\mu^4}{\rho^4} \left(1 + \frac{\rho^2 - \mu^2}{\mu^2} \right) \frac{1}{RH_0 \lambda_\mu{}^2}$$

В этих выражениях $\mu \neq \rho$ и μ, а также $\mu + \rho$ — нечетные числа.

Решив систему уравнений (1.10), в первом приближении из условия (2.5) находим $N_{11} = 0$, а коэффициенты рядов (2.3) имеют следующие значения:

$$B_{pn}^{(10)} = \alpha_{1mp}^{(10)} f_{mn} \quad (m + p — \text{нечетное})$$

$$\alpha_{1mp}^{(10)} = \frac{48 mp \Delta_{mn}^2 D_0}{\pi^2 (m^2 - p^2)^2 \lambda_\rho{}^2 (N_{0pn} - N_{0mn})} \left[1 + \frac{\pi^2 (p^2 - m^2)}{L^2 \Delta_{mn}} \right] \times$$

$$\times \left(1 + \frac{\lambda_m{}^2 \lambda_p{}^2}{3R^2 H_0 D_0 \Delta_{pn}^2 \Delta_{mn}^2} \right)$$

Во втором приближении имеем

$$N_{20}=\frac{D_0\Delta_{mn}^2}{\lambda_m{}^2}\left(1-\frac{6}{m^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{\lambda_m{}^4}{3R^2H_0D_0\Delta_{mn}^4}\right)+ \tag{3.1}$$

$$+\frac{24(1-\nu)D_0}{L^2\lambda_m{}^2}\left(\frac{n}{R}\right)^2\left[1-\frac{1+\nu}{3(1-\nu)}\frac{\lambda_m{}^4}{R^2H_0D_0\Delta_{mn}^4}\right]+\eta_{1mpn}$$

$$\eta_{1mpn}=\frac{256}{\pi^2R^2H_0\Delta_{mn}^2L^2}\sum_p\frac{m^4p^2}{(m^2-p^2)^4}\left[1+\frac{\pi^2(p^2-m^2)}{L^2\Delta_{mn}}\right]\left[1-\frac{\pi^2(p^2-m^2)}{L^2\Delta_{pn}}\right]-$$

$$-\frac{48D_0L^2}{\pi^4}\sum_p\frac{p\Delta_{pn}^2}{m(m^2-p^2)^2}\left[1+\frac{\pi^2(m^2-p^2)}{L^2\Delta_{pn}}\right]\times$$

$$\times\left[1+\frac{\lambda_m{}^2\lambda_p{}^2}{3R^2H_0D_0\Delta_{pn}^2\Delta_{mn}^2}\right]\alpha_{mnp}^{(10)}$$

Рассмотрим решение второй группы уравнений (1.11). В первом приближении

$$\varphi_{01}=\sum_i\sum_n\frac{\lambda_i{}^2}{RH_0\Delta_{in}^2}B_{in}^{(01)}\sin\lambda_ix\sin\frac{ny}{R}- \tag{3.2}$$

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{n}{R}\right)^2\frac{\lambda_\mu{}^2h_0}{H_0}f_{mn}\sin\frac{ny}{R}\left[\frac{\cos(\lambda_\mu-\lambda_m)x}{\Delta_{m-\mu,\,n}^2}-\frac{\cos(\lambda_\mu+\lambda_m)x}{\Delta_{m+\mu,\,n}^2}\right]$$

$$N_{01}=-\frac{8h_0m^2}{\pi RH_0\mu(4m^2-\mu^2)}\left(\frac{n}{R}\right)^2\left(\frac{\lambda_\mu{}^2}{\Delta_{mn}^2}+\frac{1}{\lambda_m{}^2}\right)-$$

$$-\frac{2h_0m\lambda_\mu{}^2}{\pi RH_0\mu\lambda_m{}^2(4m^2-\mu^2)}\left(\frac{n}{R}\right)^2\left[\frac{(\lambda_\mu-\lambda_m)^2(2m+\mu)}{\Delta_{m-\mu,\,n}^2}+\frac{(\lambda_\mu+\lambda_m)^2(2m-\mu)}{\Delta_{m+\mu,\,n}^2}\right]$$

