

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЛНЫ РАЗГРУЗКИ

С. Д. Алгазин, В. С. Ленский

(Москва)

Определение формы волны разгрузки [1] в теории распространения упругопластических волн в общем случае сводится к решению функционального уравнения сложной структуры. Для приближенного построения волны разгрузки предложен метод характеристик [2], в частных случаях нагружения получены формулы для определения ее начального наклона [3] и формулы для следующих производных в начальной точке [4-6]. В работе [7] дано исследование общих свойств волны разгрузки. Показано, что при асимптотическом стремлении к нулю нагрузки на конце полубесконечного стержня волна разгрузки имеет асимптоту с наклоном, определяемым скоростью упругой волны.

В предлагаемой работе дано исследование функционального уравнения и предложен метод решения этого уравнения в виде степенного ряда. Этот подход к задаче позволяет получить как известные результаты, так и некоторые новые. В общем случае нагружения получены формулы для определения начального наклона волны разгрузки и указан способ определения следующих производных в начальной точке; для линейного упрочнения найдены условия, при которых волна разгрузки является прямой; доказано существование асимптот, отличных от указанных в [7]; показано, как по некоторому известному участку волны разгрузки продолжить решение на соседние участки; исследована волна разгрузки в материале с запаздывающей текучестью.

1. Система функциональных уравнений при произвольном упрочнении. Рассмотрим полуограниченный стержень $x \geq 0$, на конце которого $x = 0$ нагрузка задана через деформацию

$$(1.1) \quad \begin{aligned} u_x(0, t) &= f(t) \\ f(0) &\leq \varepsilon_s, \quad f'(t) \geq 0, \quad 0 \leq t \leq t_0; \quad f'(t) < 0, \quad t > t_0 \end{aligned}$$

Здесь $u(x, t)$ — продольное перемещение частицы, $u_x = \partial u / \partial x$.

Пусть зависимость между напряжением σ и активной деформацией ε задана в виде $\sigma = \Phi(\varepsilon)$, $\Phi'(\varepsilon) > 0$, $\Phi''(\varepsilon) < 0$, ε_s — предел упругих деформаций. При разгрузке от деформации $\varepsilon_0 > \varepsilon_s$ принимается линейная зависимость $\sigma - \sigma_0 = E(\varepsilon - \varepsilon_0)$, где E — модуль Юнга и $\sigma_0 = \Phi(\varepsilon_0)$.

В области активных упругопластических деформаций решение уравнения движения

$$a^2 u_{xx} = u_{tt} \quad (a^2 = \Phi'(\varepsilon) / \rho)$$

при нулевых начальных данных и граничном условии (1.1) представляется в неявном виде

$$(1.2) \quad u_x = f\left(t - \frac{x}{a(u_x)}\right), \quad u_t = - \int_0^{u_x} a(\varepsilon) d\varepsilon \equiv -\psi(u_x)$$

Если волна разгрузки $x = \varphi(t)$ (при $\varphi(t_0) = 0$) — фронт сильного разрыва, то она является прямой $x = a_0(t - t_0)$; $a_0^2 = E/\rho$ [8,9]. Здесь рассматривается наиболее интересный случай криволинейной волны разгрузки, представляющей собой фронт слабого разрыва.

