Отметим, что стабилизацию системы

$$x_1^{\cdot} = \frac{B-C}{A} x_2x_3 + \frac{1}{A} u_1, \quad x_2^{\cdot} = \frac{C-A}{B} x_3x_1 + \frac{1}{B} u_2, \quad x_3^{\cdot} = \frac{A-B}{C} x_1x_2$$

по переменным x_1, x_2 найденные законы управления гарантируют с наименьшим значением функционала

$$J(u_1, u_2) = \int_0^\infty \left[2(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} u_1^2 + \frac{1}{\lambda_2} u_2^2\right)\right] dt$$

Обобщением рассмотренного примера является следующее утверждение. Пусть стабилизируемая система описывается уравнением

$$x^{\cdot} = F(x) + G(x)u$$

и пусть $V(x)$ —определенно-положительная функция Ляпунова, удовлетворяющая условию $V_x^T F \equiv 0$. Закон управления

$$u = -\Lambda G^T V_x$$

гарантирует асимптотическую устойчивость системы по переменным $y_1 = \Psi_1(x), \ldots, y_r = \Psi_r(x)$ с наименьшим значением функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty [V_x^T G\Lambda G^T V_x + u^T \Lambda^{-1} u]\, dt$$

если функция $V_x^T G\Lambda G^T V_x$ — определенно-положительная по $y_1, \ldots, y_r$.

Поступила 6 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. Доп. к кн.: Малкина И. Г. Теория устойчивости движения, М., «Наука», 1966.
2. *Летов А. М.* Некоторые нерешенные задачи теории автоматического управления. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 4.
3. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
4. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.
5. *Фурасов В. Д.* Построение управляемых систем по заданным оценкам переходного процесса. I. Автоматика и телемеханика, 1971, № 7.

УДК 532.529.3

ЛАМИНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАТОПЛЕННАЯ СТРУЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Н. В. Дерендяев

(Горький)

В приближении пограничного слоя получено решение для слабой неавтомодельной осесимметричной струи, затопленной во вращающейся вязкой несжимаемой жидкости. Найдено асимптотическое выражение для поля струи на больших расстояниях от источника, где оно становится автомодельным.

1. Пусть полупространство, заполненное вязкой несжимаемой жидкостью, и ограничивающая его твердая плоскость вращаются с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости.

Свяжем с твердой плоскостью правую цилиндрическую систему координат r, φ, z, выбрав ее так, чтобы плоскость $z = 0$ была границей полупространства и в каждой точке жидкости было $z > 0$. Рассмотрим задачу о медленных стационарных осесимметричных относительных движениях жидкости в полупространстве, вызванных распределением скоростей на твердой плоскости (1.1) при условии на бесконечности (1.2)

$$\mathbf{v}\,|_{z=0} = \mathbf{e}_z w_0(r) \tag{1.1}$$

$$\mathbf{v} \to 0, \quad \mathbf{r} \to \infty \tag{1.2}$$

Ограничимся случаем, когда функция $w_0(r)$ финитна и ее пространственный масштаб L много больше толщины экмановского пограничного слоя, т. е.

$$L \gg \sqrt{\nu/\omega} \tag{1.3}$$

Кориолисовы силы препятствуют движению жидкости по нормали к оси вращения и, в соответствии с приведенными в [1] оценками, при условии (1.3) образуется пограничный слой струи, распространяющейся вдоль оси z. Система линеаризованных уравнений пограничного слоя струи во вращающейся жидкости в осесимметричном случае записывается в виде [1]

$$2\omega v = \frac{\partial h}{\partial r}, \quad 2\omega u = \nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right) \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial h}{\partial z} = \nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right), \quad \frac{\partial ru}{\partial r} + \frac{\partial rw}{\partial z} = 0, \quad h = \frac{p}{\rho} + \Phi$$

Здесь u, v, w — компоненты скорости жидкости в правой цилиндрической системе координат, связанной с вращающейся твердой плоскостью, p — давление, ρ — плотность, Φ — потенциал поля центробежных сил.

