$$
\eta = \frac{Q\delta_1}{\pi R^5}\left\{18 + \frac{\delta_2}{(\pi\gamma)^{1/2}} \sum_{n=0}^{N} \frac{4n^2+8n+15}{(2n-5)\,n!}\,[(2n+1)!!]^2 \frac{1}{\varkappa^n}\right\} + \tag{5.2}
$$

$$
+ \frac{Q}{\pi T^4}\left[6 + O\left(\frac{1}{T^{3/2}}\right)\right]
$$

$$
T \to \infty, \quad \varkappa \to \infty, \quad \gamma \to \infty; \quad \delta_1 = 1, \quad T^6\varkappa^{-5} \to \infty; \quad \delta_1 = 0
$$

$$
T^6\varkappa^{-5} \leqslant c_0 < \infty
$$

$$
\delta_2 = 1, \quad T\varkappa^{-1} \to \infty; \quad \delta_2 = 0, \quad T\varkappa^{-1} \leqslant c_0 < \infty, \quad T^{3/2}\varkappa^{-(N+3/2)} \to \infty
$$

$$
T^{3/2}\varkappa^{-(N+5/2)} \leqslant c_0 < \infty
$$

Здесь Q — безразмерный объем поднятой жидкости, R — безразмерное расстояние от начала координат $R = rg^{1/3}\nu^{-2/3}$, η и T определены в (4.8).

Сравнение формул (4.9), (4.10) и (5.1), (5.2) показывает, что в пространственном случае возвышение свободной поверхности затухает со временем быстрее, чем в плоском. Кроме того, отметим, что если и в пространственном случае построить интеграл, аналогичный интегралу Л. Н. Сретенского, то он с точностью до бесконечно малых будет отражать поведение возвышения свободной поверхности в рассматриваемой задаче, если

$$
T^{11}R^{-10} = t^{11}\nu^3 g^4 r^{-10} = (\nu t/r^2)^3\,(gt^2/r)^4 \to 0
$$

Поступила 9 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* О волнах на поверхности вязкой жидкости. Тр. ЦАГИ, 1941, № 541.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
3. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций, т. 2. Изд. 2. М., «Наука», 1968.
4. *Miles J. W.* The Cauchy-Poisson problem for a viscous liquid. J. Fluid. Mech., 1968, vol. 34, pt 2, p. 359—372.
5. *Потетюнко Э. Н., Срубщик Л. С.* Асимптотический анализ волновых движений вязкой жидкости со свободной границей. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
6. *Потетюнко Э. Н., Срубщик Л. С., Царюк Л. Б.* О применении метода стационарной фазы в некоторых работах по теории волн на поверхности вязкой жидкости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 5. М., «Наука», 1971.

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ РЕГУЛЯРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ К РЕШЕНИЮ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

П. И. Перлин

(Москва)

Предлагается регулярное представление для сингулярных интегралов, присутствующих в интегральных уравнениях второй основной задачи теории упругости. Это представление используется для реализации метода последовательных приближений при решении внутренней и внешней задачи. Обсуждаются вопросы построения расчетной схемы.

Использование аппарата теории потенциала позволяет свести рассмотрение основных краевых задач теории упругости к интегральным уравнениям [1]. Для решения второй основной задачи Вейль построил регулярные интегральные уравнения второго рода, обладающие, вообще говоря, собственными функциями. Поэтому их решение может быть осуществлено лишь после определения всех собственных функций союзного уравнения, что представляет собой сложную задачу.

Применение обобщенного упругого потенциала простого слоя также сводит указанную краевую задачу к интегральным уравнениям второго рода. Правда, эти уравнения не являются уравнениями Фредгольма в классическом виде, поскольку их ядра имеют полярность второго порядка, и соответствующие интегралы следует понимать в смысле главного значения. В силу этого сами уравнения называются сингулярными. Указанные уравнения обладают весьма благоприятными спектральными свойствами. В случае внешней задачи (обозначим ее через T_a) уравнение разрешимо при произвольной правой части. В случае внутренней задачи (T_i) уравнение разрешимо, когда правая часть удовлетворяет определенным условиям, но они совпадают с условиями существования решения исходной задачи теории упругости (равенство нулю главного вектора и главного вектор-момента внешних сил) и полагаются поэтому выполняющимися по постановке задачи.

Каждый из методов решения интегральных уравнений исходит из возможности вычисления интегральных членов при каком-либо представлении искомой плотности. Связанные с этим трудности усугубляются при решении сингулярных интегральных уравнений, особенно неодномерных.

Вопросы реализации метода механических квадратур применительно к сингулярным интегральным уравнениям основных пространственных задач теории упругости рассматривались в работах [2–4].

