

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ВБЛИЗИ КОНЦА РАСТУЩЕЙ ТРЕЩИНЫ
В УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЕ**

В. А. Ибрагимов

(Ивано-Франковск)

Рассматривается задача об определении полей напряжений и деформаций в окрестности конца трещины в упругопластическом теле. На основе анализа энергетического баланса показана неадекватность для сверхтонкой структуры решений, полученных в [1-3] и учитывающих эффект разгрузки вдоль берегов трещины. Найдено, что одной из возможных причин возникновения указанной ситуации является использование для данной задачи деформационной теории с изотропным упрочнением, а также изотропной теории течения для идеального упругопластического тела. Рассматривается асимптотическое решение на основе анизотропной теории трансляционного упрочнения, сделан вывод о сохранении (для случая распространения трещины) особенности вида $1/r$ для произведения главных членов полей напряжений и деформаций.

1. Рассмотрим упругопластическую среду с трещиной, нагруженную внешними усилиями на достаточно большом удалении от кончика. Пусть трещина распространяется квазистатически (инерционные члены не учитываются).

Задача об определении полей напряжений и деформаций рассматривалась рядом авторов, при этом все полные и неполные (асимптотические в смысле разложения вблизи особой точки) решения получены в рамках двух подходов. Один из них предполагает экстраполяцию решения для неподвижной трещины на случай ее распространения и имеет основным следствием вывод о постоянстве показателя особенности для произведения главных членов тензоров напряжений и деформаций при увеличении физической нелинейности. При этом указанное произведение имеет порядок $1/r$ (см. [4,5] и др.). Решения этого типа использовались, в частности, для формулировки критериев предельного равновесия трещины [4].

Другой, физически более состоятельный подход имеет целью учет эффекта разгрузки, возникающей в точках среды, прилегающих к берегам трещины, и, может быть, вторичной догрузки. Имеющиеся решения приводят к выводу о снижении порядка особенностей по напряжениям и деформациям для упругопластических тел [1-3]. Ниже эти решения используются для анализа энергетического баланса вблизи кончика трещины.

Ограничиваясь случаем антиплоского деформирования вдоль оси x_3 , параллельной краю трещины, предположим, что прямолинейная трещина распространяется вдоль оси x_1 . Пусть материал подчиняется деформационной теории с линейным упрочнением

$$(1.1) \quad \tau_i = \frac{\tau}{\gamma} \gamma_i; \quad \tau = G\gamma, \quad \gamma \leq \gamma_0; \quad \tau = \tau_0 + g(\gamma - \gamma_0), \quad \gamma > \gamma_0 \\ d\gamma > 0; \quad 0 < g \leq G, \quad \tau_0 = G\gamma_0 \quad (i = 1, 2, \quad \tau^2 = \tau_i \tau_i, \quad \gamma^2 = \gamma_i \gamma_i)$$

Для разгрузки имеем

$$(1.2) \quad \tau_i - \tau_i^* = G(\gamma_i - \gamma_i^*), \quad \tau_i^* = \frac{\tau_*}{\gamma_*} \gamma_i^*, \quad \tau_* = \tau_0 + g(\gamma_* - \gamma_0)$$

Для вторичного нагружения

$$(1.3) \quad \tau_i - \tau_i^{**} = \frac{\tau}{\gamma} (\gamma_i - \gamma_i^{**}), \quad \tau = \tau_{**} + g(\gamma - \gamma_{**})$$

В соотношениях (1.1) — (1.3) величины τ_i , γ_i представляют значения сдвиговых напряжений и деформаций и помечены одной или двумя звездочками, если указанные значения предшествуют разгрузке или вторичной догрузке; индекс оси x_3 для краткости опущен.

Учитывая условие стационарности ($\delta / \delta x_1 + \delta / \delta l = 0$), нетрудно показать (следуя [4]), что для рассматриваемого класса особенностей искомым функциям первое начало термодинамики преобразуется к виду

$$(1.4) \quad R \sum_{n=1}^3 \int_{\Gamma_n} [(E_n + K_n) \cos \vartheta - A_n] d\vartheta = 2\gamma_s$$

$$dE = \tau_i d\gamma_i, \quad A = \tau_i v_i \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right), \quad K = \frac{1}{2} \rho l^2 \left(\frac{\partial w}{\partial x_1} \right)^2$$

Через Γ_n ($n = 1, 2, 3$) обозначены дуги окружности Γ ($x_i x_i = R^2$), лежащие в областях первичной нагрузки, разгрузки и догрузки соответственно; ϑ — полярный угол, w — смещение вдоль оси x_3 .

Левая часть соотношения (1.4) инвариантна относительно выбора R (при условии малости R сравнительно с характерными размерами тела и длиной трещины l) и определяет приращение полной энергии при увеличении l на единицу длины [4]. Заметим, что инвариантность может быть доказана и непосредственно с использованием теоремы Грина для каждой из областей и с учетом непрерывности τ_i , γ_i .

