

О ХАРАКТЕРЕ ОСОБЕННОСТЕЙ КОНТАКТНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПОД КОЛЬЦЕВЫМ ШТАМПОМ

Н. М. Бородачев

(Киев)

Выясняется характер особенностей нормального напряжения под кольцевым штампом при приближении к наружному и внутреннему контурам.

Развивается подход, позволяющий получать асимптотическое разложение для контактного напряжения, состоящее из одного члена (асимптотическое представление по терминологии Эрдейи). Предлагаемый метод позволяет исследовать ряд контактных задач, связанных с кольцевым штампом. Однако в данной работе рассматривается только осесимметричная контактная задача.

Обзор работ, посвященных задаче о вдавливании кольцевого штампа в упругое полупространство, приведен в [1, 2].

Вопрос о поведении решений краевых задач теории упругости в окрестности точек и линий раздела граничных условий рассматривался в работах [3-8] и др.

1. Воспользуемся цилиндрической системой координат $r\varphi z$, ось z которой перпендикулярна к границе полупространства. Пусть на границе упругого полупространства расположен кольцевой штамп с плоским основанием. На штамп действует вертикальная сила P , направленная по оси симметрии. Предполагается, что вне штампа поверхность полупространства свободна от напряжений, а силы трения между штампом и упругим полупространством отсутствуют.

В работе [9] эта задача сведена к тройным интегральным уравнениям, которые с использованием оператора Ханкеля [10]

$$S_{n,\alpha} f(x) = 2^\alpha x^{-\alpha} \int_0^\infty t^{1-\alpha} J_{2n+\alpha}(xt) f(t) dt$$

можно сокращенно записать так:

$$(1.1) \quad S_{-1/2,1} \Phi(r) = f(r), \quad S_{0,0} \Phi(r) = g(r)$$

Для функции $f(r)$ имеем

$$f(r) = \begin{cases} f_1(r), & 0 < r < a \\ f_2(r), & a < r < b \\ f_3(r), & b < r < \infty \end{cases}$$

Аналогичную формулу можно записать и для $g(r)$. В данном случае имеем (функции f_1 , f_3 и g_2 неизвестны)

$$(1.2) \quad g_1(r) = 0 \quad g_3(r) = 0, \quad f_2(r) = -2\mu\delta / [(1-\nu)r]$$

Здесь μ — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона материала полупространства, δ — глубина вдавливания штампа, a и b — внутренний и наружный радиусы кольцевого штампа.

Нормальное напряжение на площадке контакта $\sigma_z(r, 0)$ связано с функцией $\Phi(\xi)$ соотношением

$$(1.3) \quad \sigma_z(r, 0) = \int_0^\infty \xi \Phi(\xi) J_0(r\xi) d\xi$$

Найдем асимптотическое представление для $\sigma_z(r, 0)$ отдельно при $r \rightarrow a + 0$ и при $r \rightarrow b - 0$.

Сущность предлагаемого метода заключается в следующем. Если ищется асимптотическое представление при $r \rightarrow a + 0$, то сначала необходимо получить для σ_z выражение такого вида:

$$(1.4) \quad \sigma_z(r, 0) = A_1(r) \frac{d}{dr} \int_a^r F_1(r, x) \psi_1(x) dx, \quad a < r < b$$

Устремляя затем в (1.4) r к $a + 0$, находим искомое асимптотическое представление. Аналогично выражение вида

$$(1.5) \quad \sigma_z(r, 0) = A_2(r) \frac{d}{dr} \int_r^b F_2(r, x) \psi_2(x) dx, \quad a < r < b$$

позволит получить асимптотическое представление для σ_z при $r \rightarrow b - 0$.

В формулах (1.4), (1.5) A_i, F_i, ψ_i ($i = 1, 2$) — известные функции.

2. Рассмотрим сначала случай, когда $r \rightarrow a + 0$. В этом случае решение уравнений (1.1) будем искать в виде

$$(2.1) \quad \varphi = S_{1/2, -1/2} h$$

Решение такого типа, насколько известно автору, ранее не предлагалось.

Обзор методов решения уравнений типа (1.1) содержится, например, в работе [11].

