Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.31

КОВАРИАНТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В МЕХАНИКЕ

В. А. Вуйичич

(Белград)

При помощи нового понятия интеграла в тензорном исчислении [1] получаются новые ковариантные интегралы уравнений движения системы для обобщенных сил определенной структуры. Рассматривается вопрос о полной ковариантности уравнений движения в конфигурационном пространстве и получается новый ковариантный вид уравнений движения системы в криволинейных координатах. Ковариантная интегрируемость этих уравнений приводит и к переформулировке основной аксиомы динамики.

1. Известно, что из уравнений движения Лагранжа второго рода для голономной системы

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q^{\alpha}} - \frac{\partial T}{\partial q^{\alpha}} = a_{\alpha\beta}\ddot q^{\beta} - \Gamma_{\alpha\beta,\,\gamma}\dot q^{\beta}\dot q^{\gamma} = Q_\alpha \tag{1.1}$$

при определенных условиях можно получить интеграл энергии, импульса или циклические интегралы. Другие общие интегралы уравнений Лагранжа (1.1) получить нельзя, даже в случае, когда обобщенные силы равняются нулю.

Оказывается, что при помощи абсолютного интеграла тензора [1] можно проинтегрировать данную систему уравнений в общем виде не только в случае $Q_\alpha = 0$, но и для более широкого класса обобщенных сил $Q_\alpha = Q_\alpha(q^1, \ldots, q^n, \dot q^1 \ldots, \dot q^n; t)$.

Действительно, дифференциальные уравнения (1.1) запишем в виде

$$\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q^{\alpha}}\right) = \frac{D}{dt}(a_{\alpha\beta}\dot q^{\beta}) = Q_\alpha \tag{1.2}$$

Здесь D / dt — оператор абсолютной производной по времени, $p_\alpha = a_{\alpha\beta}\dot q^{\beta}$ обобщенный импульс системы в V_n-мерном конфигурационном пространстве. (Это соотношение справедливо и для реономной системы в расширенном $n+1$-мерном пространстве V_{n+1}, но будем рассматривать только склерономную систему.)

Покажем, что уравнения (1.2) допускают первые ковариантные интегралы при некоторых условиях в случае обобщенных сил вида

$$Q_\alpha = R_\alpha + S_{\alpha\beta}F^{\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.3}$$
$$R_\alpha = R_\alpha(q^1, q^2, \ldots, q^n), \quad S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}(q^1, q^2, \ldots, q^n)$$

Здесь R_α — координаты параллельно переносимого вектора, $S_{\alpha\beta}$ — ковариантно постоянный тензор, $F^{\beta} = F^{\beta}(t)$ — интегрируемые функции времени t.

Подставляя (1.3) в уравнения (1.2), получим систему исходных ковариантных уравнений движения в виде

$$D(\partial T/\partial \dot q^{\alpha}) = (R_\alpha + S_{\alpha\beta}F^{\beta})\,Dt \tag{1.4}$$

так как абсолютный дифференциал Dt скаляра t равняется дифференциалу dt того же скаляра.

В работе [1] показано, что абсолютный интеграл тензора

$$\hat{\int} DU^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots}(X) = U^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots}(X) - A^{\beta\cdots}_{\alpha\cdots}(X, M)$$

где $A^{\beta\dots}_{\alpha\dots}(X, M)$ — ковариантно постоянный тензор, определяемый из начальных условий при параллельном переносе вдоль траекторий, как показано в [2].