Вычислим энергию деформации для (1.1) — (1.3) и выразим ее через интенсивность девиатора напряжений. Ограничиваясь окрестностью D , в которой $\tau \gg \tau_0$, $\tau_* \gg \tau_0$, $\tau_{**} \gg \tau_0$, получим

$$(1.5) \quad 2GE_1 = \tau^2, \quad 2GE_2 = \tau^2 + \tau_*^2 (\lambda - 1)$$

$$2GE_3 = \tau^2 \lambda + (\tau_*^2 - \tau_{**}^2) (\lambda - 1), \quad \lambda = G / g$$

Асимптотическое решение сформулированной выше задачи имеет структуру [2]

$$(1.6) \quad \tau_2 + i\tau_1 = \frac{A_i}{z^m} + \frac{B_i}{x_2^m}, \quad \vartheta_{i-1} \leq \vartheta \leq \vartheta_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\vartheta_0 = 0, \quad \vartheta_3 = \pi, \quad B_1 = \text{Im } A_1 = 0$$

где A_i , B_i — некоторые комплексные постоянные, отыскиваемые с точностью до неопределенного множителя A_1 из условий непрерывности на границах $\vartheta = \vartheta_1$, ϑ_2 областей.

Показатель особенности m определяется уравнением

$$(1.7) \quad \lambda \operatorname{tg} m\vartheta_1 \operatorname{tg} m(\pi - \vartheta_1) = 1$$

и удовлетворяет неравенству $0 < m \leq 1/2$ при $0 < g \leq G$.

Внося (1.5), (1.6), в (1.4), имеем

$$(1.8) \quad R^{1-2m} (A_1^2, \vartheta_1, \vartheta_2, \lambda, m) = 2\gamma_s$$

Уравнение (1.8) не может выполняться для произвольных R при $m < 1/2$ (тем самым исключается чисто упругий случай $g = G$), что приводит к выводу о некорректности в указанном смысле решений типа (1.6). Аналогичный вывод справедлив и для задачи в рамках идеально пластической модели [1, 3]. В последнем нетрудно убедиться аналогичным путем, используя модификацию (1.4), полученную в [4] (см. формулу (3.5)).

На основании сказанного можно сделать вывод о том, что при условии $\gamma_s \neq 0$ особенность произведения главных членов тензоров напряжений и деформаций должна иметь в малой окрестности конца трещины порядок $1/r$, как и в случае неподвижной трещины.

2. Рассмотрим некоторые основные допущения, лежащие в основе решения поставленной в п. 1 задачи, с точки зрения их влияния на характер особенности решений. К их числу относятся: квазистатический характер решения, его стационарность, использование изотропных теорий пластичности.

1°. Рассмотрим асимптотическое решение задачи о динамическом стационарном распространении полубесконечной трещины. Вводя подвижную систему координат x_i , совмещенную с концом трещины, положим (ξ_i — неподвижная система)

$$(2.1) \quad \xi_1 = x_1 + ct, \quad \xi_2 = x_2, \quad \xi_3 = x_3$$

Используя уравнения движения и совместности деформаций $\tau_{1,1} + \tau_{2,2} = \rho w''$, $\gamma_{1,2} - \gamma_{2,1} = 0$ в неподвижной системе, а также соотношения (1.1) — (1.3), получим в осях x_i

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \alpha w_{,11} + w_{,22} &= 0, & 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1 \\ \beta w_{,11} + w_{,22} &= \mu \gamma_{2,2}^*, & \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2 \\ \alpha w_{,11} + w_{,22} &= \mu (1 - \mu)^{-1} (\gamma_{2,2}^* - \gamma_{2,2}^{**}), & \vartheta_2 \leq \vartheta \leq \pi \\ \alpha &= 1 - \rho c^2 / g, & \beta = 1 - \rho c^2 / G, & \mu = 1 - g / G \end{aligned}$$

Краевые условия имеют вид (квадратные скобки означают скачок функции)

$$(2.3) \quad w_{,1} = 0 \quad (\vartheta = 0), \quad [w_{,1}] = [w_{,2}] = [w] = 0 \quad (\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2)$$

Кроме того, $w_{,2} = \mu \gamma_{2,2}^*$ ($\vartheta = \pi$) при отсутствии зоны вторичной догрузки и $w_{,2} = \mu (1 - \mu)^{-1} (\gamma_{2,2}^* - \gamma_{2,2}^{**})$ при ее возникновении.

Имея в виду выяснение характерных особенностей решения, ограничимся для краткости первым из указанных случаев. Будем считать вначале, что $\alpha > 0$, $\beta > 0$ ($\alpha \leq \beta$), что соответствует значениям скорости $c < (g/\rho)^{1/2}$.