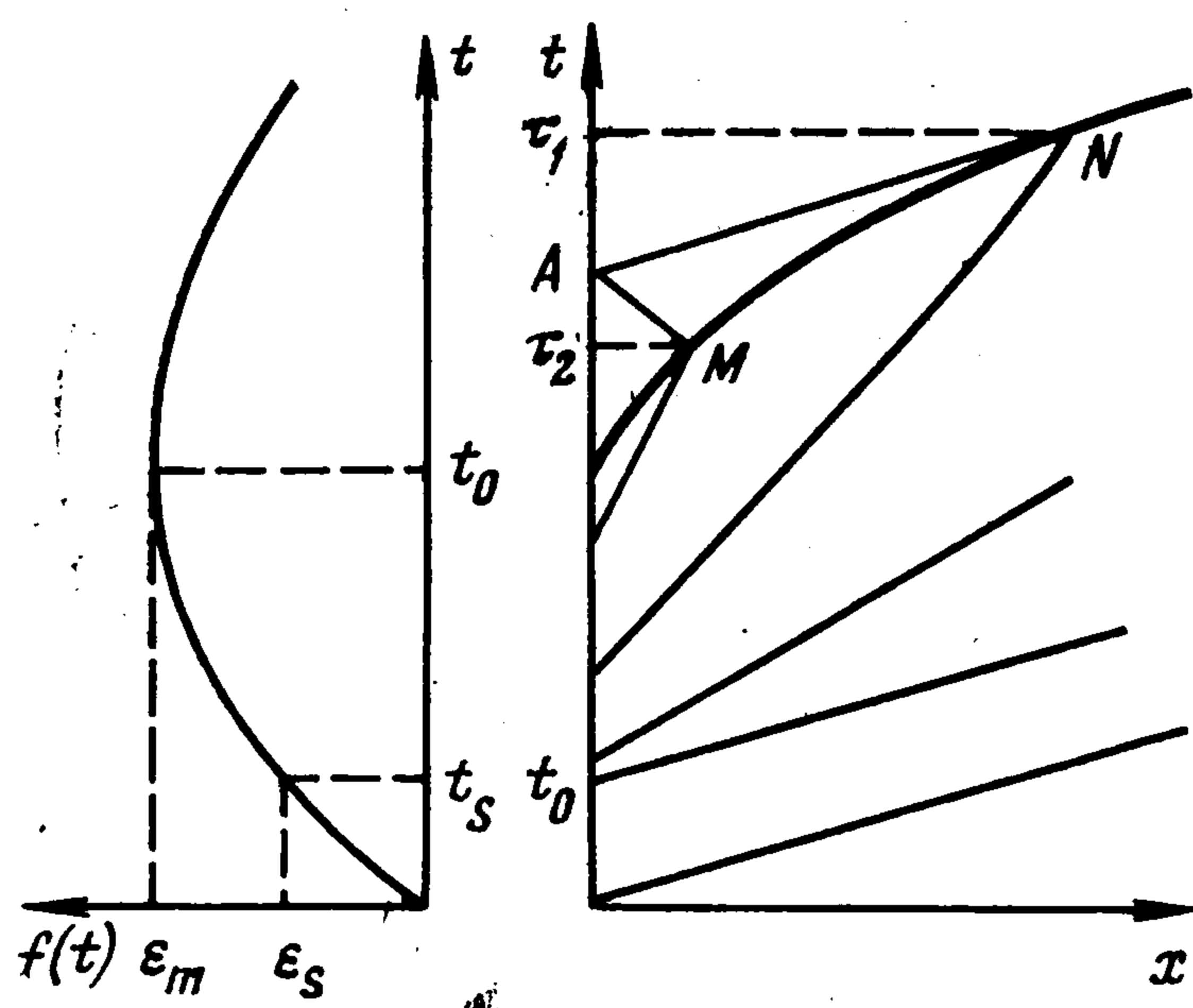
В области пассивных деформаций $x < \varphi(t)$, $t > t_0$ параметры движения определяются из решения задачи

$$(1.3) \quad u_{tt} = a_0^2 u_{xx} + \frac{1}{\rho} \frac{d\sigma_0}{dx} - a_0^2 \frac{d\varepsilon_0}{dx}$$

$$(1.4) \quad u_x(0, t) = f(t)$$

$$(1.5) \quad u_x^{(2)} = u_x^{(1)} \equiv \varepsilon_0(x), \quad u_t^{(2)} = u_t^{(1)}, \quad x = \varphi(t)$$

где индексы 1 и 2 относятся к областям активных и пассивных деформаций



Фиг. 1

соответственно, $\sigma_0(x) = \Phi(\varepsilon_0)$ и $\varepsilon_0(x)$ — значения напряжения и деформации на волне разгрузки.

Рассмотрим криволинейный треугольник AMN (фиг. 1), где $N(\varphi(\tau_1), \tau_1)$ и $M(\varphi(\tau_2), \tau_2)$ — точки пересечения волны разгрузки, показанной жирной линией, и характеристик положительного и отрицательного наклона, выходящих из некоторой точки $A(0, t)$ при $t > t_0$. Вдоль характеристик уравнения (1.3) с учетом (1.5) можно получить соотношения

$$(1.6) \quad \sigma_0(\varphi(\tau_1)) / \rho a_0 + \psi(\varepsilon_0[\varphi(\tau_1)]) = a_0 u_x - u_t + (\sigma_0 - E\varepsilon_0) / \rho a_0$$

$$(1.7) \quad \sigma_0(\varphi(\tau_2)) / \rho a_0 - \psi(\varepsilon_0[\varphi(\tau_2)]) = a_0 u_x + u_t + (\sigma_0 - E\varepsilon_0) / \rho a_0$$

Применяя равенства (1.6) и (1.7) в общей точке A , где $u_x = f(t)$, и складывая их с учетом выражения (1.2) для u_t , получим

$$(1.8) \quad \int_0^{\varepsilon_0(\varphi(\tau_1))} \left[\frac{a^2(\xi)}{a_0} + a(\xi) \right] d\xi + \int_0^{\varepsilon_0(\varphi(\tau_2))} \left[\frac{a^2(\xi)}{a_0} - a(\xi) \right] d\xi = \\ = 2a_0 f(t) + \frac{2}{\rho a_0} [\Phi(\varepsilon_m) - E\varepsilon_m]$$

Здесь $\varepsilon_m = \varepsilon_0(0) = f(t_0)$ — максимальная деформация на конце стержня.