Ниже дается представление для сингулярных интегралов, присутствующих в уравнениях второй основной задачи теории упругости, которое не содержит в явном виде сингулярных членов, что снимает отмеченные выше трудности при их вычислении.

Представим сингулярное уравнение второй основной задачи в виде

$$\varphi(p) - \lambda I = f(p), \quad I = \int_S \Gamma_1(p, q)\, \varphi(q)\, dS_q \tag{1}$$

Значению $\lambda = 1$ соответствует задача T_a, значению $\lambda = -1$ — задача T_i. Матрица $\Gamma_1(p, q)$ получена в результате воздействия оператором напряжений на тензор Кельвина — Сомильяна, S — поверхность, ограничивающая рассматриваемое тело и являющаяся поверхностью Ляпунова, функция $f(p)$ совпадает с краевыми значениями вектора напряжений в задаче T_i и равна им, но с обратным знаком в задаче T_a. Эта функция должна принадлежать классу Гельдера — Липшица.

Доказано [5], что альтернативы Фредгольма справедливы для сингулярного интегрального уравнения (1). Из теорем единственности решения основных задач теории упругости и альтернатив Фредгольма [6] следует, что уравнение (1) (рассматриваемое в комплексной плоскости λ) имеет только вещественные собственные числа, по модулю не меньшие единицы. Число $\lambda = 1$ не есть собственное число. В силу этого задача T_a оказывается всегда разрешимой. Число $\lambda = -1$ является собственным числом. Поскольку собственные функции союзного уравнения соответствуют смещению упругого тела как жесткого целого, то условия разрешимости уравнения (1) в этом случае совпадают с условиями существования решения рассматриваемой адачи теории упругости и поэтому считаются выполненными.

Преобразуем сингулярный интеграл в уравнениях (1) так:

$$I = -\varphi(p) + \int_S \{\Gamma_1(p, q)\, \varphi(q) - \Gamma_2(p, q)\, \varphi(p)\}\, dS_q \tag{2}$$

$$\int_S \Gamma_2(p, q)\, dS_q = -E$$

(матрица $\Gamma_2(p, q)$ — ядро потенциала двойного слоя, E — единичная матрица). Рассмотрим полученный выше интеграл. В матрицах $\Gamma_1(p, q)$ и $\Gamma_2(p, q)$ сингулярные члены совпадают, а функция $\varphi(p)$ принадлежит классу Гельдера — Липшица (как решение уравнения (1) при сформулированных ограничениях на поверхность и правую часть [7]). Поэтому указанный интеграл несобственный.

Используя тождество (2), можно получить регулярное представление самих интегральных уравнений (1) и применить для их решения известные методы. Применение метода механических квадратур не представляется целесообразным, поскольку даже при достаточно гладких поверхностях и плавно меняющейся нагрузке потребуется решать линейные системы весьма высокого порядка. Кроме того, останется открытым вопрос о сходимости приближенных решений к точному.

Обратимся к методу последовательных приближений, применение которого для решения сингулярных интегральных уравнений теории упругости рассмотрено в [8]. Решение разыскивается в виде ряда

$$\varphi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Psi_n(p) \tag{3}$$

подставляя который в уравнение (1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ, придем к рекуррентным соотношениям

$$\Psi_n(p) = \int_S \Gamma_1(p, q)\, \Psi_{n-1}(q)\, dS_q, \quad n = 1, 2, \ldots, \quad \Psi_0(p) = f(p) \tag{4}$$

Наличие регулярного представления (2) позволяет вычислять члены ряда (3) с произвольной точностью.

Рассмотрим вопрос о сходимости ряда (3) в задачах T_a и T_i. Отметим, что спектральные свойства уравнения (1) и уравнения задачи Неймана (для уравнения Лапласа) в основном совпадают. Сходимость метода последовательных приближений в последнем случае исследовалась в [9]. Полученные результаты были распространены [8] на интегральные уравнения теории упругости.

В случае задачи T_a ряд (3), вообще говоря, расходится, поскольку соответствующее значение λ расположено на круге сходимости резольвенты. Сходящееся представление решения имеет вид

$$\varphi(p) = \frac{1}{2}\Psi_0(p) + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} [\Psi_{n+1}(p) + \Psi_n(p)]$$

Возможны и иные сходящиеся представления, получаемые посредством аналитического продолжения по параметру λ [10].

Рассмотрим задачу T_i. Изложим доказательство сходимости ряда (3), следуя комментарию к работе [8], приведенному в [7].