Решение первого из уравнений (2.2) ищем в виде

$$(2.4) \quad w = Cr^n \sin n\varphi \quad (\sqrt{\alpha} \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \varphi, \quad r^2 = x_1^2 + \alpha x_2^2),$$

откуда

$$\begin{aligned} \gamma_{2,2}^* &= C (m+1) \alpha^{(m+1)/2} x_2^m (\sin \varphi_1)^{-m} \cos m\varphi_1, & m = n - 1 \\ \operatorname{tg} \varphi_1 &= \sqrt{\alpha} \operatorname{tg} \vartheta_1 \end{aligned}$$

Используя второе из уравнений (2.2), в зоне разгрузки получаем

$$(2.5) \quad w = s^n (A \cos n\omega + B \sin n\omega) + \mu \int_0^{\sqrt{\alpha} x_2} \gamma_{2,2}^* dx_2$$

$$(\sqrt{\beta} \operatorname{tg} \vartheta = \operatorname{tg} \omega, \quad s^2 = \alpha (x_1^2 + \beta x_2^2))$$

Вычисляя деформации в (2.4), (2.5) и используя вместе с (2.3) условие на свободной границе $\vartheta = \pi$, получаем систему уравнений для отыскания постоянных A, B, C

Нетривиальные решения этой системы существуют, если

$$(2.6) \quad \sqrt{\alpha} (1 - \mu) \cos m\varphi_1 \cos m(\omega_1 - \pi) + \sqrt{\beta} \sin m\varphi_1 \sin m(\omega_1 - \pi) = 0$$

$$(\operatorname{tg} \omega_1 = \sqrt{\beta} \operatorname{tg} \varphi_1)$$

В статическом случае ($\alpha = \beta = 1$) это уравнение переходит в (1.7). Используя (2.6), нетрудно убедиться, что значение $m = -1/2$, обеспечивающее требуемый порядок особенности $\tau_i \gamma_i$ при $r \rightarrow 0$, возможно, как и в статическом случае, лишь для линейно-упругой среды ($\mu = 0$).

При $(g/\rho)^{1/2} < C < (G/\rho)^{1/2}$ уравнение для перемещения в первой зоне — гиперболического типа. Решение имеет вид

$$w = C [(x_1 + \sqrt{\alpha_1} x_2)^n - (x_1 - \sqrt{\alpha_1} x_2)^n], \quad \sqrt{\alpha_1} x_2 \leq x_1, \quad \alpha_1 = \rho c^2 / g - 1$$

Во второй зоне представление (2.5) сохраняется с соответствующей заменой для γ_2^* во втором слагаемом. Опуская преобразования, приведем аналог характеристического уравнения (2.6)

$$(2.7) \quad \sqrt{\beta} \sin m(\pi - \omega_1) [(\cos \varphi_1 + \sin \varphi_1)^m + (\cos \varphi_1 - \sin \varphi_1)^m] -$$

$$- \sqrt{\alpha_1} (1 - \mu) [(\cos \varphi_1 + \sin \varphi_1)^m - (\cos \varphi_1 - \sin \varphi_1)^m] \cos m(\pi - \omega_1) = 0$$

Анализ уравнения (2.7) показывает, что и для рассматриваемого интервала значений скорости распространения трещины решение искомого порядка не существует. Заметим, что случай $\alpha < 0$, $\beta < 0$ физически невозможен.

Таким образом, учет инерционных членов не меняет сделанного в конце п. 1 вывода о неадекватности решений типа (1.6), (2.5), поскольку все слагаемые в левой части уравнения (1.4), включая кинетическую энергию, будут порядка R^{1+2m} .

2°. Для оценки влияния предположения о существовании стационарного режима распространения трещины в упругопластическом материале достаточно рассмотреть следующую постановку задачи.

Пусть продвижение трещины является квазистатическим и нестационарным, так что все искомые поля и параметры m , φ_1 , φ_2 зависят от l в явном виде. Рассмотрим состояние среды, предшествующее началу распространения трещины и отвечающее некоторому значению коэффициента интенсивности напряжений K_0

$$(2.8) \quad \tau_2^\circ + i\tau_1^\circ = K_0 / (z - l_0)^{1/2}$$

(напомним, что (2.8) является асимптотическим ($\tau \gg \tau_0$) решением задачи о неподвижной трещине в среде с законом (1.1)) и смежное состояние, характеризующееся значением $K = K_0 + \Delta K$ ($\Delta K \leq K_0$), причем $\tau_i = \tau_i^\circ + \Delta \tau_i$, $w = w_0 + \Delta w$, $l = l_0 + \Delta l$.

Преобразуя первое начало термодинамики для рассматриваемого случая, получим

$$(2.9) \quad \oint_{\Gamma} \tau_i^\circ v_i w' d\Gamma - \frac{1}{g} \int_{D_1} \tau_i^\circ \tau_i' dx dy - \frac{1}{G} \int_{D_2} \tau_i^\circ \tau_i' dx dy = 2\gamma_s$$

Здесь D_1 , D_2 — зоны нагружения и разгрузки (по-прежнему имеем в виду отсутствие вторичной догрузки), $w' = \partial w / \partial l$.

Из (2.8), (2.9) следует асимптотика

$$(2.10) \quad w' \sim r^{-1/2}, \quad \tau_i' \sim r^{-3/2}, \quad r \rightarrow 0$$

Для отыскания решения используем теорию течения с изотропным линейным упругим

$$G\gamma_r' = \tau_r' + \mu\tau_0^{-1}\tau_r^\circ, \quad G\gamma_\theta' = \tau_\theta' + \mu\tau_0^{-1}\tau_\theta^\circ$$

$$\tau_r^\circ \tau_0 = \tau_r^\circ \tau_r' + \tau_\theta^\circ \tau_\theta', \quad \mu = G/g - 1, \quad z = l_0 + re^{i\theta}$$

$$\tau_0^2 = \tau_i^\circ \tau_i^\circ = f(q), \quad dq = (2d\gamma_i^p d\gamma_i^p)^{1/2}, \quad f'(q) > 0$$

В области разгрузки следует положить $\mu = 0$.

