Так как среднее периодической функции $g(t)$ класса C^2 равно нулю, а отношение $d/(aT)$ иррационально, то по теореме 1 для любых $\varepsilon > 0$ и N_0 существует $N > N_0$, такое, что

$$\left|\sum_{i=1}^{N} g(t_{2i})\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \left|\sum_{i=1}^{N} g(t_{2i-1})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

равномерно по x. Учитывая (3.2), заключаем, что в момент времени $t = 2dN/a$ будет справедливо неравенство $|u(t, x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [0, d]$.

Поступила 19 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
2. *Arnold V. I., Avez A.* Problemes érgodiques de la mécanique classique. Paris, 1967. Gauthier-Villars.
3. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели I. Об отображениях окружности на себя. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1961, т. 25, № 1.

УДК 531.36

К СТАБИЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

В. Г. Демин, В. Д. Фурасов

(Москва)

Методом функций Ляпунова находится множество законов управления, обеспечивающих устойчивость невозмущенного движения управляемой системы по Ляпунову и асимптотическую устойчивость по части переменных. Определяются свойства найденных законов стабилизации. Из полученного множества выделяются законы, оптимальные по принуждению. Приводится пример.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую систему, возмущенное движение которой на множестве H описывается уравнением

$$x^{\bullet} = \Phi(x, u, t), \; x \in R^n, \; u \in R^m, \; m \leqslant n \tag{1.1}$$
$$H = \{x, t\colon \|x\| < h, \; t \geqslant 0\} \quad (\|x\|^2 = x^T x, \; h = \text{const} > 0)$$

Здесь $\Phi(x, u, t) = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ — вектор-функция, удовлетворяющая на некотором множестве непрерывных законов управления

$$u = u(x, t), \quad u(0, t) = 0 \tag{1.2}$$

условиям существования и единственности решений уравнения (1.1).

Следуя [1-3], задачу стабилизации сформулируем следующим образом.

Задача. Дано множество законов управления (1.2). Требуется из (1.2) выделить подмножество законов, на котором невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) устойчиво по Ляпунову и асимптотически устойчиво по переменным $x_1, \ldots, x_r$, $r \leqslant n$.

Множество законов, полученное в результате решения задачи, будем называть множеством стабилизирующих законов управления или множеством законов стабилизации.

2. Теорема о стабилизации. Для решения задачи введем в рассмотрение скалярные функции $V(x, t)$ и $W(x, t)$, определенно-положительные на множестве $H_1 =$

$= \{x, t: \|x\| < h_1 \leqslant h, \ t \geqslant 0\}$ $V(x, t)$ по переменным $x_1, \ldots, x_n$ и $W(x, t)$ — по $x_1, \ldots, x_r$.

По аналогии с [3,4] функция $W(x, t)$ называется определенно-положительной по переменным $x_1, \ldots, x_r$ на множестве H_1, если $W(0, t) \equiv 0$, и на множестве $H_0 = \{x_1, \ldots, x_r: x_1^2 + \ldots + x_r^2 < h_1^2\}$ может быть указана такая непрерывная определенно-положительная по Ляпунову функция $w(x_1, \ldots, x_r)$, что при всех $x, t \in H_1$

$$W(x, t) \geqslant w(x_1, \ldots, x_r) \tag{2.1}$$

Пусть функция $V(x, t)$ определена и непрерывна на H_1 вместе со своими частными производными $V_x' = [V_{x_1}', \ldots, V_{x_n}']^T$ и $V_t = dV / dt$.