Возьмем абсолютный интеграл тензора от обеих частей равенства (1.4)

$$\overset{\wedge}{\int} D\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right) = \overset{\wedge}{\int} (R_{\alpha} + S_{\alpha\beta}F^{\beta})\, Dt$$

Имея в виду особенности абсолютного интеграла тензора, получим

$$\overset{\wedge}{\int} D\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}^{\alpha}} - A_{\alpha}^{1}$$

В силу предположения, что $R_{\alpha} = R_{\alpha}(q^1, \dots, q^n)$ и $S_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta}(q^1, \dots, q^n)$ — параллельно переносимые тензоры [3], имеем

$$\overset{\wedge}{\int} R_{\alpha} Dt = tR_{\alpha}(q^1, \dots, q^n) - A_{\alpha}^{2}$$

$$\overset{\wedge}{\int} S_{\alpha\beta}F^{\beta}Dt = S_{\alpha\beta}\overset{\wedge}{\int} F^{\beta}(t)\, Dt - A_{\alpha}^{3} =$$

$$= S_{\alpha\beta}(q^1, q^2, \dots, q^n)\, f^{\beta}(t) - A_{\alpha}^{3}, \qquad f^{\beta}(t) = \int F^{\beta}(t)\, dt$$

Здесь учтено, что $F^{\beta}(t)$ — скалярные функции только от времени t, поэтому абсолютный интеграл

$$\overset{\wedge}{\int} F^{\beta}(t)\, Dt$$

равняется интегралу

$$\int F(t) dt$$

Таким образом, получим

$$\partial T/\partial \dot{q}^{\alpha} = tR_{\alpha}(q^1, \dots, q^n) + S_{\alpha\beta}(q^1, \dots, q^n)\, f^{\beta}(t) + A_{\alpha} \tag{1.5}$$
$$A_{\alpha} = A_{\alpha}^{1} + A_{\alpha}^{2} + A_{\alpha}^{3}$$

где вектор A_{α} пока не определен.

Согласно утверждениям в работах [1, 2], вектор A_{α} в данном случае представляет собой вектор $\partial T / \partial \dot{q}^{\alpha} - tR_{\alpha} - S_{\alpha\beta}f^{\beta}$ в начальный момент времени $t = t_0$, который параллельно переносится вдоль траектории в любую ее точку t. В работах [4,5] встречается задача параллельного переноса вектора. В [6] установлен определенный вид двухточечного тензора, с помощью которого вычисляется параллельный перенос из одной точки в другую; в работе [7] показаны особенности этого тензора. Эти результаты используются ниже.

В конфигурационном пространстве указанный фундаментальный двухточечный тензор имеет вид

$$a_{\alpha k} = \sum_{\nu=1}^{N} m_{\nu}\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^{\alpha}}\left(\frac{\partial \mathbf{r}_{\nu}}{\partial q^{k}}\right)_{q^k = q^k(t_0) = q_0{}^k} = a_{\alpha k}(q^1, \dots, q^n; q_0{}^1, \dots, q_0{}^n)$$

Если известны начальные условия для параллельно переносимого вектора A_{α}, то, согласно [2], получим

$$A_{\alpha} = a_{\alpha}{}^{k}(p_k - t_0R_k - S_{kl}f^l), \quad a_{\alpha}{}^{k} = a^{kl}a_{\alpha l} = a_{\alpha}{}^{k}(q^1, \dots, q^n;\ q_0{}^1, \dots, q_0{}^n)$$

где $a_{\alpha}{}^{k}$ — смешанный двухточечный фундаментальный тензор конфигурационного пространства V_n[6]. Поэтому первые ковариантные интегралы (1.5) уравнений движения (1.4) такие:

$$\frac{\partial T}{\partial q^{\cdot\alpha}} = tR_\alpha(q^1, \ldots, q^n) + S_{\alpha\beta}(q^1, \ldots, q^n)\, f^\beta(t) + \tag{1.6}$$
$$+ [p_k - t_0R_k - S_{kl}f^l(t_0)]\, a_\alpha{}^k(q^1, \ldots, q^n; q_0{}^1, \ldots, q_0{}^n)$$

Рассмотрим частные случаи.

1.° При $S_{\alpha\beta} = 0$ или $f^\beta(t) = 0$ обобщенная сила представляет собой параллельно переносимый вектор $Q_\alpha = R_\alpha^*(q^1, \ldots, q^n)$, и соотношения (1.6) будут

$$\partial T/\partial q^{\cdot\alpha} = tR_\alpha + (p_k - t_0R_k)\, a_\alpha{}^k$$

2°. Такой же вид соотношений (1.6) сохраняется и при $R_\alpha = \mathrm{const}$.