Уравнения равновесия удовлетворяются тождественно, если ввести функцию $\Phi(r, \theta)$ ($\tau_r' = \partial \Phi / (r \partial \theta$, $\tau_\theta' = -\partial \Phi / \partial r$). Полагая $\Phi = r^m \Psi(\theta)$ при условии $-1/2 \leq m < 0$, нетрудно показать, что из уравнения совместности скоростей деформаций, краевых условий и условий непрерывности скоростей напряжений и деформаций

следует

$$(2.11) \quad \Psi'' \left(1 + \mu \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right) - \left(m - \frac{1}{2} \right) \mu \sin \vartheta \Psi' + \\ + \Psi m \left[(m-1) \left(1 + \mu \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right) + 1 + \frac{\mu}{2} \right] = 0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1; \quad \Psi'(0) = 0$$

$$(2.12) \quad \Psi'' + m^2 \Psi = 0, \quad \vartheta_1 \leq \vartheta \leq \pi; \quad \Psi(\pi) = 0; \quad [\Psi(\vartheta_1)] = [\Psi'(\vartheta_1)] = 0$$

Кроме того, при $\vartheta = \vartheta_1$ нагружение является нейтральным

$$(2.13) \quad m \Psi(\vartheta_1) \cos m(\pi - \vartheta_1) + \Psi'(\vartheta_1) \sin m(\pi - \vartheta_1) = 0$$

Краевая задача (2.12), (2.13), как нетрудно проверить, имеет нетривиальное решение, если $\sin [m\pi + (1/2 - m)\vartheta_1] = 0$. Определяя значение угла ϑ_1 в функции показателя особенности, имеем]

$$(2.14) \quad \vartheta_1 = m\pi / (m - 1/2)$$

Рассмотрим теперь краевую задачу (2.11), (2.13), которая вследствие (2.10) должна иметь собственное значение $m = -1/2$, и покажем, что она не имеет нетривиальных решений при $\mu \neq 0$.

Предположим, что решение аналитическое в окрестности $\mu = 0$

$$(2.15) \quad \Psi(\vartheta, \mu) = \Psi_0(\vartheta) + \mu \Psi_1(\vartheta) + \mu^2 \Psi_2(\vartheta) + \dots$$

Ясно, что функция $\Psi_0(\vartheta)$ дает решение линейно-упругой задачи.

Для дальнейшего достаточно рассмотреть случай $\mu = o(1)$, поэтому, сохраняя в разложении (2.15) члены не выше первого порядка малости и внося в (2.11), получим уравнения для определения функций $\Psi_0(\vartheta)$, $\Psi_1(\vartheta)$

$$(2.16) \quad L[\Psi_0(\vartheta)] = 0, \quad L[\Psi_1(\vartheta)] + M[\Psi_0(\vartheta)] = 0, \quad L[\Psi] \equiv \Psi'' + \frac{1}{4} \Psi \\ M[\Psi] = \Psi'' \sin^2 \frac{\vartheta}{2} + \Psi' \sin \vartheta - \frac{1}{4} \Psi \left(1 - 3 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} \right)$$

Опуская соответствующие преобразования, укажем, что решения уравнений (2.16) без труда отыскиваются в явном виде и содержат четыре произвольные постоянные. Последние определяются из системы линейных уравнений, вытекающей из краевых условий в (2.11), (2.13) и условий четности $\Psi_0(\vartheta)$, $\Psi_1(\vartheta)$. Указанная система имеет нетривиальные решения лишь при $\mu = 0$.

Таким образом, для $\mu \neq 0$ асимптотика вида (2.10) не может быть получена, и следовательно, предположение о стационарности режима развития трещины не является причиной неадекватности рассматриваемых решений.

3°. Рассмотрим вопрос о законности использования различных теорий пластичности для задач о продвижении трещины.

Прежде всего покажем, что деформационная теория с изотропным упрочнением для задач указанного типа несостоятельна. Действительно, нагружение в любой точке, принадлежащей малой окрестности кончика, в противоположность случаю неподвижной трещины существенно отличается от пропорционального, поэтому использование конечных соотношений «напряжение — деформация» может привести к нарушению постулата Друккера. Будянским [6] показано, что деформационная теория непротиворечива в указанном смысле, если для любого момента процесса нагружения выполнено соотношение

$$(2.17) \quad \alpha < \beta \quad (\operatorname{tg} \beta = (G_s G - G_t G_s) / (G_t G - G_t G_s))$$

где α — угол между радиус-вектором точки в девиаторном пространстве напряжений и касательной к траектории нагружения, G_t , G_s — касательный и секущий модули, G — модуль разгрузки.