Условия (1.5) применительно к точкам N и M , согласно (1.2), принимают вид

$$(1.9) \quad \varepsilon_0(\varphi(\tau_1)) = f\left(\tau_1 - \frac{\varphi(\tau_1)}{a(\varepsilon_0[\varphi(\tau_1)])}\right)$$

$$(1.10) \quad \varepsilon_0(\varphi(\tau_2)) = f\left(\tau_2 - \frac{\varphi(\tau_2)}{a(\varepsilon_0[\varphi(\tau_2)])}\right)$$

Наконец, согласно определению (фиг. 1), имеем

$$(1.11) \quad \tau_1 - t = \varphi(\tau_1) / a_0, \quad t - \tau_2 = \varphi(\tau_2) / a_0$$

Равенства (1.8) — (1.11) будем рассматривать как систему функциональных уравнений относительно неизвестных функций $\varphi(t)$, $\tau_1(t)$, $\tau_2(t)$, $\varepsilon_0(x)$. При этом равенства (1.9) и (1.10) по существу одинаковы и выписаны раздельно для удобства. Решение системы (1.8) — (1.11) определяет волну разгрузки $x = \varphi(t)$ и значение деформации на ней $\varepsilon_0(x)$.

Исследуем асимптотическое поведение волны разгрузки. Заметим, что правая часть в уравнении (1.8) равна $2p(t) / \rho a_0$, где $p(t)$ — напряжение на конце стержня.

Пусть при $\tau_1 \rightarrow \infty$ величины t и τ_2 стремятся к бесконечности. Тогда $\varepsilon_0(\varphi(\tau_1))$ и $\varepsilon_0(\varphi(\tau_2))$ стремятся к конечному пределу $\varepsilon_* \geq \varepsilon_s$.

Переходя в (1.8) к пределу, получим

$$\rho \int_0^{\varepsilon_*} a^2(\xi) d\xi = p(\infty)$$

Если $0 \leq p(\infty) < \sigma_s$, то полученное равенство противоречиво, поэтому при $\tau_1 \rightarrow \infty$ величина t стремится к конечному пределу t_* и прямая $x = a_0(t - t_*)$ — асимптота, к которой кривая $x = \varphi(t)$ стремится снизу. При этом на волне разгрузки в бесконечности $\varepsilon_* = \varepsilon_s$. Этот случай подобен рассмотренному в [7].

Если $p(\infty) \geq \sigma_s$, то из полученного равенства следует, что $\sigma_* = p(\infty)$, где σ_* — напряжение на волне разгрузки в бесконечности. В этом случае волна разгрузки стремится к асимптоте $x = a(f(t_{**}))(t - t_{**})$ сверху, где $t_{**} < t_0$ — момент времени, в который $p(t_{**}) = p(\infty)$.

2. Определение начальной скорости волны разгрузки. Начальная скорость распространения волны разгрузки $c_1 = \varphi'(t_0)$ зависит от поведения функции нагрузки $f(t)$ в окрестности точки начала разгрузки. Рассмотрим несколько случаев.

1) Пусть t_0 — точка разрыва $f'(t)$, т. е.

$$f'(t_0 - 0) = \alpha_1 > 0, \quad f'(t_0 + 0) = \alpha_2 < 0$$

Дифференцируя (1.8) по t , получаем

$$(2.1) \quad \left[\frac{b^2(\tau_1)}{a_0} + b(\tau_1) \right] \varepsilon_0'(\varphi(\tau_1)) \varphi'(\tau_1) \frac{d\tau_1}{dt} + \left[\frac{b^2(\tau_2)}{a_0} - b(\tau_2) \right] \times \\ \times \varepsilon_0'(\varphi(\tau_2)) \varphi'(\tau_2) \frac{d\tau_2}{dt} = 2a_0 f'(t), \quad b(\tau) = a(\varepsilon_0[\varphi(\tau)])$$

Входящие в (2.1) производные ε_0' , $d\tau_1/dt$, $d\tau_2/dt$ определяются из соотношений (1.9) — (1.11), продифференцированных по t . В этих продифференцированных равенствах при t , τ_1 , τ_2 , стремящихся к $t_0 + 0$, имеют место соотношения

$$\varphi(\tau_1) \rightarrow 0, \quad \varphi(\tau_2) \rightarrow 0, \quad \varepsilon_0(\varphi(\tau_1)) \rightarrow f(t_0), \quad \varepsilon_0(\varphi(\tau_2)) \rightarrow f(t_0)$$

$$b(\tau_1) \rightarrow a(f(t_0)) \equiv a_p, \quad b(\tau_2) \rightarrow a(f(t_0)) \equiv a_p$$

$$\tau_1 - \frac{\varphi(\tau_1)}{b(\tau_1)} \rightarrow t_0 - 0, \quad \tau_2 - \frac{\varphi(\tau_2)}{b(\tau_2)} \rightarrow t_0 - 0$$

$$\frac{d\varepsilon_0(\varphi(\tau_2))}{dt} \rightarrow \alpha_1 \frac{a_0}{a_p} \frac{a_p - c_1}{a_0 + c_1}$$

$$\frac{d\varepsilon_0(\varphi(\tau_1))}{dt} \rightarrow \alpha_1 \frac{a_0}{a_p} \frac{a_p - c_1}{a_0 - c_1}, \quad c_1 \neq a_0$$

Устремляя в (2.1) t к $t_0 + 0$ и учитывая полученные предельные значения, найдем

$$(2.2) \quad (a_p + a_0) \frac{a_p - c_1}{a_0 - c_1} + (a_p - a_0) \frac{a_p - c_1}{a_0 + c_1} = \frac{2a_0}{m} \quad \left(m = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)$$

$$c_1 = [(a_0^2 - ma_p^2) / (1 - m)]^{1/2}$$

Другим методом эта формула была получена в [3, 8, 9].