3°. При $Q_\alpha = R_\alpha = 0$ получим n первых ковариантных иетегралов вида

$$\partial T / \partial q^{\cdot\alpha} = a_\alpha{}^k p_k \tag{1.7}$$

2. Дифференциальные уравнения движения (1.1) принято называть ковариантными уравнениями, хотя их ковариантность полностью не сохраняется. Покажем это и в дальнейшем выведем новый вид ковариантных дифференциальных уравнений движения, которые позволяют определить и вторые ковариантные интегралы.

Если векторы количества движения точек в декартовой системе координат обозначим через

$$\mathbf{K}_i = \{K_{3i}, K_{3i-1}, K_{3i-2}\} = \{K_\nu\} \quad (i = 1, \ldots, N;\ \nu = 1, \ldots, 3N)$$

то, как известно, уравнения движения системы можно записать в виде

$$dK_\nu / dt = F_\nu \tag{2.1}$$

Сравнивая (2.1) с уравнениями (1.2), получим эквивалентность: (2.1) $\Leftrightarrow$ (1.2).

Имея в виду, что оператору производной d/dt в декартовой системе координат соответствует в криволинейной системе координат оператор абсолютной производной D / dt, т. е. $d / dt \Leftrightarrow D / dt$, а также $K_\nu \Leftrightarrow p_\alpha$, $F_\nu \Leftrightarrow Q_\alpha$, приходим к выводу, что уравнения (2.1) ковариантны.

Заметим, что к этому выводу прийти не удается, если выражение dK_ν / dt записать в общепринятом виде $m_i d^2\mathbf{r}_i / dt^2$. Действительно, вектор скорости выражается производными dq^α/dt. Сравнивая $dx^j / dt \Leftrightarrow dq^\alpha / dt$ с соотношениями (2.1), видим, что в выражениях для скоростей нет оператора абсолютной производной D / dt, т. е. не выполняется элемент ковариантности. Чтобы удовлетворить этому требованию, исходим из определения [8] ковариантного вектора положения изображающей точки в криволинейной системе координат

$$\rho_\alpha = \sum_{i=1}^N m_i\mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \tag{2.2}$$

производная по времени которого

$$\frac{d\rho_\alpha}{dt} = a_{\alpha\beta}q^{\cdot\beta} + \sum_{i=1}^N m_i\mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial^2\mathbf{r}_i}{\partial q^\beta \partial q^\alpha}\, q^{\cdot\beta}$$
$$a_{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\beta}$$

Зная, что $a_{\alpha\beta}$ — метрический тензор и $(\partial^2\mathbf{r}_i/\partial q^\alpha\partial q^\beta)\cdot\partial\mathbf{r}_i/\partial q^\gamma = \Gamma_{\alpha\beta\nu,\gamma}$ — коэффициенты связности [9,10], заключаем, что обобщенный импульс p_α равняется абсолютной производной по времени от вектора ρ_α

$$p_\alpha = D\rho_\alpha/dt \tag{2.3}$$

Подставляя в (1.2), получим полностью ковариантный и контравариантный вид дифференциальных уравнений движения механической голономной склерономной системы

$$\frac{D^2\rho_\alpha}{dt^2} = Q_\alpha \Leftrightarrow \frac{D^2\rho^\beta}{dt^2} = Q^\beta \tag{2.4}$$

Сравнивая уравнения (2.4) с уравнениями $m_\nu (d^2x_\nu/dt^2) = F_\nu$, видим, что $d^2/dt^2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow D^2/dt^2$. Сравнение соотношения (2.4) с уравнениями (1.1) к такому выводу не приводит. Это означает, что уравнения Лагранжа второго рода в явном виде не ковариантны относительно второй производной по времени. Следовательно, исходя из известных дифференциальных уравнений движения, нельзя получить вторые ковариантные интегралы. Между тем, исходя из уравнений (2.4), можно проинтегрировать в конечном виде систему нелинейных дифференциальных уравнений при более широком классе сил.

