УДК 531.31 + 517.51

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ПУАНКАРЕ

В. В. Козлов

(Москва)

В заметке рассматривается поведение при $t \to +\infty$ интеграла

$$I(t) = \int_0^t f(\omega_1 t, \omega_2 t)\, dt$$

где $f(\varphi_1, \varphi_2)$ — непрерывная функция на двумерном торе $T^2\{\varphi_1\varphi_2 \bmod 1\}$, а отношение частот ω_2 / ω_1 иррационально. Эта задача рассматривалась впервые Пуанкаре [1] и часто встречается при качественном исследовании динамических систем.

Хорошо известно [1, 2], что если

$$\int_0^1 \int_0^1 f(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1\, d\varphi_2 > 0 \ (< 0)$$

то $I(t) \to +\infty \ (-\infty)$ при $t \to +\infty$. Следовательно, особую трудность представляет случай, когда пространственное среднее функции f равно нулю. Пуанкаре показал на примерах [1], что в этом случае интеграл $I(t)$ может стремиться к $+\infty$ или $-\infty$ (как t^α, $0 < \alpha < 1$) и (самый интересный случай) быть неограниченным, но бесконечно много раз подходить сколь угодно близко к своему начальному значению (т. е. к нулю). В связи с этим естественно поставить вопрос о нахождении условий, при которых будет иметь место возвращаемость интеграла $I(t)$ (устойчивость по Пуассону). Первый шаг в его решении — исследование дискретного аналога этой задачи, которое позволит установить, что возвращаемость имеет место, если функция f дважды непрерывно дифференцируема.

1. Предположим, что на окружности $S^1\{x \bmod 1\}$ задана непрерывная функция $f(x)$. Пусть α — некоторое иррациональное число. Составим сумму

$$S_N(\alpha, \varphi) = \sum_{i=0}^{N-1} f(i\alpha + \varphi), \qquad \varphi \in S^1$$

Если

$$\int_0^1 f(x)\, dx > 0 \ (< 0)$$

то, очевидно, сумма $S_N(\alpha, \varphi) \to +\infty \ (-\infty)$ при $N \to \infty$ равномерно по φ.

Теорема 1. Пусть

$$f \in C^2(S^1) \ \text{и} \ \int_0^1 f(x)\, dx = 0$$

Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и N_0 существует $N > N_0$, такое, что $|S_N(\alpha, \varphi)| < \varepsilon$ для всех $\varphi \in S^1$.

Доказательство. Все иррациональные числа разобьем на два класса. Класс K_1 составляют такие числа α, для которых неравенство

$$|n\alpha - m| < 1 / |n|^{3/2} \tag{1.1}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах. Остальные отнесем к классу K_2.

Пусть сначала $\alpha \in K_2$. Разложим функцию f в сходящийся ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{i2\pi nx} \left(|f_n| \leqslant \frac{c}{|n|^2},\ c > 0 \right)$$

Тогда

(1.2) $$S_N(\alpha, \varphi) = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{i2\pi n(k\alpha+\varphi)} = \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{i2\pi n\varphi} \frac{e^{i2\pi nN\alpha} - 1}{e^{i2\pi n\alpha} - 1}$$

Используя результаты работы [3], нетрудно доказать, что тригонометрический ряд

$$\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{f_n}{e^{i2\pi n\alpha} - 1} e^{i2\pi nx}$$

сходится и является рядом Фурье некоторой непрерывной функции $F(x)$ $(x \in S^1)$. Учитывая (1.2), получим, что $S_N(\alpha, \varphi) = F(N\alpha + \varphi) - F(\varphi)$. Теперь заключение теоремы становится очевидным.

При $\alpha \in K_1$ в неравенстве (1.1) числа m и n можно считать взаимно простыми. Если это не так, то пусть d $(d > 1)$ — их наибольший общий делитель. Положим $m = dm_1$, $n = dn_1$; тогда

$$|n_1\alpha - m_1| \leqslant \frac{1}{d^{5/2}|n_1|^{3/2}} < \frac{1}{|n_1|^{3/2}}$$

Очевидно, что таким преобразованием можно получить бесконечное число различных неравенств (1.1) со взаимно простыми m и n.