Теорема. Любой закон управления (1.2), обеспечивающий выполнение условия

$$V_x^T \Phi(x, y, t) + V_t = - W(x, t) \tag{2.2}$$

на множестве H_1, является стабилизирующим законом управления для системы (1.1), если при всех $x, t \in H_1$

$$x_1\Phi_1(x, u, t) + \ldots + x_r\Phi_r(x, u, t) \leqslant N, \quad N > 0 \tag{2.3}$$

Для доказательства теоремы заметим сначала, что в соответствии с первой теоремой Ляпунова при выполнении условия (2.2) замкнутая система (1.1), (1.2) устойчива по переменным $x_1, \ldots, x_n$, и для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ может быть указано такое число $\delta > 0$, что $\|x(t)\| < \varepsilon$ при всех $t > 0$, если

$$\|x(0)\| \leqslant \delta \tag{2.4}$$

При этом в силу неравенства (2.1) на любом движении системы, начинающемся в области (2.4)

$$\int_0^t w(x_1(\tau), \ldots, x_r(\tau))\, d\tau \leqslant V(x(0), 0) - V(x(t), t), \quad t > 0$$

и так как $V^{\cdot}(x, t) \leqslant 0$ на H_1, то

$$\int_0^\infty w(x_1(t), \ldots, x_r(t))\, dt \leqslant V(x(0), 0) \tag{2.5}$$

Покажем теперь, что (2.5) в сочетании с условием (2.3) теоремы дает

$$[x_1^2(t) + \ldots + x_r^2(t)] \to 0 \qquad \text{при } t \to \infty \tag{2.6}$$

Действительно, пусть (2.6) не имеет места. Тогда, как следует из самого понятия предела, может быть указана такая неограниченно возрастающая последовательность моментов времени $\{t_k\}$, что

$$x_1^2(t_k) + \ldots + x_r^2(t_k) \geqslant s_1, \quad s_1 = \text{const} > 0, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.7}$$

Из (2.7) и (2.3) следует

$$x_1^2(t) + \ldots, x_r^2(t) \geqslant s_2, \quad s_2 = \text{const} > 0, \quad s_2 < s_1$$

по крайней мере при всех $t \in [t_k - \Delta t, t_k]$, где $\Delta t = (s_1 - s_2) / 2N$. Пусть теперь

$$\eta = \min\left(w(x_1, \ldots, x_r) \quad \text{при} \quad s_2 \leqslant \sum_{i=1}^r x_i^2 < \varepsilon^2\right)$$

Тогда для любого t_k

$$\int_{t_k - \Delta t}^{t_k} w(x_1(t), \ldots, x_r(t))\, dt \geqslant \eta \Delta t$$

что противоречит сходимости интеграла (2.5).

Следовательно, (2.6) имеет место, и замкнутая система (1.1), (1.2) асимптотически устойчива по переменным $x_1, \ldots, x_r$.

В условиях теоремы отсутствует требование бесконечно малого высшего предела не только по переменным $x_1, \ldots, x_r$, но и по переменным $x_1, \ldots, x_n$. Это обстоятельство позволяет, в частности, утверждать, что закон управления $u = u^0(x, t)$, удовлетворяющий условиям сформулированной теоремы, является оптимальным по отношению к функционалу

$$J(u) = \int_0^\infty L(x, u, t)\,dt, \qquad L(x, u, t) \geqslant 0$$

если $L(x, u^\circ(x, t), t) = W(x, t)$ и для любого вектора $u \neq u^\circ$.

$$V_x{}^T \Phi(x, u, t) + V_t + L(x, u, t) \geqslant 0$$

Справедливость сделанного утверждения следует непосредственно из основной теоремы об оптимальной стабилизации [1], в условиях которой требование бесконечно малого высшего предела может быть опущено. Заметим, что

$$\min_u \int_0^\infty L(x, u, t)\,dt \leqslant V(x(0), 0) \tag{2.8}$$

и знак равенства в (2.8) имеет место лишь тогда, когда невозмущенное движение системы

$$x^\cdot = \Phi(x, u^\circ(x, t), t)$$

асимптотически устойчиво по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

3. Частные случаи стабилизации. Пусть возмущенное движение системы, стабилизируемой по переменным $x_1, \ldots, x_r$, описывается уравнением

$$x^\cdot = F(x, t) + G(x, t)\, u \tag{3.1}$$

где F — n-мерная вектор-функция, G — $n \times m$-матрица.