Напомним выражение резольвенты уравнения (1)

$$R(p, q, \lambda) = \frac{1}{1+\lambda}\left[\sum_{k=1}^{6} b^k(p) * \chi^k(q)\right] + A(p, q, \lambda) \tag{5}$$

Здесь $A(p, q, \lambda)$ — матрица, голоморфная по λ в круге радиуса, большего единицы, $b^k(p)$ и $\chi^k(p)$ ($k = 1, 2, \ldots, 6$) — биортонормированные системы собственных функций исходного уравнения и союзного ему.

Посредством резольвенты (5) решение уравнения (1) представляется в виде

$$\varphi(p) = f(p) + \lambda \int_S A(p, q, \lambda)\, f(q)\, dS_q \tag{6}$$

Член, соответствующий первому слагаемому, отсутствует из-за выполнения условий ортогональности правой части всем функциям $\chi^k(q)$

$$\int_S f(q)\, \chi^k(q)\, dS_q = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 6 \tag{7}$$

Таким образом, искомая функция $\varphi(p)$ оказывается представленной в виде выражения, голоморфного по λ в круге радиуса, большего единицы, а именно это выражение и строится рядом (3). Следовательно, ряд должен сходиться при $\lambda = -1$, несмотря на наличие полюса резольвенты.

Отметим, что при выполнении условий (7) ряд (3) оказывается сходящимся и для задачи T_a.

Необходимо отметить, что используемый выше результат Пфам Тхе Лая (и равным образом доказательство Н. М. Гюнтера в случае внешней задачи Неймана) является справедливым лишь при точном вычислении интегралов на каждой итерации. Поскольку реализация рекуррентных соотношений (4) может осуществляться лишь с погрешностью, следует выяснить ее влияние на факт сходимости алгоритма.

Вопрос о решении интегральных уравнений второго рода (на спектре) методом последовательных приближений рассматривается в работе [11] с позиции теории некорректных задач. Полагалось, что все вычисления проводятся абсолютно точно, но правая часть уравнения задавалась с некоторой погрешностью (δ). Было доказано, что процесс сходится, если произведение

$$n\delta^2 \to 0 \tag{8}$$

(где n — число итераций).

Применительно к разбираемому вопросу погрешность правой части можно трактовать как погрешность квадратурных формул. Поэтому при фиксированном разбиении поверхности на элементарные многоугольники нельзя удерживать в (3) (согласно (8)) произвольно большое число членов. Вместо построения аналога условия (8) можно предложить эквивалентный алгоритм: для фиксированного числа итераций проводятся расчеты с последовательным уменьшением размеров элементарных областей, обеспечивающим достижение наперед заданной точности для конечной суммы (3). При увеличении же числа членов ряда необходимо надлежащим образом ввести еще более мелкое разбиение. Реализация предлагаемого алгоритма сопряжена с проведением большого объема расчетов.

Остановимся на другом (более эффективном) алгоритме. Напомним, что Пфам Тхе Лай доказал свою теорему, исходя из того, что каждая функция $\Psi_n(p)$ ортогональна всем функциям $\chi^k(p)$. Воспользуемся этим обстоятельством для соответствующей корректировки при вычислении функций $\Psi_n(p)$. Первоначально заменим в уравнении (при $\lambda = -1$) правую часть

$$f^*(p) = f(p) - \sum_{k=1}^{6} \chi^k(p) \int_S f(q)\,\chi^k(q)\,dS_q \tag{9}$$

Полагаем, что функции $\chi^k(p)$ развиты в ортонормированном виде.)

При точном вычислении дополнительных слагаемых они должны обращаться в нуль из условий (7). При вычислении их по той или иной квадратурной формуле получаются некоторые, вообще говоря, малые добавки. Функция $f^*(p)$ (в отличие от $f(p)$) является строго ортогональной каждой из функций $\chi^k(p)$ (в рамках применяемой квадратурной формулы, если и ортонормирование функций $\chi^k(p)$ осуществлялось посредством той же формулы).

Для того чтобы любая из итераций была строго ортогональна к функциям $\chi^k(p)$ нужно каждый раз осуществлять преобразование, аналогичное (9) и имеющее вид

$$\Psi_n^*(p) = \Psi_n(p) - \sum_{k=1}^{6} \chi^k(p) \int_S \Psi_n(q)\,\chi^k(q)\,dS_q \tag{10}$$

В приведенных рассуждениях под функциями $\chi^k(p)$ следует понимать, вообще говоря, собственные функции союзного приближенного уравнения, возникающего в ходе реализации расчетной схемы.

Если форма поверхности и нагружение таковы, что имеются три плоскости симметрии, а дискретизация осуществлена соответственно симметричным образом, то все добавки обращаются в нуль автоматически.