Оценим разность

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(k\alpha + \varphi) - \sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\frac{m}{n} + \varphi\right)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left|f(k\alpha + \varphi) - f\left(k\frac{m}{n} + \varphi\right)\right| \leqslant M_1 \sum_{k=0}^{n-1} \left|k\alpha - k\frac{m}{n}\right| \leqslant$$

$$\leqslant M_1 n \sum_{k=0}^{n-1} \left|\alpha - \frac{m}{n}\right| \leqslant M_1 n^2 \left|\alpha - \frac{m}{n}\right| < \frac{M_1}{\sqrt{n}}$$

$$M_1 = \max_{x \in S^1} |f'(x)|$$

Следовательно

(1.3) $$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(k\alpha + \varphi)\right| \leqslant \left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\frac{m}{n} + \varphi\right)\right| + \frac{M_1}{\sqrt{n}}$$

Так как числа m и n взаимно просты, то точки на S^1, угловые координаты которых

$$\varphi, \varphi + \frac{m}{n}, \varphi + 2\frac{m}{n}, \ldots, \varphi + (n-1)\frac{m}{n}$$

расположены в вершинах правильного вписанного n-угольника. Так как $f \in C^2(S^1)$, то по известному способу прямоугольников вычисления определенных интегралов, на окружности S^1 существует точка ξ, такая, что

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\frac{m}{n} + \varphi\right) + \frac{f''(\xi)}{24n^2}$$

Отсюда

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f\left(k\frac{m}{n} + \varphi\right)\right| \leqslant \frac{M_2}{24n}, \qquad M_2 = \max_{x \in S^1} |f''(x)|$$

Учитывая (1.3), получим окончательно

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(k\alpha+\varphi)\right| < \frac{M_1}{\sqrt{n}} + \frac{M_2}{24n}$$

Так как существует бесконечно много чисел n, удовлетворяющих этому неравенству, то для оставшихся $\alpha \in K_1$ теорема 1 тоже доказана.

2. Теперь обратимся к вопросу о возвращаемости интеграла $I(t)$.

Теорема 2. Если f непрерывна на T^2 и имеет две непрерывные производные по φ_2, а пространственное среднее функции f равно нулю, то для любых $\varepsilon > 0$ и T существует $t > T$, такое, что $|I(t)| < \varepsilon$.

Доказательство. Рассмотрим на T^2 окружность $S^1 = \{\varphi_1, \varphi_2 : \varphi_1 = 0\}$ и на ней функцию

$$F(x) = \frac{1}{\omega_1}\int_0^1 f\left(\varphi_1, \frac{\omega_2}{\omega_1}\varphi_1 + x\right) d\varphi_1, \quad x \in S^1$$

Очевидно равенство

$$I(na) = \sum_{k=0}^{n-1} F\left(k\frac{\omega_2}{\omega_1}\right) = S_n\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}, 0\right), \quad a = \frac{1}{\omega_1} > 0$$

Нетрудно проверить, что функция $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Теперь заключение теоремы 2 вытекает из теоремы 1.

Замечание. Пример Пуанкаре [1], в котором $I(t) \to +\infty$ (или к $-\infty$), не противоречит теореме 2, так как нетрудно доказать, что функция f этого примера не имеет вторых производных по координатам φ_1 и φ_2.

3. В качестве примера рассмотрим колебания упругой струны длины d; пусть a — скорость распространения возмущений. Предположим, что в начальный момент времени ($t = 0$) струна неподвижна, левый конец постоянно закреплен, а правый начинает совершать периодические колебания по закону $f(t)$ ($f(0) = 0$) с периодом T. Задача определения вынужденных колебаний струны при $t \geqslant 0$ является смешанной задачей для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \{t, x\colon 0 \leqslant t < \infty, 0 \leqslant x \leqslant d\}$$

Обозначим это решение через $u(t, x)$.