Например, так как $\partial T/\partial \dot{q}^\alpha = D\rho_\alpha/dt$, из соотношения (1.6) получим

$$\hat{\int} D\rho_\alpha = \hat{\int} (tR_\alpha + S_{\alpha\beta} f^\beta)\, Dt + \hat{\int} (p_k - t_0 R_k - S_{kl} f^l)\, a_\alpha{}^k Dt$$

Отсюда следуют ковариантные интегралы

$$\rho_\alpha = \frac{t^2 R_\alpha}{2} + S_{\alpha\beta} \int f^\beta(t)\, dt + t(p_k - t_0 R_k - S_{kl} f^l)\, a_\alpha{}^k + A_\alpha$$

где A_α — параллельно переносимый вектор, который легко определить из начальных условий, перенося его параллельно вдоль траектории, а ρ_α, R_α, $S_{\alpha\beta}$ и $a_\alpha{}^k$ — известные функции координат q^α.

Уравнения (2.4) позволяют определить некоторые ковариантные интегралы и при наличии сил, зависящих от скоростей. Например, пусть обобщенные силы

$$Q_\alpha = b_{\alpha\beta} \dot{q}^\beta = b_{\alpha\beta} \frac{D\rho^\beta}{dt}, \quad b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha}(q^1, \ldots, q^n).$$

где $b_{\alpha\beta}$ — ковариантно постоянный тензор. Тогда из уравнений (2.4), применяя абсолютный интеграл тензора, получим указанным способом n первых ковариантных интегралов

$$p_\alpha = b_{\alpha\beta}\rho^\beta + a_\alpha{}^A (p_A - b_{AB}\rho^B)$$

Здесь

$$\rho^B = \rho^\beta(q_0{}^1, \ldots, q_0{}^n), \qquad b_{AB} = b_{\alpha\beta}(q_0{}^1, \ldots, q_0{}^n)$$

$$\left.\frac{D\rho_\alpha}{dt}\right|_{t=t_0} = p_A \quad (\alpha, \beta, A, B = 1, 2, \ldots, n)$$

3. Уравнения (2.4) описывают и движение твердого тела. Чтобы это доказать, достаточно определить значение фундаментального тензора $a_{\alpha\beta}$ и коэффициентов связанности $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ для системы координат, относительно которой рассматривается движение твердого тела. Пусть радиус-вектор i-й точки тела $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_c + \mathbf{r}'_i$, вектор угловой скорости $\omega = \dot{q}^{\alpha'} e_{\alpha'}$ $(\alpha' = 4, 5, 6)$, а скорость точки тела

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \dot{q}^\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}_c}{\partial q^{\alpha''}} \dot{q}^{\alpha''} + \frac{\partial \mathbf{r}_i'}{\partial q^{\alpha'}} \dot{q}^{\alpha'} = \dot{q}^{\alpha''} \mathbf{e}_{\alpha''} + \dot{q}^{\alpha'} (\mathbf{e}_{\alpha'} \times \mathbf{r}_i')$$

$$(\alpha = 1, 2, \ldots, 6; \ \alpha'' = 1, 2, 3)$$

Так как $\mathbf{e}_{\alpha''}$ и $\mathbf{e}_{\alpha'} \times \mathbf{r}_i$ — независимые векторы, то

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^{\alpha'}} = \frac{\partial \mathbf{r}_i'}{\partial q^{\alpha'}} = \mathbf{e}_{\alpha'} \times \mathbf{r}_i', \quad \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^{\alpha''}} = \mathbf{e}_{\alpha''}$$

Координаты тензора $a_{\alpha\beta}$ по определению

$$a_{\alpha''\beta''} = \int\limits_m \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^{\alpha''}} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q^{\beta''}}\, dm = \int\limits_m \mathbf{e}_{\alpha''} \cdot \mathbf{e}_{\beta''}\, dm = m g_{\alpha''\beta''}$$

$$a_{\alpha'\beta'} = \int [(\mathbf{e}_{\alpha'} \cdot \mathbf{e}_{\beta'})(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}') - (\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_{\alpha'})(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{e}_{\beta'})]\, dm =$$

$$= \int\limits_m (g_{\alpha'\beta'} g_{\gamma'\delta'} - g_{\alpha'\gamma'} g_{\beta'\delta'})\, \rho^{\gamma'} \rho^{\delta'}\, dm = I_{\alpha'\beta'}$$

