УДК 532.593

О ХАРАКТЕРЕ ЗАТУХАНИЯ ВОЗВЫШЕНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ВЫЗВАННОГО ЕЕ НАЧАЛЬНЫМ ВОЗМУЩЕНИЕМ

Э. Н. Потетюнко, Л. Д. Филимонова

(Ростов-на-Дону)

На основании линеаризованных уравнений Навье — Стокса строится асимптотика при больших временах решения задачи Коши — Пуассона о волнах на поверхности вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины, вызванных начальным возмущением свободной поверхности, сконцентрированным в точке. Методом последовательных интегральных преобразований решение представляется в интегральной форме. Затем находятся особые точки подынтегральных функций, и при больших временах асимптотически вычисляется вклад этих точек в значение интегралов. В частности, найдены границы применимости интеграла Л. Н. Сретенского в качестве решения рассматриваемой задачи при упрощенном способе описания волн [1].

1. В линейной постановке рассматривается задача о волнах на поверхности вязкой несжимаемой жидкости бесконечной глубины, вызванных начальным возвышением свободной поверхности

$$\partial \mathbf{v}/\partial t = -\rho^{-1}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v}, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad p = p_1 + \rho g z \tag{1.1}$$

$$\zeta = \zeta_*, \quad \mathbf{v} = 0, \quad t = 0$$

$$-p + \rho g\zeta + 2\rho\nu\partial v_z/\partial z = 0, \quad \partial\zeta/\partial t = v_z \quad z = 0$$

$$\partial v_x/\partial z + \partial v_z/\partial x = 0, \quad \partial v_y/\partial z + \partial v_z/\partial y = 0$$

$$\mathbf{v} \to 0, \quad p \to 0 \quad x^2 + y^2 + z^2 \to \infty; \quad \partial\mathbf{v}/\partial x \to 0$$

$$d\mathbf{v}/dy \to 0 \quad x^2 + y^2 \to \infty$$

Начало координат взято на невозмущенной поверхности, ось Oz направлена вертикально вверх.

2. Рассмотрим случай плоского движения, вызванного сконцентрированным в начале координат начальным возвышением свободной поверхности. Будем считать

$$\zeta_* = \lim_{b\to 0}\frac{S}{\pi}\frac{b}{b^2+x^2}, \quad b>0; \quad v_y \equiv 0, \quad \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial y}\equiv 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y}\equiv 0$$

Здесь S — площадь поднятой жидкости. Применив к (1.1) интегральные преобразования Фурье по x и Лапласа по t, найдем

$$\zeta = \lim_{b\to 0}\frac{S}{\pi}\int_0^\infty e^{-\xi b}\,X(t,\xi)\cos\xi x\,d\xi \tag{2.1}$$

$$X(t,\xi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{s_0-i\infty}^{s_0+i\infty}\left[1-\frac{1}{\lambda\Delta(s)}\right]e^{\nu\xi^2 ts}\frac{ds}{s} \tag{2.2}$$

$$s_0 > -1, \quad s_0 > \operatorname{Re} s_j, \quad \Delta(s_j) = 0$$

$$\Delta(s) = (s+2)^2 - 4(s+1)^{1/2} + \lambda^{-1}, \quad \operatorname{Re}(s+1)^{1/2} > 0, \quad \lambda = \nu^2\xi^3 g^{-1}$$

3. Известно [2] (§ 349, стр. 789), что уравнение $\Delta(s) = 0$ имеет два корня $s_{1,2}$, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re}(s+1)^{1/2} > 0$. Эти корни комплексно сопряжены при $\lambda < \lambda_*$ и отрицательны при $\lambda > \lambda_*$ (см. [1]). Значение λ_* определяется из условия кратности корня s, или, что то же самое, из условия двукратности корня b уравнения

$$(b^2+1)^2 - 4b + \lambda^{-1} = 0, \quad b = (s+1)^{1/2} \tag{3.1}$$

Это условие дает систему для определения λ_*

$$b_*(b_*^2+1) - 1 = 0, \quad (b_*^2+1)^2 - 4b_* + \lambda_*^{-1} = 0 \tag{3.2}$$

Согласно теореме о корнях алгебраического уравнения (см. [3], 6.3, § 6, гл. 8), корни уравнения (3.1) представимы в виде

$$\lambda^{-1/4}\sum_{k=0}^{\infty} A_k\lambda^{1/4 k},\quad \text{если } |\lambda|<\lambda_*$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k\lambda^{-k},\quad \text{если } |\lambda|>\lambda_*$$