Нетрудно доказать, что если отношение $d/(aT)$ рационально, что на струне существуют точки $x = \xi$, такие, что $u(t, \xi) \to \infty$ при $t \to \infty$ («параметрический резонанс»).

Теорема 3. Предположим, что $d/(aT)$ иррационально, функция f класса C^2. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и τ существует $t > \tau$, такое, что $|u(t, x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [0, d]$.

Доказательство. Используя основное свойство характеристического параллелограмма, получим равенство

$$u\left(2\frac{d}{a}n, x\right) = \sum_{i=1}^{n} f(t_{2i}) - \sum_{i=1}^{n} f(t_{2i-1}) \tag{3.1}$$

$$t_{2i} = t_2 + 2(i-1)\frac{d}{a}, \quad t_{2i-1} = t_1 + 2(i-1)\frac{d}{a},$$

$$t_1 = \frac{d-x}{a}, \quad t_2 = \frac{d+x}{a}$$

Представим функцию $f(t)$ в виде $c + g(t)$, где c — среднее функции $f(t)$. Тогда равенство (3.1) можно переписать так:

$$u\left(2\frac{d}{a}n, x\right) = \sum_{i=1}^{n} g(t_{2i}) - \sum_{i=1}^{n} g(t_{2i-1}) \tag{3.2}$$

Так как среднее периодической функции $g(t)$ класса C^2 равно нулю, а отношение $d/(aT)$ иррационально, то по теореме 1 для любых $\varepsilon > 0$ и N_0 существует $N > N_0$, такое, что

$$\left|\sum_{i=1}^{N} g(t_{2i})\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \left|\sum_{i=1}^{N} g(t_{2i-1})\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

равномерно по x. Учитывая (3.2), заключаем, что в момент времени $t = 2dN/a$ будет справедливо неравенство $|u(t, x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [0, d]$.

Поступила 19 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. М.— Л., Гостехиздат, 1947.
2. *Arnold V. I., Avez A.* Problemes érgodiques de la mécanique classique. Paris, 1967. Gauthier-Villars.
3. *Арнольд В. И.* Малые знаменатели I. Об отображениях окружности на себя. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1961, т. 25, № 1.

УДК 531.36

К СТАБИЛИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

В. Г. Демин, В. Д. Фурасов

(Москва)

Методом функций Ляпунова находится множество законов управления, обеспечивающих устойчивость невозмущенного движения управляемой системы по Ляпунову и асимптотическую устойчивость по части переменных. Определяются свойства найденных законов стабилизации. Из полученного множества выделяются законы, оптимальные по принуждению. Приводится пример.

1. Постановка задачи. Рассмотрим управляемую систему, возмущенное движение которой на множестве H описывается уравнением

(1.1) $$x^{\cdot} = \Phi(x, u, t),\ x \in R^n,\ u \in R^m,\ m \leqslant n$$
$$H = \{x, t\colon \|x\| < h,\ t \geqslant 0\}\ (\|x\|^2 = x^T x,\ h = \text{const} > 0)$$

Здесь $\Phi(x, u, t) = \{\Phi_1, \ldots, \Phi_n\}$ — вектор-функция, удовлетворяющая на некотором множестве непрерывных законов управления

(1.2) $$u = u(x, t), \quad u(0, t) = 0$$

условиям существования и единственности решений уравнения (1.1).

Следуя [1–3], задачу стабилизации сформулируем следующим образом.

Задача. Дано множество законов управления (1.2). Требуется из (1.2) выделить подмножество законов, на котором невозмущенное движение $x = 0$ системы (1.1) устойчиво по Ляпунову и асимптотически устойчиво по переменным $x_1, \ldots, x_r$, $r \leqslant n$.

Множество законов, полученное в результате решения задачи, будем называть множеством стабилизирующих законов управления или множеством законов стабилизации.

2. Теорема о стабилизации. Для решения задачи введем в рассмотрение скалярные функции $V(x, t)$ и $W(x, t)$, определенно-положительные на множестве $H_1 =$