2) Построим уравнение для c_1 в случае, когда

$$f^{(n)}(t_0 + 0) = f^{(n)}(t_0 - 0) \neq 0, \quad f^{(p)}(t_0) = 0, \quad 1 \leq p \leq n - 1$$

причем n четное и $f^{(n)}(t_0) < 0$, так как $f(t)$ имеет максимум при $t = t_0$.

Дифференцируя равенства (1.8) — (1.11) n раз по t и переходя к пределу при $t \rightarrow t_0 + 0$, получим, аналогично предыдущему, уравнение степени $2n$ относительно c_1

$$(2.3) \quad P(c_1) \equiv \left(\frac{a_0}{a_p}\right)^{n-1} (a_p - c_1)^n [(a_0 + a_p)(a_0 + c_1)^n - (a_0 - a_p)(a_0 - c_1)^n] - 2a_0(a_0^2 - c_1^2)^n = 0$$

Величина c_1 удовлетворяет неравенствам $a_p \leq c_1 \leq a_0$, при этом $P(a_p) < 0$, $P(a_0) > 0$ и $P'(c_1) > 0$.

Следовательно, уравнение (2.3) имеет один действительный корень в интервале (a_p, a_0) .

3) Рассмотрим теперь случай, когда $f^{(n)}(t)$ имеет в точке t_0 разрыв

$$f^{(n)}(t_0 - 0) = \alpha \neq 0, \quad f^{(n)}(t_0 + 0) = \beta \neq 0$$

$$f^{(p)}(t_0) = 0, \quad 1 \leq p \leq n - 1$$

Здесь $\alpha < 0$, $\beta < 0$ при n четном и $\alpha > 0$, $\beta < 0$ при n нечетном. Аналогично предыдущему получим для c_1 уравнение

$$(2.4) \quad \alpha \left(\frac{a_0}{a_p}\right)^n \left[\left(\frac{a_p - c_1}{a_0 - c_1}\right)^n - \frac{a_0 - a_p}{a_0 + a_p} \left(\frac{a_p - c_1}{a_0 + c_1}\right)^n \right] = \frac{2a_0^2\beta}{a_p(a_0 + a_p)}$$

В интервале (a_p, a_0) уравнение (2.4) имеет один действительный корень и при $n = 1$ дает для c_1 значение (2.2).

Если на конце стержня задано напряжение $p(t)$ и эта функция вида, описанного выше при анализе второго случая, то вследствие различия законов связи $\sigma \sim \varepsilon$ при нагрузке и разгрузке функция $f(t)$ имеет раз-

рывную n -ю производную, причем $\alpha a_p^2 = \beta a_0^2$. При этом из (2.4) получим для определения c_1 уравнение

$$(2.5) \quad \left(\frac{a_0}{a_p}\right)^n \left[\left(\frac{a_p - c_1}{a_0 - c_1}\right)^n - \frac{a_0 - a_p}{a_0 + a_p} \left(\frac{a_p - c_1}{a_0 + c_1}\right)^n \right] = \frac{2a_p}{a_0 + a_p}$$

которое при $n = 2$ принимает вид

$$c_1^2 (a_p c_1^2 + 2a_0^2 c_1 - 3a_0^2 a_p) = 0$$

Положительный корень этого уравнения

$$c_1 = a_0 \left[\left(\frac{a_0^2}{a_p^2} + 3 \right)^{1/2} - \frac{a_0}{a_p} \right]$$

Другим методом эта формула получена в [3, 9].

4) Пусть $f^{(n)}(t_0 - 0) = \alpha \neq 0$, $f^{(p)}(t_0 - 0) = 0$ при $1 \leq p \leq n - 1$, причем $\alpha < 0$ при n четном, $\alpha > 0$ при n нечетном, а $f^{(k)}(t_0 + 0) \equiv \beta < 0$, $f^{(p)}(t_0 + 0) = 0$ при $1 \leq p \leq k - 1$.

а) Если $k = n$, то c_1 определяется из уравнения (2.4).

б) Если $k > n$, то для определения c_1 имеем уравнение

$$\left(\frac{a_p - c_1}{a_0 - c_1}\right)^n - \frac{a_0 - a_p}{a_0 + a_p} \left(\frac{a_p - c_1}{a_0 + c_1}\right)^n = 0$$

откуда $c_1 = a_p$.