Подставив ряды в уравнение (3.1) и собрав коэффициенты при одинаковых степенях λ, определим A_k, B_k. Учитывая условие $\operatorname{Re}(s+1)^{1/2}>0$, находим соответствующие представления для s_j $(j=1,2)$ в виде сходящихся рядов

$$s_j=\lambda^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty} a_{kj}\lambda^{1/4 k},\quad |\lambda|<\lambda_*;\qquad s_j=\sum_{k=0}^{\infty} c_{kj}\lambda^{-k},\quad |\lambda|>\lambda_* \tag{3.3}$$

$$a_{0j}=i\delta_j,\ a_{1j}=0,\ a_{2j}=-2,\ a_{3j}=2\exp\left(\frac{-\pi i}{4}\delta_j\right),\ \ldots;\ \delta_{1,2}=\pm 1$$

$$c_{01}=0,\quad c_{11}=-1/2,\quad c_{21}=-3/16,\ \ldots;\ c_{02}\approx-0.9126;\ \ldots$$

Для вычисления интеграла $X(t,\xi)$, как и в работе [4], сделаем разрез вдоль отрицательной действительной оси от $-\infty$ до -1, положив на верхней и нижней сторонах разреза

$$s=1+u^2\pm i0,\qquad (s+1)^{1/2}=\pm iu$$

Использовав теорему Коши о вычетах и предыдущую замену, из (2.2) имеем

$$X(t,\xi)=\Phi(t,\xi)+\Psi(t,\xi);\ \Phi(t,\xi)=-\frac{8e^{-\nu\xi^2 t}}{\lambda\pi}\int_0^{\infty}\frac{e^{-\nu\xi^2 tu^2}}{\Delta_0(u)}\,\frac{u^2}{1+u^2}\,du \tag{3.4}$$

$$\Delta_0(u)=[(1-u^2)^2+\lambda^{-1}]^2+16u^2;\qquad \Psi(t,\xi)=f_0(t,\xi)=-\lambda^{-1}\operatorname{Re} f(s_1)$$

$$|\lambda|<\lambda_*$$

$$f(s)=s^{-1}(s+1)^{1/2}[(s+2)(s+1)^{1/2}-1]^{-1}\exp(\nu\xi^2 ts)$$

$$\Psi(t,\xi)=\sum_{j=1}^{2} f_j(t,\xi),\ f_j(t,\xi)=-(2\lambda)^{-1}f(s_j),\ |\lambda|>\lambda_*$$

Входящие в (3.4) значения $s_{1,2}$ при $|\lambda|>\lambda_*$ и s_1 при $|\lambda|<\lambda_*$ определены в (3.3).

Для вычисления ζ разобьем промежуток интегрирования по ξ в (2.1) на три части: $[0,\xi_1]$, $[\xi_1,\xi_2]$, $[\xi_2,\infty)$; $\xi_1<\xi_*$, $\xi_2>\xi_*$, $\xi_*=g^{1/3}\nu^{-2/3}\lambda_*^{1/3}$. Тогда

$$\zeta=J_1+J_2+J_3+J_4+J_5 \tag{3.5}$$

$$J_1=\frac{S}{\pi}\int_0^{\xi_1} f_0(t,\xi)\cos\xi x\,d\xi,\quad J_2=\frac{S}{\pi}\int_0^{\infty}\Phi(t,\xi)\cos\xi x\,d\xi$$

$$J_3=\lim_{b\to 0}\frac{S}{\pi}\int_{\xi_2}^{\infty} e^{-\xi b} f_1(t,\xi)\cos\xi x\,d\xi,\quad J_4=\frac{S}{\pi}\int_{\xi_2}^{\infty} f_2(t,\xi)\cos\xi x\,d\xi \tag{3.6}$$

$$J_5=\frac{S}{\pi}\int_{\xi_1}^{\xi_2} X(t,\xi)\cos\xi x\,d\xi$$

В интегралах (3.6) функции $f_0, f_{1,2}$ и Φ определены соответствующими выражениями (3.4), а функция $X(t,\xi)$ — выражением (2.2).

4. Изучим поведение ζ при $T=tg^{2/3}\nu^{-1/3}\to\infty$. Ограничимся случаем

$$\gamma=\nu g^2 t^5 x^{-4}=T^5X^{-4}\to\infty,\quad X\neq 0;\quad X=xg^{1/3}\nu^{-2/3}$$

В случае $\gamma \to 0$ различные асимптотики для рассматриваемой задачи построены в работе [5].