$$B_{in}^{(01)}=-\alpha_{mni}^{(01)}f_{mn}$$

$$\alpha_{mni}^{(01)}=\frac{2h_0i\lambda_\mu{}^2}{\pi RH_0\lambda_i{}^2(N_{0in}-N_{0mn})}\left(\frac{n}{R}\right)^2\left[\frac{(\lambda_m+\lambda_\mu)^2}{\Delta_{m+\mu,\,n}^2[i^2-(m+\mu)^2]}-\right.$$

$$-\frac{(\lambda_m-\lambda_\mu)^2}{\Delta_{m-\mu,\,n}^2[i^2-(m-\mu)^2]}+\frac{8m\mu\lambda_m{}^2}{\Delta_{mn}^2[\mu^2-(m-i)^2][\mu^2-(m+i)^2]}+$$

$$\left.+\frac{8m\mu}{\lambda_\mu{}^2[\mu^2-(m-i)^2][\mu^2-(m+i)^2]}\right]$$

Во втором приближении имеем

$$\varphi_{02}=\sum_i\sum_n\frac{\lambda_i{}^2}{RH_0\Delta_{in}^2}B_{in}^{(02)}\sin\lambda_ix\sin\frac{ny}{R}- \tag{3.3}$$

$$-\frac{\lambda_\mu{}^2h_0}{2H_0}\left(\frac{n}{R}\right)^2\sum_iB_{in}^{(01)}\sin\frac{ny}{R}\left[\frac{\cos(\lambda_\mu-\lambda_m)x}{\Delta_{\mu-i,\,n}^2}-\frac{\cos(\lambda_\mu+\lambda_m)x}{\Delta_{\mu+i,\,n}^2}\right]$$

$$N_{02}=\frac{2mh_0{}^2\lambda_\mu{}^4}{\pi RH_0\lambda_m{}^2\mu(4m^2-\mu^2)}\left(\frac{n}{R}\right)^4\left(\frac{2m+\mu}{\Delta_{m-\mu,\,n}^2}+\frac{2m-\mu}{\Delta_{m+\mu,\,n}^2}\right)-\eta_{2mni\mu}$$

$$\eta_{2mni\mu}=\frac{2\lambda_\mu{}^2h_0m}{\pi RH_0\lambda_m{}^2}\left(\frac{n}{R}\right)^2\sum_i\left[\frac{8i\lambda_i{}^2\mu}{\Delta_{in}^2[\mu^2-(m-i)^2][\mu^2-(m+i)^2]}+\right.$$

$$+\frac{8\mu i}{\lambda_\mu{}^2[\mu^2-(m-i)^2][\mu^2-(m+i)^2]}+\frac{(\lambda_m+\lambda_\mu)^2}{\Delta_{m+i,n}^2[m^2-(\mu+i)^2]}-$$

$$\left.-\frac{(\lambda_m-\lambda_\mu)^2}{\Delta_{m-n,i}^2[m^2-(\mu-i)^2]}\right]\alpha_{mni}^{(01)}$$

Здесь $m+i$ — четные числа.

Решив третью группу уравнений (1.12), найдем взаимные влияния переменности толщины и начального моментного состояния на величину критической силы.

В первом приближении находим $N_{11} = 0$, $B_{jn}^{(11)} = \alpha_{mnj}^{(11)} f_{mn}$.

Из-за громоздкости выражения значения N_{12} и N_{21} не приводятся. Таким образом, в трех приближениях ряд (1.9) принимает вид

$$N_x = N_{00} + \varepsilon N_{10} + \varepsilon^2 N_{20} + f_0 N_{01} + f^2_0 N_{02} + \varepsilon f_0 N_{11} + \varepsilon^2 f_0 N_{21} + \varepsilon f_0^2 N_{12} \tag{3.4}$$

Варьированием m и n находим наименьшее значение N_x. Остальные параметры определяются так, чтобы $m + p$ были нечетные числа, а $m + i$ — четные числа. Наибольшее влияние докритического моментного состояния имеет место при значении μ, близком к отвечающему осесимметричной форме потери устойчивости, т. е.

$$\mu = \frac{L}{\pi R}\sqrt{\frac{R}{h_0}}\sqrt[4]{12(1-\nu^2)}$$

Кроме того, влияние моментного состояния возрастает по мере приближения m к $\mu/2$. Так как μ — нечетное число, то $\mu = 2m - 1$.

Таким образом, при отыскании наименьшего значения N_x достаточно варьировать n. Число волн вдоль дуги можно принять в порядке $\sqrt{R/h_0}$.