в) Пусть $k < n$. Заметим, что все полученные выше уравнения для определения $c_1 = \varphi'(t_0)$ выведены в предположении, что $c_1 \neq a_0$. В рассматриваемом случае это предположение ведет к противоречию. Действительно, продифференцировав равенства (1.8) — (1.11) k раз по t и перейдя к пределу при $t \rightarrow t_0 + 0$, получим противоречивое равенство. Следовательно, в данном случае $c_1 = a_0$.

3. Аналитическое определение волны разгрузки. Предположим, что функция $\varphi(t)$ представима рядом Тейлора

$$\varphi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n$$

Покажем, что, последовательно дифференцируя функциональные уравнения (1.8) — (1.11) по t и переходя к пределу при $t \rightarrow t_0 + 0$, можно вычислить значения производных $\varphi^{(n)}(t_0)$ любого порядка.

Введем обозначения

$$\varepsilon_{01} \equiv \varepsilon_0(\varphi(\tau_1)), \quad \varepsilon_{02} \equiv \varepsilon_0(\varphi(\tau_2))$$

$$A_1(\varepsilon_{01}) = \int_0^{\varepsilon_{01}} \left(\frac{a^2(\xi)}{a_0} + a(\xi) \right) d\xi, \quad A_2(\varepsilon_{02}) = \int_0^{\varepsilon_{02}} \left(\frac{a^2(\xi)}{a_0} - a(\xi) \right) d\xi$$

$$A_1^{(p)} = d^p A_1 / d^p \varepsilon_{01}, \quad A_2^{(p)} = d^p A_2 / d^p \varepsilon_{02}$$

Дифференцируя равенство (1.8) p раз по t , находим

$$(3.1) \quad \sum_{k=1}^p \left(A_1^{(k)} \frac{U_{1k}}{k!} + A_2^{(k)} \frac{U_{2k}}{k!} \right) = 2a_0 f^{(p)}(t)$$

$$U_{j1} = \frac{d^p}{dt^p} \varepsilon_{0j}, \dots, \quad U_{jk} = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i \binom{k}{i} \varepsilon_{0j}^i \frac{d^p}{dt^p} \varepsilon_{0j}^{k-i}, \dots$$

$$\dots, U_{jp} = \left(\frac{d\varepsilon_{0j}}{dt} \right)^p; \quad \binom{k}{i} = \frac{k(k-1)\dots(k-i+1)}{i!}, \quad j=1,2$$

Здесь подразумевается, что кривая упрочнения $\Phi(\varepsilon)$ достаточно гладкая и имеет, вообще говоря, производные любого порядка при всех значениях $\varepsilon > \varepsilon_s$.

Обозначим

$$Q_1 = \tau_1 - \frac{\Phi(\tau_1)}{a_1}, \quad Q_2 = \tau_2 - \frac{\Phi(\tau_2)}{a_2}, \quad Q_i^{(p)} = \frac{d^p Q_i}{dt^p}$$

$$a_1 = a(\varepsilon_{01}), \quad a_2 = a(\varepsilon_{02}), \quad a_i^{(p)} = \frac{d^p a_i}{d\varepsilon_{0i}^p}$$

Используя при вычислении производных Q_1 и Q_2 по t выражения для $d\tau_1/dt$ и $d\tau_2/dt$ из (1.11), найдем

$$(3.2) \quad Q_1' = \frac{a_0}{a_1} \frac{a_1 - \Phi'(\tau_1)}{a_0 - \Phi'(\tau_1)} + \Phi(\tau_1) \frac{a_1'}{a_1^2} \frac{d\varepsilon_{01}}{dt}$$

$$Q_1'' = \frac{a_0^2}{a_1} \frac{(a_1 - a_0) \Phi''(\tau_1)}{[a_0 - \Phi'(\tau_1)]^3} + 2 \frac{a_0 a_1'}{a_1^2} \frac{\Phi'(\tau_1)}{[a_0 - \Phi'(\tau_1)]} \frac{d\varepsilon_{01}}{dt} +$$

$$+ \Phi(\tau_1) \frac{a_1 a_1'' - 2a_1'^2}{a_1^3} \left(\frac{d\varepsilon_{01}}{dt} \right)^2 + \Phi(\tau_1) \frac{a_1'}{a_1^2} \frac{d^2 \varepsilon_{01}}{dt^2}$$

$$Q_1''' = \frac{a_0^3}{a_1} \frac{(a_1 - a_0) \Phi'''(\tau_1)}{[a_0 - \Phi'(\tau_1)]^4} + 3 \frac{a_0^3}{a_1} \frac{(a_1 - a_0) [\Phi''(\tau_1)]^2}{[a_0 - \Phi'(\tau_1)]^5} + \dots +$$

$$+ \Phi(\tau_1) \frac{a_1'}{a_1^2} \frac{d^3 \varepsilon_{01}}{dt^3}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$Q_2' = \frac{a_0}{a_1} \frac{a_2 - \Phi'(\tau_2)}{a_0 + \Phi'(\tau_2)} + \Phi(\tau_2) \frac{a_2'}{a_2^2} \frac{d\varepsilon_{02}}{dt}$$

$$\dots \dots \dots$$

Здесь в выражении для Q_1''' пропущены члены, содержащие множители $d\varepsilon_{01}/dt$ и $d^2\varepsilon_{01}/dt^2$.