В теории пластичности (1.1) — (1.3)] имеем (для] решения асимптотического) $G_t = G_s$, и вследствие (2.17)

$$(2.18) \quad \beta = \pi / 4, \quad \alpha < \pi / 4$$

Используя решение (1.6), например для зоны нагрузки, найдем границы интервала для значения ϑ , отвечающего неравенству (2.18). Варьируя (1.6), находим, что

$$\delta\tau_{1,2} = \pm Amr^{-m-2} \left[\frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \frac{(m+1)\vartheta}{\cos \vartheta} \right] \delta x_1$$

Учитывая, что $\tau \delta \tau \cos \alpha = \tau_i \delta \tau_i$, для угла догрузки α имеем $\alpha = \vartheta$. Отсюда и из (2.18) получаем искомое неравенство $\vartheta < \pi/4$. Поэтому для сектора $\pi/4 \leq \vartheta \leq \vartheta_1$ (принадлежащего зоне нагрузки при $\vartheta_1 > \pi/4$) неравенство (2.17) нарушается, и применение деформационной теории не может считаться оправданным. Последнее ясно также в связи с известным фактом отсутствия непрерывности] пластического модуля сдвига при переходе от активного нагружения к разгрузке [7]. Поэтому при решении краевой задачи не удастся удовлетворить одному из условий нейтрального нагружения $\lim \tau' = 0$ при $\vartheta \rightarrow \vartheta_1 \pm 0$ (что приводит к потере соотношения, аналогичного (2.14)).

Рассмотренные в [1], а также в п. 2° задачи дают, в известной степени, основания также для пессимистических выводов в отношении использования изотропной теории течения. Известно [7], что для многозвенных траекторий нагружения опытные данные более полно подтверждают теорию течения с анизотропным упрочнением. Поэтому ниже рассматривается один из вариантов теории указанного вида.

3. Предположим, что упрочнение имеет трансляционный характер, а начальная анизотропия среды отсутствует. Определяющие соотношения в случае линейного упрочнения имеют вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \gamma_i^{\cdot} &= \gamma_i^{\cdot e} + \gamma_i^{\cdot p}, \quad \gamma_i^{\cdot e} = \frac{\tau_i^{\cdot}}{G}, \quad \gamma_i^{\cdot p} = \frac{1}{ak^2} (\tau_i^{\circ} \tau_i^{\cdot}) \tau_i^{\circ} \\ \tau_i^{\circ} &= \tau_i - s_i, \quad s_i = a\gamma_i^{\cdot p}, \quad \tau_i^{\circ} \tau_i^{\circ} = k^2, \quad a > 0, \quad i = 1, 2 \end{aligned}$$

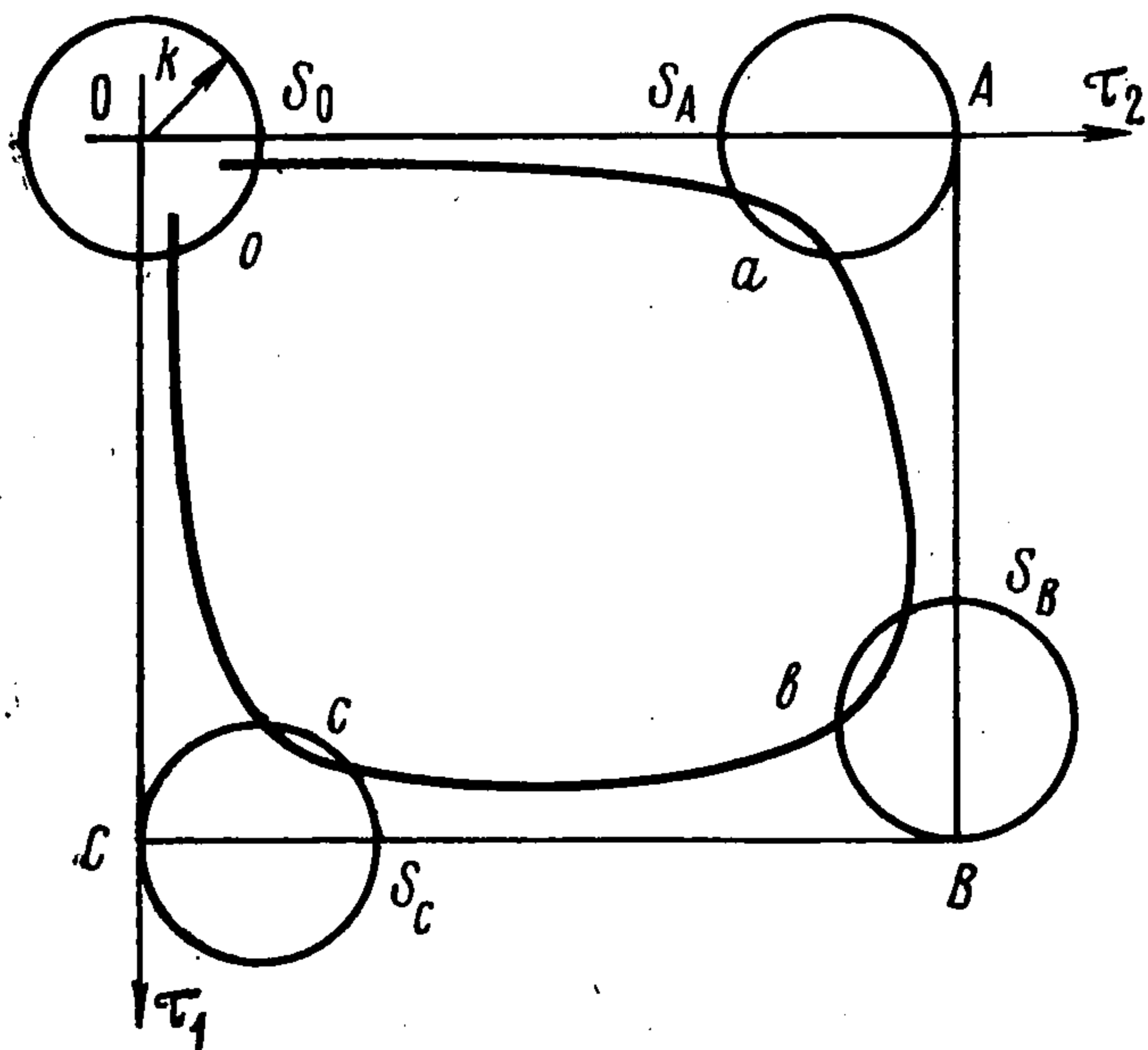
Пользуясь соотношениями (3.1), оценим остаточные деформации в окрестности точки среды, находящейся на малом расстоянии x_2 от Ox_1 . Траектория нагружения в пространстве напряжений показана линией $oabco$ на фиг. 1 и близка к четырехзвенной ломаной $OABCO$. Начальная поверхность S_0 нагружения — окружность радиуса k (k — предел текучести при чистом сдвиге). Интегрируя уравнения (3.1) вдоль $OABC$ и отмечая индексами значения упругих и пластических составляющих компонент деформаций, соответствующих угловым точкам траектории, получим