Опишем одну из возможных схем реализации предлагаемого алгоритма решения интегрального уравнения (1).

Разобьем поверхность S на малые многоугольники, вершины которых назовем узловыми точками и обозначим через q_j. Выберем в каждом многоугольнике по расположенной в центральной части точке, например в центре тяжести. Назовем их опорными и обозначим через p_i.

Первоначально определим во всех опорных и узловых точках значения функции $\Psi_0(p)$, приравняв их правым частям уравнения. Далее, найдем в опорных точках функцию $\Psi_1(p)$, используя в регулярном представлении (2) при вычислении несобственного интеграла какую-либо квадратурную формулу, полагая, например, слагаемое интегральной суммы равным произведению среднего по соответствующим узловым точкам значения выражения

$$\Gamma_1(p_i, q_j)\,\Psi_0(q_j) - \Gamma_2(p_i, q_j)\,\Psi_0(p_i)$$

на площадь многоугольника. Значения $\Psi_1(p)$ в узловых точках определим интерполированием, исходя из значений функций $\Psi_1(p)$ в ближайших опорных точках. Дальнейшие построения очевидны.

Для определения эффективности предлагаемого подхода были рассмотрены внешняя и внутренняя задача теории упругости для сферы. В обоих случаях нагружение сводилось к гидростатическому давлению (из-за простоты определения точного значения искомой плотности [12]). Положим давление единичным. Тогда точные значения плотности (по модулю) оказываются равными $\Phi_i = {}^3/_2(1-\nu)/(1+\nu)$ и $\Phi_a = -{}^2/_3(1-\nu)/(1-2\nu)$ (ν — коэффициент Пуассона).

Разбиение поверхности сферы осуществим введением географической системы координат ($-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$, $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$), разбив по углу φ на n равных частях, а по углу θ — на m частей. Координаты опорных точек задавались формулами

$$\varphi_i = (2i/(n-1))\,\pi, \quad i = 0, 1, \ldots, n; \quad \theta_j = (j/m - {}^1/_2)\,\pi$$
$$j = 0, 1, \ldots, m$$

Ниже приведены результаты расчетов для функций Ψ_n, Φ_a и Φ_i (при удержании пяти членов) в точках полюса (A) и экватора (B). Числа n и m принимались равными

	Ψ_0	Ψ_1	Ψ_2	Ψ_3	Ψ_4	Φ_a	Φ_i
A	1.000	0.247	0.063	0.015	0.004	−1.329	0.804
B	1.000	0.269	0.064	0.016	0.004	−1.353	0.784

восьми. Коэффициент Пуассона полагался равным 0.3. Отметим, что в этом случае точное значение Φ_a равно — 1.3125, а Φ_i — 0,807 (независимо, естественно, от положения точки).

Основные положения работы в кратком виде опубликованы в тезисах [1].

Поступила 29 I 1974

[1] П е р л и н П. И. Об одном методе вычисления сингулярных интегралов и его применении к решению сингулярных интегральных уравнений пространственной задачи теории упругости. Всес. школа по теоретическим исследованиям методом механики сплошных сред. Тезисы докладов, 1973.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Купрадзе В. Д.* Граничные задачи теории установившихся упругих колебаний. Успехи матем. наук, 1953, т. 8, вып. 3 (53).
2. *Cruse T. A.* Nemerical solutions in three dimensional elastostatics. Internat. J. Solids and Structures, 1969, vol. 5, No. 12.
3. *Cruse T. N.* Some classical elastic sphere problems solved numerically by integral equations. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1972, vol. 39, No. 1. (Рус. перев.: Прикл. механ. Тр. Америк. об-ва инж-механ. Сер. Е, 1972, т. 39, № 1.)
4. *Александров А. Я.* Решение основных трехмерных задач теории упругости путем численной реализации метода интегральных уравнений. Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 2.
5. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
6. *Купрадзе В. Д.* Методы потенциала в теории упругости. М., Физматгиз, 1963.
7. *Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В.* Трехмерные задачи математической теории упругости. Изд-во Тбилисск. ун-та, 1968.
8. *Pham the Lai.* Potentiels élastiques; tenseur de Creen et de Neumann. J. Mecanique, 1967, t. 6, № 2.
9. *Гюнтер Н. М.* Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М., Гостехиздат, 1953.
10. *Канторович Л. В., Крылов В. Н.* Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.
11. *Алиев Б.* Регуляризующие алгоритмы для нахождения устойчивого нормального решения уравнения второго рода на спектре. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1970, т. 10, № 3.
12. *Перлин П. И.* Решение первой основной задачи теории упругости для области, ограниченной эллипсоидом и сферой. Инж. ж., 1964, т. 4, вып. 2.