Дифференцируя равенства (1.9) и (1.10) по t , получим последовательно

$$(3.3) \quad d\varepsilon_{01}/dt = f'(Q_1) Q_1'$$

$$\frac{d^2 \varepsilon_{01}}{dt^2} = f''(Q_1) Q_1'^2 + f'(Q_1) Q_1''$$

$$\frac{d^3 \varepsilon_{01}}{dt^3} = f'''(Q_1) Q_1'^3 + 3f''(Q_1) Q_1' Q_1'' + f'(Q_1) Q_1'''$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d^p \varepsilon_{01}}{dt^p} = f^{(p)}(Q_1) Q_1'^p + g_{1p} f^{(p-1)}(Q_1) Q_1'^{p-2} Q_1'' + \dots + f'(Q_1) Q_1^{(p)}$$

$$d\varepsilon_{02}/dt = f'(Q_2) Q_2'$$

$$\dots \dots \dots$$

Подробно рассмотрим второй случай, описанный в п. 2. Для остальных случаев (кроме случая $c_1 = a_0$) рассуждения проводятся аналогично. Переходя в равенствах (3.2), (3.3) к пределу при t , τ_1 и τ_2 , стремящихся к $t_0 + 0$, видим, что все производные от ε_{01} и ε_{02} по t в точке t_0 до $(n-1)$ -го порядка включительно равны нулю, а для производных n -го порядка получаем

$$(3.4) \quad \left. \frac{d^n \varepsilon_{01}}{dt^n} \right|_{t_0} = f^{(n)}(t_0) \left[\frac{a_0}{a_p} \frac{a_p - c_1}{a_0 - c_1} \right]^n$$

$$\left. \frac{d^n \varepsilon_{02}}{dt^n} \right|_{t_0} = f^{(n)}(t_0) \left[\frac{a_0}{a_p} \frac{a_p - c_1}{a_0 + c_1} \right]^n$$

Следовательно, равенства вида (3.1) до $p = n - 1$ включительно при указанном переходе к пределу обращаются в тождества, а при $p = n$ после деления на $f^{(n)}(t_0)$ приходим к уравнению (2.3) относительно первой производной $c_1 = \varphi'(t_0)$.

Применяя теперь равенства (3.3) при $p = n + 1$, видим, что предельные значения производных равны

$$(3.5) \quad \left. \frac{d^{n+1} \varepsilon_{01}}{dt^{n+1}} \right|_{t_0} = f^{(n+1)}(t_0) Q'_{10}{}^{n+1} + g_{1n} f^{(n)}(t_0) Q'_{10}{}^{n-1} Q_{10}''$$

$$(3.6) \quad \left. \frac{d^{n+1} \varepsilon_{02}}{dt^{n+1}} \right|_{t_0} = f^{(n+1)}(t_0) Q'_{20}{}^{n+1} + g_{2n} f^{(n)}(t_0) Q'_{20}{}^{n-1} Q_{20}''$$

причем Q'_{10} и Q'_{20} , согласно (3.2), содержат уже найденное значение c_1 , а Q_{10}'' и Q_{20}'' помимо c_1 содержат только (причем линейно) $c_2 = \varphi''(t_0)$. Следовательно, равенство типа (3.1) при $p = n + 1$ в пределе при $t \rightarrow t_0 + 0$ дает линейное относительно c_2 алгебраическое уравнение. Аналогично, при $p = n + 2$ получим линейное неоднородное алгебраическое уравнение относительно $c_3 = \varphi'''(t_0)$.

Таким образом, последовательное использование предельных равенств типа (3.1) — (3.3) позволяет вычислить любую производную $\varphi^{(q)}(t_0)$, т. е. определить в ряде Тейлора любое число членов.

Для случая, когда кривая $f(t)$ имеет в точке t_0 излом, аналогичные результаты получены в [4].

При линейном упрочнении, когда $\sigma = E_1 \varepsilon + (E - E_1) \varepsilon_s$ при $\varepsilon \geq \varepsilon_s$, система функциональных уравнений (1.8) — (1.11) приводится к следующей:

$$(3.7) \quad (a_0 + a_1) f\left(\tau_1 - \frac{\varphi(\tau_1)}{a_1}\right) - (a_0 - a_1) f\left(\tau_2 - \frac{\varphi(\tau_2)}{a_1}\right) =$$

$$= \frac{2a_0^2}{a_1} f(t) + 2 \frac{a_1^2 - a_0^2}{a_1} f(t_0)$$

$$(3.8) \quad \tau_1 - t = \varphi(\tau_1) / a_0, \quad t - \tau_2 = \varphi(\tau_2) / a_0$$

где $a_1 = (E_1/\rho)^{1/2}$ — скорость распространения пластических деформаций.