Асимптотическое поведение при $T \to \infty$ интегралов вида J_1 изучено в работе [6]. В предположениях $T \to \infty$, $\gamma \to \infty$ $\omega = gt^2/|x| = T^2/|X| \to \infty$ соответствующим интегрированием по частям для J_1 получаем

$$J_1 = \frac{S}{\pi g t^2}\left\{-2 + \frac{120}{\omega^2} - \frac{945 \cdot 2^5}{\omega^4} + O\left(\frac{1}{\omega^6}\right) + \frac{576}{T^3}\left[1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right) + O\left(\frac{1}{T^{3/4}}\right)\right]\right\} \tag{4.1}$$

Здесь и в дальнейшем $O(m) = cm$, $c = \mathrm{const}$.

Для вычисления интеграла J_2 воспользуемся тождеством в (4.2). Первое слагаемое в интеграле J_2 вычисляем, пользуясь формулами 3.466_2, $3{,}952_4$, 6.315_3 из таблиц [7]. Второе слагаемое оцениваем по модулю. Имеем

$$J_2 = -\frac{S}{\pi g t^2}\left\{\left[1 + \frac{6}{\varkappa} + \frac{24}{\varkappa^2}\right]e^{-1/4\varkappa} - \frac{24}{\varkappa^2}\right\} + R$$

$$\varkappa = \frac{x^2}{\nu t}, \quad |R| \leqslant \frac{S g^{1/3}}{\pi^{3/2}\nu^{2/3}}\left(\frac{15}{T^{7/2}} + \frac{63\sqrt{\pi}}{T^5}\right)$$

$$\Delta_0^{-1} \equiv \lambda^2 - F(u, \lambda), \quad F(u, \lambda) = [2\lambda(1-u^2)^2 + \lambda^2(1-u^2)^4 + 16\lambda^2 u^2]\,\Delta_0^{-1}$$

Отсюда при $T \to \infty$ имеем

$$J_2 = \frac{S}{\pi g t^2}\left[\frac{24}{\varkappa^2}\delta + O\left(\frac{1}{T^{3/2}}\right)\right] \tag{4.2}$$

$$\varkappa \to \infty;\ \delta = 1,\ \varkappa^{-2}T^{3/2} \to \infty;\ \delta = 0,\ \varkappa^{-2}T^{3/2} \leqslant c_0 < \infty$$

$$J_2 = -\frac{S}{2\pi g t^2}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+2)\,n!}\left(-\frac{\varkappa}{4}\right)^n + O\left(\frac{1}{T^{3/2}}\right)\right]$$

$$\varkappa \to 0,\ x \neq 0,\ \varkappa^N T^{3/2} \to \infty,\ \varkappa^{N+1}T^{3/2} \leqslant c_0 < \infty$$

При вычислении J_3 в разложении для f_1 ограничимся лишь первым членом ряда

$$J_3 \sim \lim_{b \to 0}\frac{S}{\pi}\int_{\xi_2}^{\infty}\exp(-\xi b)\cos\xi x\exp\left(-\frac{gt}{2\nu\xi}\right)d\xi|$$

Продолжим промежуток интегрирования до нуля и вычтем соответствующий интеграл. Значение первого находим по формуле 3.324_1 из таблиц [7], второй оцениваем. Имеем

$$J_3 \sim \frac{S}{\pi|X|}\,\mathrm{Re}\,\{i\alpha K_1(\alpha)\} + R, \quad \alpha = [2T|X|]^{1/2}\exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right) \tag{4.3}$$

$$|R| \leqslant \frac{S g^{1/3}}{\pi\nu^{2/3}}\,c\exp\left(-\frac{T}{2c}\right), \quad 1.19813 < c \leqslant c_0 < \infty$$

Здесь K_1 — функция Бесселя мнимого аргумента. Воспользовавшись ее асимптотическим разложением ([7], $8{,}451_6$), видим, что J_3 имеет экспоненциальный характер убывания по T при $x \neq 0$, $T \to \infty$. Учет следующих членов в разложении f_1 не вносит существующих изменений в поведение интеграла J_3 при $T \to \infty$.

Интеграл J_4 оцениваем по модулю

$$|J_4| \leqslant S g^{1/3}\nu^{-2/3}T^{-1/2}e^{-c_1 T}C, \quad C = \mathrm{const}, \quad c_1 = (1 - b_*^2)/4 \tag{4.4}$$

Здесь b_* — корень первого уравнения системы (3.2).