Подставляя (2.1) в (1.1) получаем

$$(2.2) \quad K_{-1/2, 1/2} h = f, \quad I_{1/2, -1/2} h = g$$

Здесь $K_{\eta, \alpha}$ и $I_{\eta, \alpha}$ — операторы Эрдейи — Кобера ($\Gamma(x)$ — гамма-функция)

$$K_{\eta, \alpha} f(x) = \frac{2x^{2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_x^\infty (u^2 - x^2)^{\alpha-1} u^{-2\alpha-2\eta+1} f(u) du, \quad \alpha > 0$$

$$K_{\eta, \alpha} f(x) = -\frac{x^{2\eta-1}}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^\infty (u^2 - x^2)^\alpha u^{-2\alpha-2\eta+1} f(u) du, \quad -1 < \alpha < 0$$

$$I_{\eta, \alpha} f(x) = \frac{2x^{-2\alpha-2\eta}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x (x^2 - u^2)^{\alpha-1} u^{2\eta+1} f(u) du, \quad \alpha > 0$$

$$I_{\eta, \alpha} f(x) = \frac{x^{-2\eta-2\alpha-1}}{\Gamma(1+\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x^2 - u^2)^\alpha u^{2\eta+1} f(u) du, \quad -1 < \alpha < 0$$

При получении уравнений (2.2) были использованы соотношения [10]

$$(2.3) \quad S_{\eta+\alpha, \beta} S_{\eta, \alpha} = I_{\eta, \alpha+\beta}, \quad S_{\eta, \alpha} S_{\eta+\alpha, \beta} = K_{\eta, \alpha+\beta}$$

Решая уравнения (2.2) относительно h , находим

$$(2.4) \quad h = K_{-1/2, 1/2}^{-1} f, \quad h = I_{1/2, -1/2}^{-1} g$$

Здесь $K_{\eta, \alpha}^{-1}$ и $I_{\eta, \alpha}^{-1}$ — обратные операторы, причем [10]

$$K_{\eta, \alpha}^{-1} = K_{\eta+\alpha, -\alpha}, \quad I_{\eta, \alpha}^{-1} = I_{\eta+\alpha, -\alpha}$$

Из уравнений (2.2), (2.4) и соотношений (1.2) следует, что

$$(2.5) \quad \begin{aligned} h_1 &= 0, \quad h_2 = \left(\begin{matrix} b \\ r \end{matrix} \right) K_{-1/2, 1/2}^{-1} f_2 + \left(\begin{matrix} \infty \\ b \end{matrix} \right) K_{-1/2, 1/2}^{-1} f_3 \\ h_3 &= \left(\begin{matrix} b \\ a \end{matrix} \right) I_{1/2, -1/2}^{-1} g_2 \quad f_3 = \left(\begin{matrix} \infty \\ r \end{matrix} \right) K_{-1/2, 1/2} h_3 \\ g_2 &= \left(\begin{matrix} r \\ a \end{matrix} \right) I_{1/2, -1/2} h_2 \end{aligned}$$

Здесь буквы в скобках перед операторами указывают новые пределы интегрирования.

Подставляя четвертую формулу (2.5) во вторую, а пятую в третью, приходим к системе уравнений

$$(2.6) \quad \begin{aligned} h_2 &= \left(\begin{matrix} b \\ r \end{matrix} \right) K_{-1/2, 1/2}^{-1} f_2 + \left(\begin{matrix} \infty \\ r \end{matrix} \right) K_{-1/2, 1/2}^{-1} \left(\begin{matrix} \infty \\ b \end{matrix} \right) K_{-1/2, 1/2} h_3 \\ h_3 &= \left(\begin{matrix} b \\ a \end{matrix} \right) I_{1/2, -1/2}^{-1} \left(\begin{matrix} r \\ a \end{matrix} \right) I_{1/2, -1/2} h_2 \end{aligned}$$

Наконец, подставляя вторую формулу (2.6) в первую и совершая соответствующую

щие преобразования, получаем интегральное уравнение второго рода

$$(2.7) \quad \frac{1-x^2}{x^2} \psi(x) = 1 - \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \int_{\varepsilon}^1 K(x, y) \psi(y) dy$$

$$K(x, y) = \frac{1}{2(x^2 - y^2)} \left(\frac{1-y^2}{y} \ln \frac{1+y}{1-y} - \frac{1-x^2}{x} \ln \frac{1+x}{1-x} \right)$$

Здесь

$$(2.8) \quad \varepsilon = a/b, \quad r = bx, \quad \psi(x) = h_2^*(bx)$$

$$h_2^*(r) = -\frac{\pi^{1/2}(1-\nu)}{2\mu\delta} r^2 (b^2 - r^2)^{-1/2} h_2(r)$$