Условие (2.2) в рассматриваемом случае приводится к виду

$$V_x{}^T (F + Gu) + V_t = -W(x, t) \tag{3.2}$$

и множество законов, обеспечивающих выполнение (3.2), определяется выражением

$$u = p(x, t) - (W(x, t) + V_x{}^T F + V_t)\,(V_x{}^T G G^T V_x)^{-1} G^T V_x$$

если на H_1

$$p^T G^T V_x = 0, \qquad V_x{}^T G G^T V_x \neq 0$$

В общем случае функция $V_x{}^T G G^T V_x \neq 0$ может обращаться в нуль при $\| x \| \neq 0$. Поэтому решение задачи о стабилизации системы (3.1) естественно искать в виде

$$u = l(x, t) - \lambda G^T V_x \tag{3.3}$$

где l и λ — произвольные векторная и скалярная ($\lambda = \lambda(x, t)$) функции, связанные уравнением

$$V_t = -W(x, t) - V_x{}^T (F + Gl) + \lambda V_x{}^T G G^T V_x \tag{3.4}$$

и ограничением

$$[x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0]\,(F + Gl - \lambda G G^T V_x) \leqslant N, \qquad x, t \in H_1$$

Положив в (3.3), (3.4) $l \equiv 0$ и потребовав выполнение неравенства

$$\lambda(x, t) > 0 \tag{3.5}$$

на H_1, получим закон стабилизации

$$u = -\lambda G^T V_x, \quad V_t = -W(x, t) - V_x{}^T F + \lambda V_x{}^T G G^T V_x \tag{3.6}$$

оптимальной по принуждению [5].

Отметим, что при выполнении неравенства (3.5) любой из законов (3.3) на движениях системы (3.1) доставляет минимум функционалу

$$J = \int_0^\infty \left[W(x,t) + \frac{1}{2\lambda}\|l\|^2 - \frac{\lambda}{2}\|G^T V_x\|^2 - \frac{1}{\lambda}u^T l + \frac{1}{2\lambda}\|u\|^2\right] dt$$

Промежуточное положение между законами стабилизации (3.3) и (3.6) занимают

$$u = -\lambda G^T V_x + PG^T V_x$$

где $P = P(x, t)$ — произвольная кососимметричная матрица, и

$$u = -\Lambda G^T V_x, \quad V_t = -W(x,t) - V_x{}^T F + V_x{}^T G \Lambda G^T V_x \tag{3.7}$$

где $\Lambda = \Lambda(x, t)$ — определенно-положительная $m \times m$-матрица. Впрочем в соответствии с [5] законы управления вида (3.7) могут рассматриваться и как законы, оптимальные по принуждению, если в качестве нормы принуждения принять квадратичную форму $2zw = u^T \Lambda^{-1} u$.

Нетрудно видеть, что закон управления (3.6) гарантирует стабилизацию системы

$$x^{\cdot} = F(x,t) + G(x,t)\,\varphi(u,t) \tag{3.8}$$

по переменным $x_1, \ldots, x_r$ при любых вектор-функциях $\varphi(u, t)$, удовлетворяющих условию

$$u^T \varphi(u,t) \geqslant u^T u, \qquad t \geqslant 0$$

и ограничению типа (2.3), а (3.7) — в случае диагональной матрицы Λ — при любых $\varphi(u, t) = \{\varphi_1(u_1, t), \ldots, \varphi_m(u_m, t)\}$, удовлетворяющих неравенствам

$$u_j \varphi_j(u_j, t) \geqslant u_j{}^2, \qquad t \geqslant 0 \ (j = 1, \ldots, m)$$

При этом, если на движениях (3.1), (3.6)

$$\min_u I(u) = \varkappa^\circ, \ I(u) = \int_0^\infty \left[W(x,t) - \frac{\lambda}{2} V_x{}^T G G^T V_x + \frac{1}{2\lambda} u^T u\right] dt$$

то на движениях (3.8), (3.6)

$$\varkappa^\circ = \max_\varphi \min_u I(u).$$

Аналогичные соотношения имеют место в случае (3.7), когда

$$I(u) = \int_0^\infty \left[W(x,t) - \frac{1}{2} V_x{}^T G \Lambda G^T V_x + \frac{1}{2} u^T \Lambda^{-1} u\right] dt$$

4. Пример. Рассмотрим задачу о гашении вращения тела, закрепленного в одной точке.