Для оценки интеграла J_5 сначала оценим функцию $X(t, \xi)$. В интеграле (2.2) сделаем замену переменной интегрирования, положив $s = s_0 + iv$. Поскольку $\xi_1 \leqslant \xi \leqslant \xi_2$, то все особые точки подынтегральной функции в (2.2) лежат левее прямой

$$s = \min\{\mathrm{Re}\, s_j(\lambda_1),\ s_j(\lambda_2)\}, \quad \lambda_j = \nu^2\xi^3{}_j g^{-1}, \quad j = 1,2$$

Поэтому в (2.2) можно положить $s_0 = -(4\lambda)^{-1}$. Проинтегрировав в (2.2) один раз по частям, полагая $\exp(i\xi^2 Tv) = du$, найдем оценку для $X(t, \xi)$. Оценивая теперь по модулю J_5, получим

$$|J_5| < Sg^{1/3}\nu^{-2/3}T^{-1}\exp\left(-\frac{T}{4c}\right)M, \quad M = \mathrm{const}, \quad c = \mathrm{const} \tag{4.5}$$

Подставляя (4.1) — (4.5) в (3.5), находим различные асимптотики для ζ при $T \to \infty$

$$\zeta = \frac{S}{\pi g t^2}\left[-2 + \frac{24}{\varkappa^2}\delta + O\left(\frac{1}{T^{3/2}}\right)\right] \quad \varkappa \to \infty \tag{4.6}$$

$$\zeta = -\frac{S}{\pi g t^2}\left[\frac{9}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{(n+2)\,n!}\left(-\frac{\varkappa}{4}\right)^n + O\left(\frac{1}{T^{3/2}}\right)\right] \tag{4.7}$$

$$\varkappa \to 0, \ \gamma \to \infty, \ \varkappa^{2N}/T^{-3} \to \infty, \ \varkappa^{2(N+1)}/T^{-3} \leqslant c_0 < \infty$$

Или в безразмерных переменных

$$\eta = \zeta g^{1/3}\nu^{-2/3}, \ Q = Sg^{2/3}\nu^{-4/3}, \ X = xg^{1/3}\nu^{-2/3}, \ T = tg^{2/3}\nu^{-1/3} \tag{4.8}$$

$$\eta = \frac{Q}{\pi T^2}\left[-2 + \frac{24}{\varkappa^2}\delta + O\left(\frac{1}{T^{3/2}}\right)\right] \tag{4.9}$$

$$T \to \infty, \ \varkappa \to \infty, \ \gamma \to \infty; \ \varkappa = \frac{X^2}{T}, \ \gamma = \frac{T^5}{X^4}$$

$$\delta = 1, \quad \varkappa^{-4}T^3 \to \infty; \quad \delta = 0, \quad \varkappa^{-4}T^3 \leqslant c_0 < \infty$$

$$\eta = -\frac{Q}{\pi T^2}\left[\frac{9}{4} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\frac{2n+1}{(n+2)\,n!}\left(-\frac{\varkappa}{4}\right)^n + O\left(\frac{1}{T^{3/2}}\right)\right] \tag{4.10}$$

$$T \to \infty, \quad \varkappa \to 0, \quad \gamma \to \infty,$$

$$X \neq 0, \quad \varkappa^{2N}T^3 \to \infty, \quad \varkappa^{2(N+1)}T^3 \leqslant c_0 < \infty$$

Первый член разложения (4.6) для ζ совпадает с первым членом аналогичного разложения (3.7) в [6] интеграла Л. Н. Сретенского, предложенного им при упрощенном способе описания волн в рассматриваемой задаче ((46) в [1]). Таким образом, из (4.6), а также из (48), (49) в [1], (3.7), (3.17), (3.20), (3.26), в [6] и (4.25), (4.27) в [5] следует, что при $\nu t x^{-2} \to 0$ интеграл Л. Н. Сретенского с точностью до бесконечно малых отражает поведение возвышения свободной поверхности в рассматриваемой задаче.

Формула (4.7) или (4.10) описывает заключительную стадию затухания волны, для которой интеграл Л. Н. Сретенского уже неприменим.