Ясно, что при этом указанная процедура определения производных остается по существу неизменной и упрощается вследствие того, что a_1 — константа. Формулы (2.2) — (2.6) сохраняют вид с заменой a_p на a_1 . Случай линейного упрочнения исследован другим методом в работе [6].

4. Частные случаи нагружения. Рассмотрим три частных случая задания кривой нагружения на конце стержня $f(t)$.

1) Пусть $f(t)$ — парабола n -й степени

$$f(t) = f(t_0) + \frac{f^{(n)}(t_0)}{n!} (t - t_0)^n, \quad f^{(n)}(t_0) \neq 0, \quad f^{(p)}(t_0) = 0, \quad p \neq n$$

При этом уравнения вида (3.1) при линейном упрочнении для $p \leq n - 1$ в пределе при $t \rightarrow t_0 + 0$ обращаются в тождества. При $p = n$, согласно (3.2) и (3.3), получаем уравнение (2.3) относительно $c_1 = \varphi'(t_0)$. Найдя из него c_1 и записывая (3.1) для $p = n + 1$ в пределе при $t \rightarrow t_0$, видим, что согласно (3.6) получается линейное однородное уравнение для $c_2 = \varphi''(t_0)$, т. е. $c_2 = 0$. Аналогично найдем, что $\varphi^{(k)}(t_0) = 0$ при $k > 1$.

Следовательно, волна разгрузки в этом случае является прямой, наклон которой определяется из (2.3).

2) Пусть

$$f(t) = \begin{cases} f(t_0) + \frac{\alpha}{n!} (t - t_0)^n, & t \leq t_0 \\ f(t_0) + \frac{\beta}{n!} (t - t_0)^n, & t \geq t_0 \end{cases}$$

причем $\alpha < 0$, $\beta > 0$ при n четном и $\alpha > 0$, $\beta < 0$ при n нечетном. Аналогично предыдущему находим, что волна разгрузки — прямая линия. Для $n = 1$ решение в виде прямой найдено в [6].

Исследования случаев 1 и 2 относятся лишь к той начальной части волны разгрузки, которая соответствует убыванию нагрузки на конце стержня до нуля. Случай нагрузки обратного знака не рассматривается. Если нагрузка обращается в нуль при $t = t_k > t_0$ и затем остается равной нулю, то волна разгрузки остается прямой до момента времени t_p , определяемого пересечением прямых $x = c_1(t - t_0)$ и $x = a_0(t - t_k)$, т. е. до $t_p = (a_0 t_k - c_1 t_0) / (a_0 - c_1)$.

3) Для нагрузки идеализированного взрывного типа ($f(0) = \varepsilon_m > \varepsilon_s$, $f'(t) < 0$) волна разгрузки проходит через начало координат [9] плоскости (x, t) и к ней примыкает область волн Римана, в которой при растягивающем воздействии имеем

$$u_x = a^{-1}(x/t), \quad u_t = -\psi(u_x)$$

Функциональные уравнения принимают вид

$$(4.1) \quad \int_0^{a^{-1}(\varphi(\tau_1)/\tau_1)} \left[\frac{a^2(\xi)}{a_0} + a(\xi) \right] d\xi + \int_0^{a^{-1}(\varphi(\tau_2)/\tau_2)} \left[\frac{a^2(\xi)}{a_0} - a'(\xi) \right] d\xi = \\ = 2a_0 f(t) + \frac{2}{\rho a_0} [\Phi(\varepsilon_m) - E\varepsilon_m]$$

$$(4.2) \quad \tau_1 - t = \varphi(\tau_1) / a_0, \quad t - \tau_2 = \varphi(\tau_2) / a_0$$

Переходя в (4.1) к пределу при $t \rightarrow 0$ и учитывая, что $\varphi(\tau_1) / \tau_1 \rightarrow \varphi'(0)$, $\varphi(\tau_2) / \tau_2 \rightarrow \varphi'(0)$, получаем $c_1 \equiv \varphi'(0) = a(\varepsilon_m)$. Дифференцируем (4.1) по t и переходим к пределу при $t \rightarrow 0$. Учитывая, что

$$\frac{d}{d\tau_1} \left(\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1} \right) \rightarrow \frac{\varphi''(0)}{2}, \quad \frac{d}{d\tau_2} \left(\frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2} \right) \rightarrow \frac{\varphi''(0)}{2} \\ a^{-1'} \left(\frac{\varphi(\tau_1)}{\tau_1} \right) \rightarrow \frac{1}{a'(\varepsilon_m)}, \quad a^{-1'} \left(\frac{\varphi(\tau_2)}{\tau_2} \right) \rightarrow \frac{1}{a'(\varepsilon_m)}$$

(штрих означает производную по аргументу в скобках)