Здесь $g_{\alpha''\beta''}$ — метрический тензор геометрического многообразия, в котором рассматривается движение твердого тела массы m, $I_{\alpha'\beta'}$ — тензор инерции [11]. Таким образом, фундаментальный тензор $a_{\alpha\beta}$ представляет собой инерциальную матрицу в обобщенном виде

$$a_{\alpha\beta} = \begin{Vmatrix} m g_{\alpha''\beta''} & 0 \\ 0 & I_{\alpha'\beta'} \end{Vmatrix} \tag{3.1}$$

Покажем еще, что справедливы соотношения

$$\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \frac{dq^{\gamma}}{dt} = \omega_{\beta}{}^{\alpha} \tag{3.2}$$

где $\omega_{\beta}{}^{\alpha} = \omega^{\gamma} e_{\beta\gamma}{}^{\alpha}$ — кососимметричный тензор [12] элементарного вращения. Производная по времени вектора $\mathbf{r}'$ будет

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = (\rho^{\cdot\alpha'} + \rho^{\beta'} \omega_{\beta'}^{\alpha'})\, \mathbf{e}_{\alpha'}$$

так как $\mathbf{e}_{\beta}^{\cdot} = \omega_{\beta}{}^{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha}$. С другой стороны

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{D\rho^{\alpha}}{dt} \mathbf{e}_{\alpha}, \text{ т. е. } \rho^{\cdot\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \rho^{\beta} q^{\cdot\gamma} = \rho^{\cdot\alpha} + \omega_{\beta}{}^{\alpha} \rho^{\beta}$$

откуда получаем соотношения (3.2). Следовательно, уравнения (2.4) представляют собой и ковариантные уравнения движения твердого тела; при условиях (3.1) и (3.2) они имеют вид

$$\frac{D^2 \rho_{\alpha}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{D\rho_{\alpha}}{dt}\right) + \omega_{\alpha}{}^{\gamma} \frac{D\rho_{\gamma}}{dt} = Q_{\alpha}$$

Заметив, что импульсы $D\rho_{\alpha}/dt = p_{\alpha} = I_{\alpha\beta} \omega^{\beta}$, отсюда получаем известные уравнения Эйлера.

4. Если обобщенные силы равняются нулю, то

$$\frac{D\rho_{\alpha}}{dt} = a_{\alpha}^{k} p_{k} = a_{\alpha}^{k} a_{kl} q_0^{\cdot l} = a_{\alpha l} q_0^{\cdot l} \tag{4.1}$$

Это показывает, что импульсы p_{α} остаются ковариантно постоянными вдоль траектории, так как двухточечный тензор $a_{\alpha l}$ — ковариантно постоянный тензор, $q_0^{\cdot l}$ — постоянные начальные данные. Соотношения (4.1) можно написать иным способом (s — дуга траектории)

$$\frac{D\rho_{\alpha}}{ds} s^{\cdot} = a_{\alpha k} \left(\frac{dq^k}{ds}\right)_{s=s_0} s_0^{\cdot}$$

Так как в этом случае $s^{\cdot} = s_0^{\cdot} = \mathrm{const}$, то

$$\frac{D\rho_{\alpha}}{ds} = a_{\alpha k} \left(\frac{dq^k}{ds}\right)_{s=s_0}$$

а это — дифференциальные уравнения геодезической линии [6]. Применяя абсолютный интеграл тензора, получаем уравнения геодезической в конечном виде [13]

$$\rho_{\alpha} = a_{\alpha k} q'^{k} (s - s_0) + a_{\alpha k} \rho^{k} \tag{4.2}$$