5. Аналогичные вычисления в случае пространственного движения жидкости, вызванного начальным возвышением, сконцентрированным в начале координат, дают (в безразмерных переменных)

$$\eta = -\frac{Q}{\pi^{3/2}T^{5/2}}\left[\frac{1}{5} + \sum_{k=1}^{K_1}\frac{k+1}{(2k+5)k!}\left(-\frac{\varkappa}{4}\right)^k + O\left(\frac{1}{T^3}\right)\right] + \tag{5.1}$$

$$+ \frac{Q}{\pi T^4}\left[\frac{51}{8} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{K_2}\frac{(2k+1)!!}{(k!)^2}\,\frac{k^2+k+3}{k+4}\left(-\frac{\varkappa}{8}\right)^k + O\left(\frac{1}{T^{3/2}}\right)\right]$$

$$T \to \infty, \ \varkappa \to 0, \ \gamma \to \infty; \ \varkappa = \frac{R^2}{T}, \ \gamma = \frac{T^5}{R^4}; \ \varkappa^{K_1}T^3 \to \infty, \ \varkappa^{K_1+1}T^3 \leqslant c_0 < \infty$$

$$\varkappa^{K_2}T^{3/2} \to \infty, \ \varkappa^{K_2+1}T^{3/2} \leqslant c_0 < \infty$$

$$\eta = \frac{Q\delta_1}{\pi R^5}\left\{18 + \frac{\delta_2}{(\pi\gamma)^{1/2}} \sum_{n=0}^{N} \frac{4n^2+8n+15}{(2n-5)\,n!}\,[(2n+1)!!]^2 \frac{1}{\varkappa^n}\right\} + \frac{Q}{\pi T^4}\left[6 + O\left(\frac{1}{T^{3/2}}\right)\right] \tag{5.2}$$

$$T \to \infty, \quad \varkappa \to \infty, \quad \gamma \to \infty; \quad \delta_1 = 1, \quad T^6\varkappa^{-5} \to \infty; \quad \delta_1 = 0$$
$$T^6\varkappa^{-5} \leqslant c_0 < \infty$$
$$\delta_2 = 1, \quad T\varkappa^{-1} \to \infty; \quad \delta_2 = 0, \quad T\varkappa^{-1} \leqslant c_0 < \infty, \quad T^{3/2}\varkappa^{-(N+3/2)} \to \infty$$
$$T^{3/2}\varkappa^{-(N+5/2)} \leqslant c_0 < \infty$$

Здесь Q — безразмерный объем поднятой жидкости, R — безразмерное расстояние от начала координат $R = rg^{1/3}\nu^{-2/3}$, η и T определены в (4.8).

Сравнение формул (4.9), (4.10) и (5.1), (5.2) показывает, что в пространственном случае возвышение свободной поверхности затухает со временем быстрее, чем в плоском. Кроме того, отметим, что если и в пространственном случае построить интеграл, аналогичный интегралу Л. Н. Сретенского, то он с точностью до бесконечно малых будет отражать поведение возвышения свободной поверхности в рассматриваемой задаче, если

$$T^{11}R^{-10} = t^{11}\nu^3 g^4 r^{-10} = (\nu t/r^2)^3\,(gt^2/r)^4 \to 0$$

Поступила 9 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сретенский Л. Н.* О волнах на поверхности вязкой жидкости. Тр. ЦАГИ, 1941, № 541.
2. *Ламб Г.* Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
3. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций, т. 2. Изд. 2. М., «Наука», 1968.
4. *Miles J. W.* The Cauchy-Poisson problem for a viscous liquid. J. Fluid. Mech., 1968, vol. 34, pt 2, p. 359—372.
5. *Потетюнко Э. Н., Срубщик Л. С.* Асимптотический анализ волновых движений вязкой жидкости со свободной границей. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
6. *Потетюнко Э. Н., Срубщик Л. С., Царюк Л. Б.* О применении метода стационарной фазы в некоторых работах по теории волн на поверхности вязкой жидкости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
7. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 5. М., «Наука», 1971.

УДК 539.3

ПРИМЕНЕНИЕ РЕГУЛЯРНОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ К РЕШЕНИЮ ВТОРОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

П. И. Перлин

(Москва)

Предлагается регулярное представление для сингулярных интегралов, присутствующих в интегральных уравнениях второй основной задачи теории упругости. Это представление используется для реализации метода последовательных приближений при решении внутренней и внешней задачи. Обсуждаются вопросы построения расчетной схемы.

Использование аппарата теории потенциала позволяет свести рассмотрение основных краевых задач теории упругости к интегральным уравнениям [1]. Для решения