В качестве примера рассмотрим оболочку со следующими геометрическими и физическими параметрами:

$$L/R = 2, \quad R/h_0 = 180, \quad \nu = 0.3, \quad h_{\max} = 2h_{\min}, \quad = 1/3, \quad h_0 = 1{,}5\ h_{\min}$$

В табл. 1 приведены безразмерные значения критических сил цилиндрических оболочек переменной толщины ($h_{\max} = 2h_{\min}$) в зависимости от моментности начального состояния ($\mu = 23$, $m = 12$, $n = 14$) для нулевого, первого и второго приближений $N_x^{(0)} = N_{00}^* + \varepsilon N_{10}^* + \varepsilon^2 N_{20}^*$, $N_x^{(1)} = N_x^{(0)} + f_0 N_1$, $N_x^{(2)} = N_x^{(1)} + f_0^2 N_2$, ($N_1 = N_{01}^* + \varepsilon^2 N_{21}^*$, $N_2 = N_{02}^* = \varepsilon N_{12}^*$); $N_x^* = N_x R/E h_{\min}^2$.

Таблица 1

f_0	Нулевое приближение	$f_0 N_1$	$f_0^2 N_2$	Первое приближение	Второе приближение
0.2	1.552	—0.389	0.029	1.163	1.192
0.3	1.552	—0.587	0.072	0.965	1.037
0.4	1.552	—0.776	0.119	0.766	0.885
0.5	1.552	—0.972	0.182	0.580	0.762
0.6	1.552	—1.172	0.265	0.380	0.645

Таблица 2

$\frac{h_{\max}}{h_{\min}}$	Нулевое приближение	εN_{10}^*	$\varepsilon^2 N_{20}^*$	Второе приближение
1.22	0.738	—	0.006	0.744
1.50	0.944	—	0.028	0.975
1.86	1.234	—	0.084	1.318
2.33	1.733	—	0.198	1.931
3.0	2.420	—	0.448	2.868

Таблица 3

f_0	Нулевое приближение	$f_0N^*_{01}$	$f_0^2N^*_{02}$	Первое приближение	Второе приближение
0.2	0.640	—0.171	0.012	0.469	0.481
0.3	0.640	—0.257	0.027	0.383	0.410
0.4	0.640	—0.342	0.047	0.298	0.345
0.5	0.640	—0.427	0.075	0.213	0.288
0.6	0.640	—0.513	0.110	0.127	0.237

Рассмотрим некоторые частные случаи задачи.

Цилиндрическая оболочка переменной толщины при безмоментном начальном состоянии. В этом случае, полагая в (3.4) $f_0 = 0$, получим значения верхних критических сил, которые в зависимости от отношения толщины $h_{\max}/h_{\min}$ приводятся в табл. 2 ($m = 12$, $n = 10$).

Цилиндрическая оболочка постоянной толщины при моментном начальном состоянии. В этом случае, полагая в (3.4) $\varepsilon = 0$, получим значения критических сил в зависимости от моментности начального состояния, которые приводятся в табл. 3 ($\mu = 23$, $m = 12$, $n = 14$). Толщина оболочки принята равной минимальному значению $h_{\min}$ оболочки переменной толщины ($h = h_{\min}$).

Как показывают численные примеры, разница между первыми и вторыми приближениями незначительна, если f_0 и $\varepsilon \leqslant 0.6$. Поэтому три приближения в виде (3.4) по малому параметру достигают удовлетворительного приближения в решении задач устойчивости моментного начального состояния.

Поступила 18 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. М., «Наука», 1967.
2. *Длугач М. И.*, *Степаненко А. С.* Определение верхних критических нагрузок для цилиндрических оболочек по нелинейной теории. Прикл. механ., 1970, т. 6, вып. 4.
3. *Ахунд-заде Э. М.*, *Сейфуллаев Х. К.* Об устойчивости гибких пологих оболочек переменной толщины и кривизны. В кн.: Теория оболочек и пластин. М., «Наука», 1973.
4. *Ахунд-заде Э. М.*, *Сейфуллаев Х. К.* Об устойчивости пологих коноидальных оболочек. Строительная механика и расчет сооружений, 1973, № 6.

Технический редактор *З. В. Филиппова*

Сдано в набор 23/I-1976 г. Т-03792 Подписано к печати 23/III-1976 г. Тираж 2860
Зак. 79 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 16,8

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10