Подсос жидкости в струю вызывает течение вдоль твердой плоскости, продольный масштаб которого $\sim L$. Это течение направлено по нормали к оси вращения и, следовательно, в нем наиболее существенны кориолисовы и вязкие силы. Приравнивая порядки величин последних, найдем, что масштаб течения в z-направлении $\sim \sqrt{\nu/\omega}$. Таким образом, при условии (1.3) на твердой плоскости образуется пограничный слой. Поле скоростей при $z \lesssim \sqrt{\nu/\omega}$ в линейном приближении представляет суперпозицию поля струи и течения в пограничном слое на твердой плоскости. Поскольку z-компонента скорости в слое на плоскости существенно меньше, чем в поле струи, приближенно можно считать (w — z-компонента скорости в поле струи)

$$w\,|_{z=0} = w_0(r) \tag{1.5}$$

Задача о нахождении поля слабой струи, затопленной во вращающейся жидкости, сводится к интегрированию уравнений (1.4) с граничными условиями (1.2), (1.5).

2. Непосредственной подстановкой в уравнения можно убедиться, что система (1.4) допускает частные решения вида (A, k — параметры, J_0, J_1 — функции Бесселя)

$$u = A\frac{\nu k^2}{2\omega} J_1(kr)\, e^{-\lambda z}, \quad v = -AJ_1(kr)\, e^{-\lambda z} \tag{2.1}$$

$$w = AJ_0(kr)\, e^{-\lambda z}, \quad h = A\frac{2\omega}{k} J_0(kr)\, e^{-\lambda z}, \quad \lambda = \frac{\nu k^3}{2\omega}$$

Образуем суперпозицию частных решений (2.1)

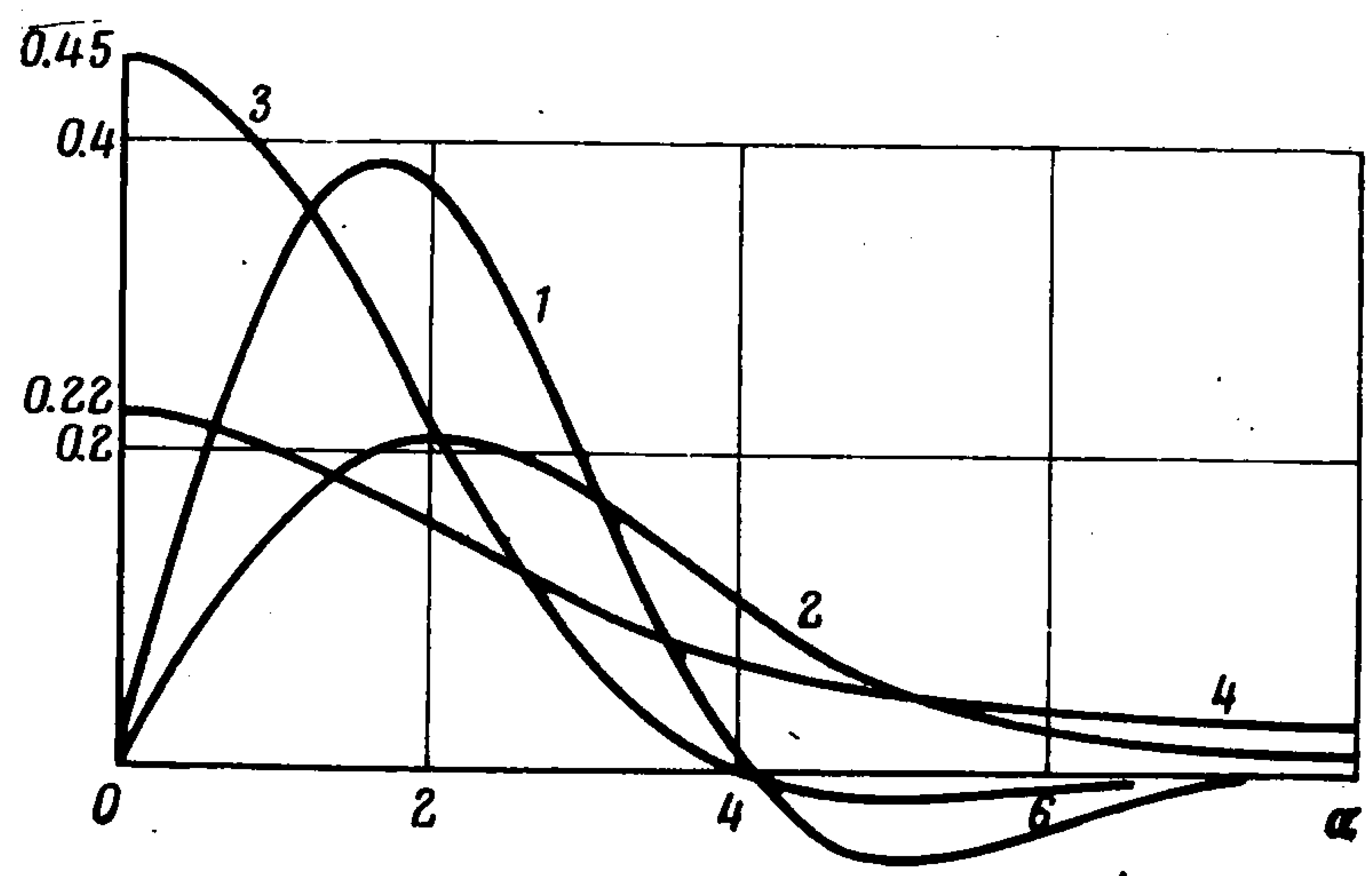
$$u = \frac{\nu}{2\omega}\int_0^\infty A(k)\, J_1(kr)\, e^{-\lambda z} k^3\, dk, \quad v = -\int_0^\infty A(k)\, J_1(kr)\, e^{-\lambda z} k\, dk \tag{2.2}$$