$$\begin{aligned} (OA): \quad & \tau_1 = 0, \quad \tau_1^{\circ} = 0, \quad s_1 = 0, \quad \gamma_1^{\cdot p} = \gamma_1^{\cdot e} = 0 \\ & \tau_2^{\circ} = \tau_2 - s_2 = k, \quad 0 \leq \tau_2 \leq T, \quad (\gamma_2^{\cdot p})_A = (T - k) / a \\ & (\gamma_2^{\cdot p})_A = T / G \quad (T \rightarrow \infty) \\ (AB): \quad & -T \leq \tau_1 \leq 0, \quad \tau_2 = T, \quad \tau_2^{\circ} = T - s_2, \quad (\gamma_1^{\cdot p})_B = \\ & = (\kappa - T) / a \quad (\gamma_1^{\cdot e})_B = -T / G, \quad (\gamma_2^{\cdot p})_B = (T + q) / a \\ & (\gamma_2^{\cdot e})_B = (T + q) / G \\ & q^2 = k^2 - \kappa^2, \quad \kappa = k(1 - e^{-2T/k}) / (1 + e^{-2T/k}) \\ (BC): \quad & \tau_1 = -T, \quad 0 \leq \tau_2 \leq T, \quad \tau_1^{\circ} = -T - s_1, \quad (\gamma_2^{\cdot e})_c = 0 \\ & (\gamma_2^{\cdot p})_c = \frac{k}{a} \left(1 - e^{-2T/k} \frac{k - q}{k + q} \right) \left(1 + e^{-2T/k} \frac{k - q}{k + q} \right) \\ & (\gamma_1^{\cdot e})_c = -\frac{T}{G}, \quad (\gamma_1^{\cdot p})_c = -\frac{T}{a} + \frac{1}{a} [k^2 - (a\gamma_2^{\cdot p})_c^2]^{1/2} \\ & (\gamma_1^{\cdot p})_c \approx -\frac{T}{a} \quad (T \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