Этот же результат можно получить, применяя преобразования Галилея $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{0i} + \mathbf{v}_{0i}(t - t_0)$ $(i = 1, \ldots, N)$. Умножим эти соотношения скалярно на $m_i \partial \mathbf{r}_i / \partial q^\alpha$ и просуммируем по индексам i

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} = S_1 + S_2 (t - t_0) \tag{4.3}$$

$$S_1 = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{r}_{i0} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}, \quad S_2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_{0i} \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha}$$

Согласно известным обозначениям и изложенному выше, имеем

$$S_1 = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu x_0{}^\nu \frac{\partial x^\nu}{\partial q^\alpha} = \sum_{\nu=1}^{3N} m_\nu \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial q^k}\right)_{t=t_0} \frac{\partial x^\nu}{\partial q^\alpha} \rho_0{}^k = a_{k\alpha} \rho_0{}^k$$

$$S_2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^k}\right)_{t=t_0} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q^\alpha} \left(\frac{dq^k}{ds} \frac{ds}{dt}\right)_{t=t_0} = a_{k\alpha} q'^k s_0{}^\cdot$$

Подставляя в (4.3), получим ковариантное преобразование Галилея в виде

$$\rho_\alpha = a_{\alpha k} \rho_0{}^k + s_0{}^\cdot a_{\alpha k} q'^k (t - t_0) \tag{4.4}$$

Так как $s^\cdot = s_0{}^\cdot = (s - s_0)/(t - t_0)$, то из (4.4) следуют уравнения (4.2). Следовательно, изображающая точка механической системы при отсутствии обобщенных сил движется по геодезической в наследованном направлении. Это утверждение получено на основании преобразований Галилея и интегрирования системы уравнений движения в конечном виде. Показано также, что обобщенный импульс ковариантно постоянен при движении голономной механической системы, когда взаимодействия ее точек уничтожаются.

Эти результаты охватывают основной закон Герца [14], постулат Ньютона и Галилея и преобразования Галилея. Полученные результаты позволяют переформулировать первый постулат динамики в следующем виде: если взаимодействия тел уничтожаются, то импульс движения системы тел ковариантно постоянен и изображающая точка системы движется по геодезической линии в наследованном направлении.

Поступила 10 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вуйичич В. А.* Абсолютный интеграл тензора. Publ. Inst. Math., 1970, vol. 10 (24), p. 199—202.
2. *Vujičić V. A.* A contribution to tensor calculus. Tensor, 1972, vol. 25, p. 375—382.
3. *Рашевский П. К.* Риманова геометрия и тензорный анализ. М., Гостехиздат, 1953.
4. *Synge I. L.* Relativity: the general theory. Amsterdam, North — Holland, 1960.
5. *Ericksen I. L.* Tensor fields. Handbuch der Physik, Bd III/I, Appendix. Berlin, Hoidelberg, N. Y., Springer — Verlag, 1960.
6. *Вуйичич В. А.* Абсолютные интегралы дифференциальных уравнений геодезической. Publs. Inst. Math., 1971, vol. 12 (26), p. 143—148.
7. *Bokan N.* Some properties of fundamental bipoint tensor. Matematički vesnik, 1971, 8 (23), sv. 4.
8. *Вуйичич В. А.* Об одной возможности представления ковариантных и контравариантных координат вектора скорости. Матем. весник, 1971, кн. 8 (23), св. 4.
9. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. Изд. 2, М., «Наука», 1973.
10. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Гостехиздат, 1961.
11. *Vujičić V. A.* O tenzorskim osobinama tenzora inercije. Matematički vesnik, 1966, 3 (18), sv. 1.
12. *Andjelić T. P.* Tenzorski račun, II izdanje, «Naučna knjiga», Beograd, 1967.
13. *Vujičić V. A.* General finite equations of geodesics. Tensor, 1974, N. S., vol. 28.
14. *Hertz H.* Gesammelte Werke, Bd 3. Die Prinzipien der Mechanik in neueum Zusammenhange, Leipzig, I. A. Berth, 1910.