$$w = \int_0^\infty A(k)\, J_0(kr)\, e^{-\lambda z} k\, dk, \quad h = 2\omega \int_0^\infty A(k)\, J_0(kr)\, e^{-\lambda z}\, dk$$

Потребовав, чтобы третье соотношение в (2.2) удовлетворяло условию (1.5), придем к уравнению относительно $A(k)$. Обращая преобразование Фурье — Бесселя, найдем

$$A(k) = \int_0^\infty w_0(r) J_0(kr) r dr \tag{2.3}$$

Интегралы (2.2) хорошо сходятся при $z > 0$ благодаря множителю $e^{-\lambda z}$ в подынтегральных функциях, что позволяет находить производные от выражений (2.2) по r, z, дифференцируя под знаком интеграла. Но тогда, по построению, формулы (2.2), (2.3) дают решение системы (1.4) в полупространстве $z > 0$. Нетрудно видеть, что это решение удовлетворяет не только граничному условию на плоскости $z = 0$, но и условию на бесконечности. Формулы (2.2), (2.3), в принципе, решают краевую задачу с уравнениями (1.4) и граничными условиями (1.2), (1.5)



3. Функция $A(k)$ — преобразование Фурье—Бесселя от финитной функции $w_0(r)$ — раскладывается в степенной ряд в окрестности нуля: $A(k) = ak^n + bk^{n+2} + \ldots$. Асимптотическое выражение для поля струи при $z \to \infty$ и фиксированном r в соответствии с [2] может быть получено из (2.2) путем замены $A(k)$ на ak^n и имеет вид

$$u = \frac{\nu a}{2\omega} I_{13}, \quad v = -aI_{11}, \quad w = aI_{01}, \quad h = 2\omega a I_{00} \tag{3.1}$$

$$I_{pq} = \delta^{n+q+1} \int_0^\infty \varkappa^{n+q} J_p(\alpha\varkappa) e^{-\varkappa^3} d\varkappa$$

$$\delta = \left(\frac{2\omega}{\nu z}\right)^{1/3}, \quad \varkappa = \frac{k}{\delta}, \quad \alpha = \delta r$$

Из приведенных выражений видно, что асимптотические формулы (3.1) дают автомодельное решение системы (1.4). На фигуре изображено решение (3.1) в случае $n = 0$; в этом случае $a = Q/2\pi$, где Q — объемный расход источников струи. Кривым *1—4* соответствуют зависимости от α:

$$1 - \frac{5\pi z u}{Q\delta}, \quad 2 - \frac{-2\pi v}{Q\delta^2}, \quad 3 - \frac{2\pi w}{Q\delta^2}, \quad 4 - \frac{\pi h}{4\omega Q\delta}$$

Автомодельное решение для поля струи, соответствующее $n = 1$, получено в [1]. Следует, однако, заметить, что в силу (2.3) функция $A(k)$ четная и, следовательно, лишь автомодельные интегралы (3.1) с четными n могут быть асимптотическими решениями краевой задачи (1.4), (1.2), (1.5) при $z \to \infty$.

Поступила 10 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Herbert D. M.* A laminar jet in a rotating fluid. J. Fluid Mech, 1965, vol. 23, pt 1, p. 65—75.
2. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., Физматгиз, 1958, стр. 446.