Ядро $K(x, y)$ интегрального уравнения (2.7) ограничено во всех точках квадрата $\varepsilon \leq x \leq 1$, $\varepsilon \leq y \leq 1$ за исключением точки $x = y = 1$, где оно имеет логарифмическую особенность. В окрестности точки $x = y = 1$

$$K(x, x) \approx -(1/2) \ln(1-x)$$

Интегральное уравнение (2.7) является уравнением типа Фредгольма, так как

$$\int_{\varepsilon}^1 \int_{\varepsilon}^1 K^2(x, y) dx dy < \infty$$

Далее, используя (2.8) и последнюю формулу (2.5), находим

$$g_2(r) = -\frac{2\mu\delta}{\pi(1-\nu)r} \frac{d}{dr} \int_a^r \left(\frac{b^2 - u^2}{r^2 - u^2} \right)^{1/2} h_2^*(u) du, \quad a < r < b$$

Из (1.1), (1.3) следует, что $g(r) = \sigma_z(r, 0)$. Поэтому

$$(2.9) \quad \sigma_z(r, 0) = -\frac{2\mu\delta b}{\pi(1-\nu)r} \frac{d}{dr} \int_{\varepsilon}^{r/b} \left(\frac{1-y^2}{r^2/b^2 - y^2} \right)^{1/2} \psi(y) dy, \quad a < r < b$$

Сила, действующая на штамп

$$P = -2\pi \int_a^b \sigma_z(r, 0) r dr$$

Подставляя сюда выражение для $\sigma_z(r, 0)$ из (2.9), получаем

$$(2.10) \quad \delta = \gamma \frac{P(1-\nu)}{4\mu b}, \quad \gamma^{-1} = \int_{\varepsilon}^1 \psi(y) dy$$

На основании (2.9) и (2.10) имеем окончательную формулу для определения напряжения σ_z на площадке контакта

$$(2.11) \quad \sigma_z(r, 0) = -\frac{\gamma P}{2\pi r} \frac{d}{dr} \int_{\varepsilon}^{r/b} \left(\frac{1-y^2}{r^2/b^2 - y^2} \right)^{1/2} \psi(y) dy, \quad a < r < b$$

Нетрудно получить асимптотическое представление для $\sigma_z(r, 0)$ при $r \rightarrow a + 0$. Устремляя в (2.11) r к $a + 0$, находим

$$(2.12) \quad \sigma_z(r, 0) \approx -\frac{P\omega_a(\varepsilon)}{2^{3/2}\pi b^2} \left(\frac{r}{b} - \varepsilon \right)^{-1/2}, \quad r \rightarrow a + 0$$

$$\omega_a(\varepsilon) = \gamma \varepsilon^{-3/2} (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \psi(\varepsilon)$$

Формулы (2.12) дают решение поставленной задачи при $r \rightarrow a + 0$, т. е. при приближении к внутреннему контуру штампа.

Чтобы вычислить величину $\omega_a(\varepsilon)$, необходимо знать функцию $\psi(x)$ — решение уравнения Фредгольма второго рода (2.7). Характерная особенность ядра интегрального уравнения (2.7) состоит в том, что оно не зависит от параметра $\varepsilon = a/b$.

Решение уравнения (2.7) в замкнутом виде удалось получить только для случая $\varepsilon = 0$ (т. е. для кругового штампа). В этом случае

$$\psi(x) = \pi^{-1} x (1 - x^2)^{-1/2} \ln \frac{1+x}{1-x}, \quad \varepsilon = 0$$

При других значениях ε для решения уравнения (2.7) привлекались численные методы. Интеграл, входящий в (2.7), заменялся квадратурной формулой Гаусса (с 40 узлами). Полученная система линейных алгебраических уравнений решалась с помощью ЭВМ. На основе этих вычислений был построен график изменения величины ω_a , представленный на фигуре сплошной линией.