Пусть $r = 2$ и возмущенное движение описывается уравнениями

$$x_1^{\cdot} = \frac{B-C}{A} x_2 x_3 + \frac{1}{A}\varphi_1(u_1, t), \quad x_2^{\cdot} = \frac{C-B}{B} x_3 x_1 + \frac{1}{B}\varphi_2(u_2, t)$$

$$x_3^{\cdot} = \frac{A-B}{C} x_1 x_2$$

где A, B, C — главные моменты инерции тела. В этом случае (3.7) можно удовлетворить, положив

$$V = Ax_1^2 + Bx_2^2 + Cx_3^2, \quad W = 4\lambda_1 x_1^2 + 4\lambda_2 x_2^2, \quad u_1 = -2\lambda_1 x_1$$
$$u_2 = -2\lambda_2 x_2$$

где λ_1 и λ_2 — постоянные положительные величины.

Отметим, что стабилизацию системы

$$x_1^{\cdot} = \frac{B-C}{A} x_2 x_3 + \frac{1}{A} u_1,\ x_2^{\cdot} = \frac{C-A}{B} x_3 x_1 + \frac{1}{B} u_2,\ x_3^{\cdot} = \frac{A-B}{C} x_1 x_2$$

по переменным x_1, x_2 найденные законы управления гарантируют с наименьшим значением функционала

$$J(u_1, u_2) = \int_0^\infty \left[2(\lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda_1} u_1^2 + \frac{1}{\lambda_2} u_2^2\right)\right] dt$$

Обобщением рассмотренного примера является следующее утверждение. Пусть стабилизируемая система описывается уравнением

$$x^{\cdot} = F(x) + G(x)u$$

и пусть $V(x)$ —определенно-положительная функция Ляпунова, удовлетворяющая условию $V_x^T F \equiv 0$. Закон управления

$$u = -\Lambda G^T V_x$$

гарантирует асимптотическую устойчивость системы по переменным $y_1 = \Psi_1(x), \ldots, y_r = \Psi_r(x)$ с наименьшим значением функционала

$$J(u) = \frac{1}{2}\int_0^\infty [V_x^T G \Lambda G^T V_x + u^T \Lambda^{-1} u]\, dt$$

если функция $V_x^T G \Lambda G^T V_x$ — определенно-положительная по $y_1, \ldots, y_r$.

Поступила 6 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. Доп. к кн.: Малкина И. Г. Теория устойчивости движения, М., «Наука», 1966.
2. *Летов А. М.* Некоторые нерешенные задачи теории автоматического управления. Дифференциальные уравнения, 1970, т. 6, № 4.
3. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
4. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения. М., «Наука», 1968.
5. *Фурасов В. Д.* Построение управляемых систем по заданным оценкам переходного процесса. I. Автоматика и телемеханика, 1971, № 7.

УДК 532.529.3

ЛАМИНАРНАЯ ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАТОПЛЕННАЯ СТРУЯ ВО ВРАЩАЮЩЕЙСЯ ЖИДКОСТИ

Н. В. Дерендяев

(Горький)

В приближении пограничного слоя получено решение для слабой неавтомодельной осесимметричной струи, затопленной во вращающейся вязкой несжимаемой жидкости. Найдено асимптотическое выражение для поля струи на больших расстояниях от источника, где оно становится автомодельным.

1. Пусть полупространство, заполненное вязкой несжимаемой жидкостью, и ограничивающая его твердая плоскость вращаются с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной этой плоскости.

Свяжем с твердой плоскостью правую цилиндрическую систему координат r, φ, z, выбрав ее так, чтобы плоскость $z = 0$ была границей полупространства и в каждой