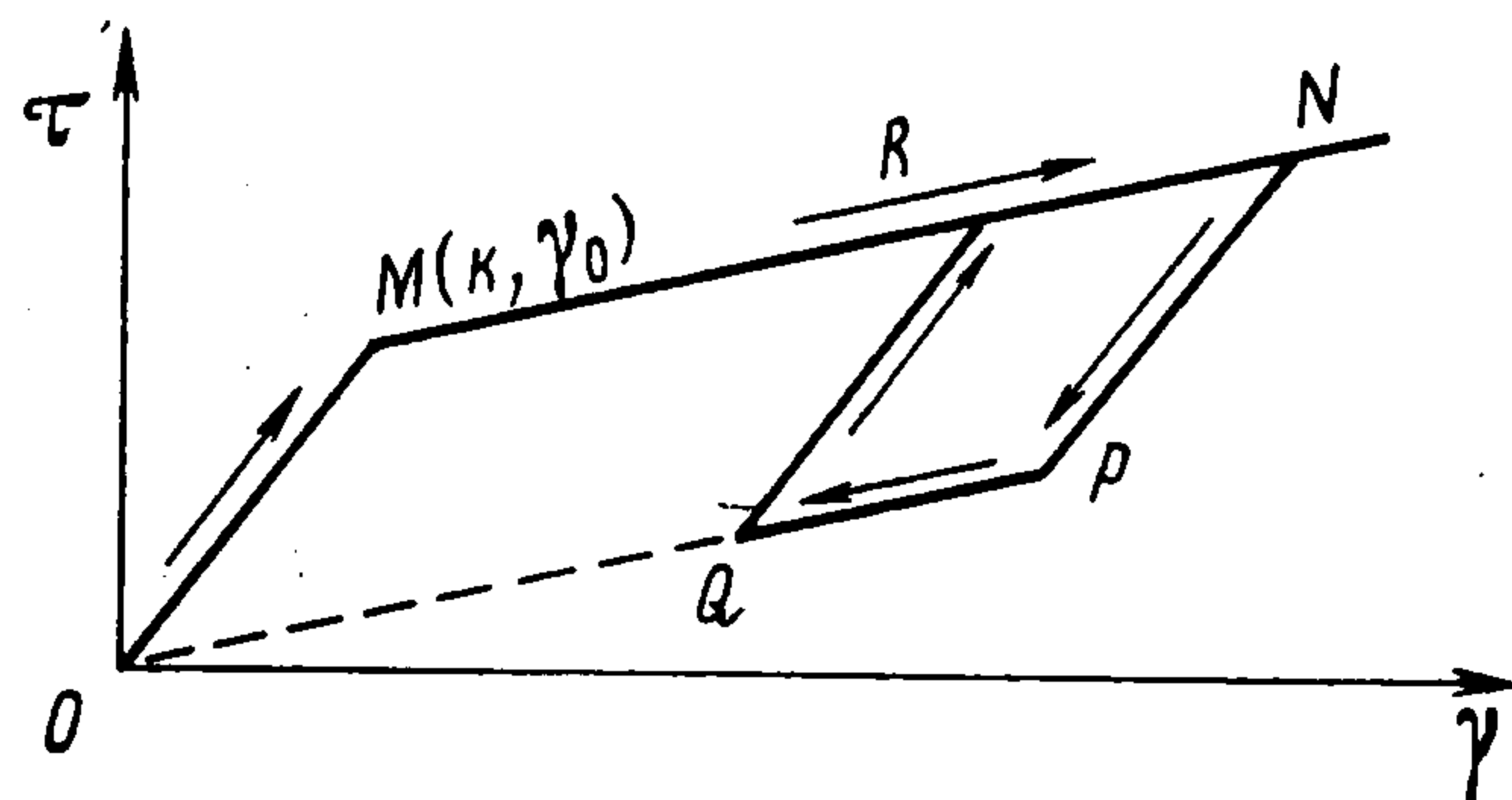
Имея в виду асимптотический анализ (траектория abc), дадим оценку остаточных (неупругих) деформаций вблизи верхнего берега трещины

$$(3.2) \quad \gamma_1^p = -\frac{T}{a} + O(1), \quad \gamma_2^p = O(1), \quad T \rightarrow \infty$$

Таким образом, сдвиговая деформация γ_1^p , вычисленная по теории трансляционного упрочнения, велика, тогда как величина γ_2^p остается ограниченной. В рамках изотропной теории аналогичный вывод справедлив лишь для неподвижной трещины [4] (при сохранении особенности $1/r$). Следует отметить, что определяющие соотношения рассматриваемой теории для некоторых путей нагружения отвечают деформированию



Фиг. 1



Фиг. 2

с отрицательной диссипацией, поэтому приведенное выше объяснение, по-видимому, не является единственно возможным.

4. Рассмотрим асимптотическое решение задачи о квазистатическом стационарном росте трещины в упругопластическом материале с линейным трансляционным упрочнением (3.1).

С целью упрощения сформулируем конечные соотношения деформационной теории, отвечающей при одноосном нагружении соотношениям (3.1). Последние, как нетрудно убедиться, имеют вид

$$(4.1) \quad \tau_i = G\gamma_i \quad (\gamma \leq \gamma_0)$$

$$(4.2) \quad \tau_i = \frac{\tau}{\gamma} \gamma_i, \quad \tau = k + g(\gamma - \gamma_0) \quad (\gamma \geq \gamma_0, \quad d\gamma > 0)$$

$$(4.3) \quad \tau_i - \tau_i^* = G(\gamma_i - \gamma_i^*) \quad (\gamma_{**} \leq \gamma \leq \gamma_*, \quad d\gamma < 0)$$

$$\gamma_{**} - \gamma_* = \frac{2k}{G}$$

$$(4.4) \quad \tau_i - \tau_i^{**} = \frac{\tau}{\gamma} (\gamma_i - \gamma_i^{**}) \quad (\gamma \leq \gamma_{**}, \quad d\gamma < 0)$$

$$\tau = \tau_{**} + g(\gamma - \gamma_{**})$$

$$(4.5) \quad \tau_i - \tau_i^{***} = G(\gamma_i - \gamma_i^{***}) \quad (\gamma < \gamma_{**}, \quad d\gamma > 0), \quad \tau_{**} = \tau_* - 2k$$

В соотношениях (4.1) — (4.5) компоненты напряжений и деформаций, отмеченные одной, двумя и тремя звездочками, связаны соответственно зависимостями (4.2) — (4.4), где следует положить $\gamma = \gamma_*$, γ_{**} , γ_{***} .