3. Рассмотрим далее случай, когда $r \rightarrow b - 0$. Решение уравнений (1.1) теперь будем искать в виде

$$(3.1) \quad \varphi = S_{0, -1/2} t$$

Выражение (3.1) — частный случай решения, предложенного в работе [12]. Подставляя (3.1) в (1.1) получаем

$$(3.2) \quad I_{0, 1/2} t = f, \quad K_{0, -1/2} t = g$$

Дальнейшее решение выполняется аналогично п. 2. В результате приходим к следующей формуле:

$$(3.3) \quad \sigma_z(r, 0) = \frac{\gamma P}{2\pi r} \frac{d}{dr} \int_{r/b}^1 \left(\frac{y^2 - \varepsilon^2}{y^2 - r^2/b^2} \right)^{1/2} \eta(y) dy, \quad a < r < b$$

Функция $\eta(x)$ удовлетворяет интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$(3.4) \quad \frac{x^2 - \varepsilon^2}{x^2} \eta(x) = 1 - \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \int_{\varepsilon}^1 K(x, y) \eta(y) dy$$

$$K(x, y) = \frac{1}{2(x^2 - y^2)} \left(\frac{x^2 - \varepsilon^2}{x} \ln \frac{x + \varepsilon}{x - \varepsilon} - \frac{y^2 - \varepsilon^2}{y} \ln \frac{y + \varepsilon}{y - \varepsilon} \right)$$

Формулы (3.3), (3.4), совпадают с соответствующими результатами статьи [9].

Полагая в (3.3), что $r \rightarrow b - 0$, получаем асимптотическое представление нормального напряжения $\sigma_z(r, 0)$

$$(3.5) \quad \sigma_z(r, 0) \approx - \frac{P \omega_b(\varepsilon)}{2^{3/2} \pi b^2} (1 - r/b)^{-1/2}, \quad r \rightarrow b - 0$$

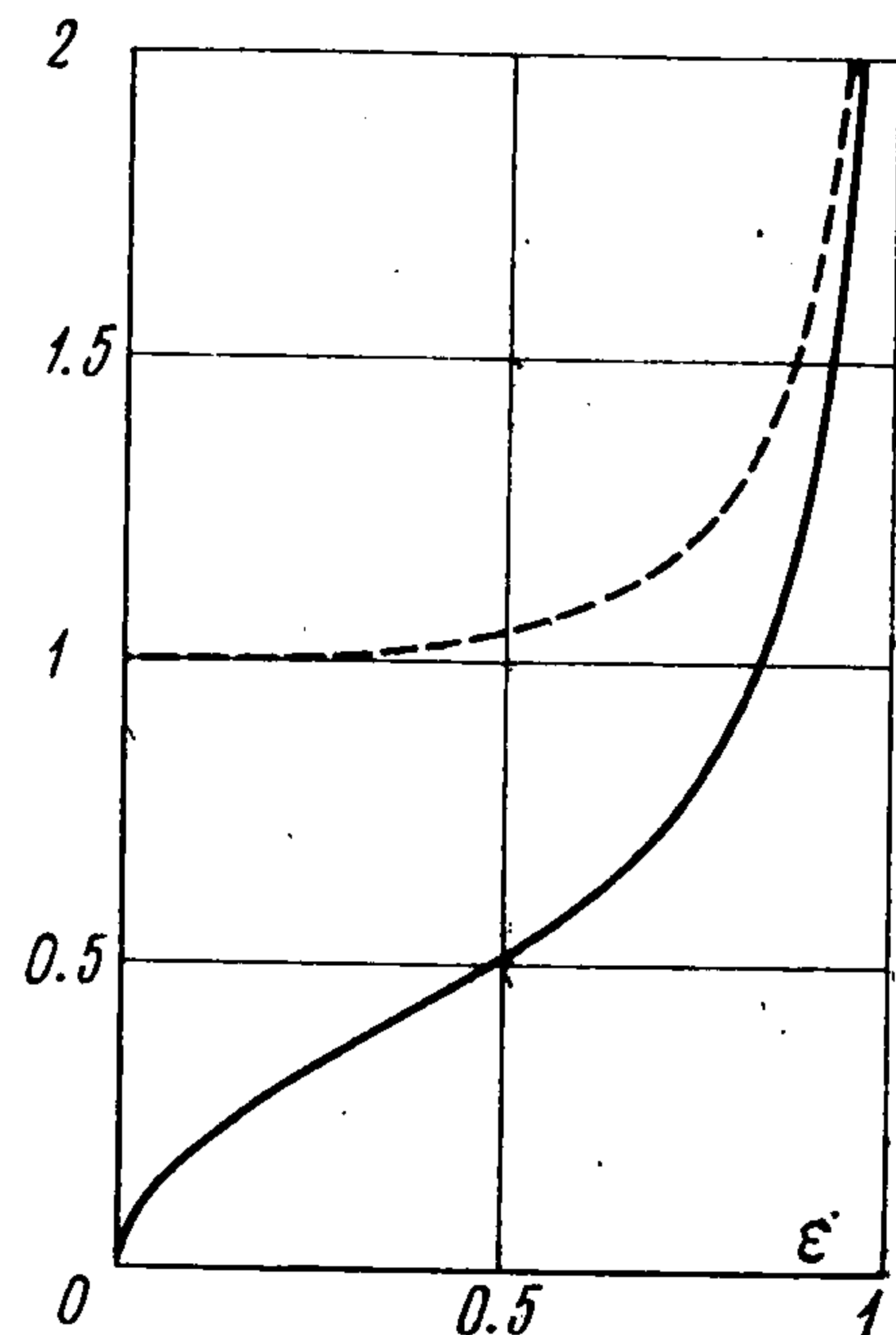
$$\omega_b(\varepsilon) = \gamma (1 - \varepsilon^2)^{1/2} \eta(1)$$