Для одноосного случая диаграмма $\tau \sim \gamma$ показана на фиг. 2 ($N = N(\tau_*, \gamma_*)$, $P = P(\tau_{**}, \gamma_{**})$, $Q = Q(\tau_{***}, \gamma_{***})$), откуда следует, что нагружение в любой точке среды $|x_2| = o(l)$ в зоне первичного нагружения перед кончиком трещины следует участку MN . В процессе роста трещины наступает разгрузка, сначала следующая участку NP с модулем G , а затем участку PQ (модуль g).

Если имеется зона вторичной догрузки, напряженное состояние следует звеньям QR , RN и т. д.

Решение имеет вид

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \tau_2 + i\tau_1 &= \frac{A_1}{z^m}, \quad 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_1 \\ \tau_2 + i\tau_1 &= \frac{A_v}{z^m} + \frac{B_v}{x_2}, \quad \vartheta_{v-1} \leq \vartheta \leq \vartheta_v \\ m > 0, \quad \text{Im } A_1 &= 0, \quad r \gg k; \quad v = 2, \dots, n \end{aligned}$$

где ϑ_1 , ϑ_v — асимптотические углы наклона касательных к границам зоны первичного нагружения, линии раздела зоны разгрузки ($v = 2, \dots$) и отвечающих точкам N , P , Q , R, \dots ; m — неизвестный заранее показатель особенности, n — число зон.

Вычисляя интенсивность касательных напряжений в (4.6) для $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$ и учитывая условия

$$\tau(\vartheta_1) = \tau_*, \quad \tau(\vartheta_2) = \tau_{**}, \quad \tau_{**} - \tau_* = 2k$$

получим

$$(4.7) \quad x_2^{-m/2} [A_2 (\sin \vartheta_1)^m e^{-im\vartheta_1} + B_2] - x_2^{-m/2} [A_2 (\sin \vartheta_2)^m e^{-im\vartheta_2} + B_2] = 2k$$

Учитывая сингулярный характер решения и сохраняя в (4.7) слагаемые порядка $x_2^{-m/2}$ при $x_2 \rightarrow 0$, убеждаемся, что нетривиальное решение существует лишь при $\vartheta_1 = \vartheta_2$. Это и следовало ожидать, поскольку заранее очевидно, что зона $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$, отвечающая NP , вырождается для асимптотического решения ($r \rightarrow 0$, $\tau_* \rightarrow \infty$) в линию $\vartheta = \vartheta_1 = \vartheta_2$. Заметим, что доказанное утверждение эквивалентно отождествлению точек N и P диаграммы.

Аналогичный вывод справедлив, очевидно, для любой зоны, в которой имеют место соотношения из (4.1) — (4.5) с модулем G (например, для участка QR на фиг. 2). Таким образом, для точек среды, лежащих в малой окрестности конца трещины, деформирование асимптотически следует участку упрочнения (4.2).

Требую теперь непрерывности напряжения на $\vartheta = \vartheta_v$ и выполнения условия $\tau_2 = 0$ при $\vartheta = \pi$, получим, опуская несложные преобразования, $B_v = 0$, $A_v = A_1$, $m = 1/2$ ($v = 2, \dots, n$). Отсюда следует, что сингулярное решение задачи имеет для случая линейного упрочнения такой же показатель особенности, как и в упругом решении. Поэтому главный

член $\tau_i \gamma_i \sim 1/r$ при $r \rightarrow 0$. Последний результат легко распространяется на случай нелинейного упрочнения.

В рамках концепции квазихрупкого разрушения из соотношений (1.4), (4.6) следует также, что критерий предельного равновесия, строго обоснованный для линейно-упругих сред, справедлив и при упругопластическом деформировании (величина A_1 имеет смысл коэффициента интенсивности сверхтонкой структуры).

Заметим, что полное решение задачи, учитывающее поля τ_i, γ_i вдали от кончика (и определяющее, в частности, значение A_1), будет отличаться от линейно-упругого, поэтому A_1 не совпадает с коэффициентом интенсивности тонкой структуры. Из анализа размерностей следует

$$A_1 = f\left(\frac{g}{G}, \frac{l}{L}, \frac{\tau_\infty}{G}\right) gl^{1/2}$$

(L — характерный размер тела, τ_∞ — внешняя нагрузка), поэтому критерий квазихрупкого разрушения может зависеть от отношения касательного модуля к модулю разгрузки.

Автор признателен Л. А. Галину, В. Д. Ключникову, Г. П. Черепанову за ценные обсуждения результатов работы.

Поступила 19 XII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Chitale A., McClintock F. Elastic-plastic mechanics of steady crack growth under anti-plane shear. J. Mech. and Phys. Solids, 1971, vol. 19, No. 3.
2. Слепьян Л. И. Деформация у края растущей трещины. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
3. Слепьян Л. И. Растущая трещина при плоской деформации упругопластического тела. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1.
4. Черепанов Г. П. О распространении трещины в сплошной среде. ПММ, 1967, т. 31, вып. 3.
5. Rice J. R., Rosengren G. F. Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material. J. Mech. and Phys. Solids, 1968, vol. 16, № 1.
6. Budiansky B. A reassessment of deformation theories of plasticity. J. Appl. Mech., 1959, vol. 26, No. 2.
7. Качанов Л. М. Теория пластичности. М., «Наука», 1969.