Для решения интегрального уравнения (3.4) также были применены численные методы. В результате построен график изменения величины ω_b в зависимости от ε , представленный на фигуре пунктиром.

Формулы (2.12) и (3.5) устанавливают характер особенности нормального напряжения σ_z под кольцевым штампом при приближении к внутреннему и наружному контурам соответственно.

Автор благодарит Л. А. Галина за ряд ценных замечаний.

Поступила 13 V 1975



ЛИТЕРАТУРА

1. Каландия А. И., Лурье А. И., Манджавидзе Г. Ф., Прокопов В. К., Уфлянд Я. С. Линейная теория упругости. В кн.: Механика в СССР за 50 лет, т. 3. М., «Наука», 1972.
2. Губенко В. С., Улитко А. Ф. Смешанные задачи теории упругости для полупространства и слоя с несколькими круговыми линиями раздела краевых условий. В сб.: Контактные задачи и их инженерные приложения. М., НИИМАШ, 1969.
3. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Барчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости. Изд-во Тбилисск. ун-та, 1968.
4. Реачев В. Л. О давлении на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму клина. ПММ, 1959, т. 23, вып. 1.
5. Ворovich И. И. О поведении решений основных краевых задач плоской теории упругости в окрестности особых точек границы. Материалы 3-го Всес. съезда по теор. и прикл. механике. М., «Наука», 1968.
6. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
7. Benthem J. P. A Laplace transforms method for the solution of semi-infinite and finite strip problems in stress analysis. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1963, vol. 16, No. 4.
8. Williams M. L. On the stress distribution at the base of a stationary crack. J. Appl. Mech., 1957, vol. 24, No. 1.
9. Бородачев Н. М., Бородачева Ф. Н. Вдавливание кольцевого штампа в упругое полупространство. Инж. ж. МТТ, 1966, № 4.
10. Sneddon I. N. Dual equations in elasticity. В кн.: Приложения теории функций в механике сплошной среды, т. 1. М., «Наука», 1965.
11. Cooke J. C. The solution of triple integral equations in operational form. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1965, vol. 18, pt 1.
12. Sneddon I. N. Fractional integration and dual integral equations. North Carolina State Colledge, PSR-6, 1962.

УДК 539.3

УСТОЙЧИВОСТЬ КРУГОВЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ПРИ МОМЕНТНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ

Х. К. Сейфуллаев

(Баку)

Рассматривается задача устойчивости при осевом сжатии круговых цилиндрических оболочек переменной толщины с учетом моментности исходного докритического состояния.

Начальные моментные состояния равновесия оболочек переменной толщины описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, а затем на основании работ [1, 2] получена линеаризованная система дифференциальных уравнений устойчивости с переменными коэффициентами. Переменные коэффициенты отражают влияние начального моментного состояния и переменности толщины оболочки. Нелинейные уравнения докритического состояния решаются методом малого параметра при осесимметричной начальной форме равновесия. Применением метода малого параметра к линеаризованной системе уравнений устойчивости строится итерационный процесс для определения критических сил. Задача решается в трех приближениях по малым параметрам.

1. Нелинейные уравнения докритического состояния цилиндрических оболочек переменной толщины имеют вид [3]