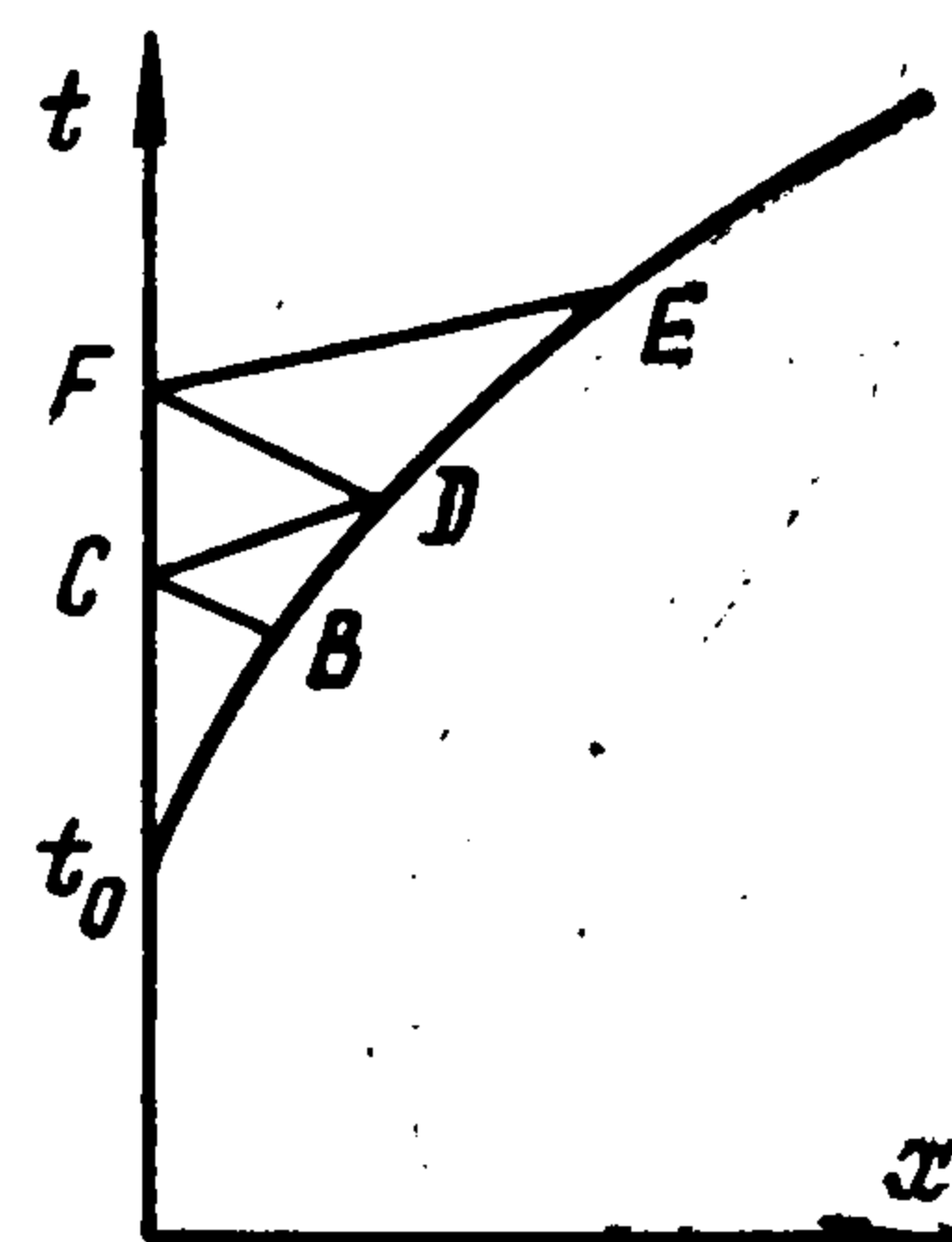
получим

$$\left(\frac{c_1^2}{a_0} + c_1\right) \frac{c_2 a_0}{2(a_0 - c_1)} + \left(\frac{c_1^2}{a_0} - c_1\right) \frac{c_2 a_0}{2(a_0 + c_1)} = 2a_0 f'(0) a'(\varepsilon_m)$$

$$c_2 = f'(0) a'(\varepsilon_m) \frac{a_0^2 - a^2(\varepsilon_m)}{a^2(\varepsilon_m)}, \quad c_2 \equiv \varphi''(0)$$

Подобным образом могут быть вычислены производные более высокого порядка. Аналогичные результаты для этого случая получены в [5].

5. Продолжение решения. Ограничиваясь, ради сокращения записи, линейным упрочнением, т. е. системой функциональных уравнений (3.7) (3.8), заметим, что полученные ниже результаты без труда переносятся на случай произвольного упрочнения, т. е. на системы (1.8) — (1.11) или (4.1), (4.2). Каждая из этих систем связывает значения τ_2 и $\varphi(\tau_2)$ со значениями τ_1 и $\varphi(\tau_1)$. Поэтому если значение $\varphi(\tau_2)$ определено в точке B (фиг. 2), то можно получить значение $\varphi(\tau_1)$ в точке D путем замыкания через точку C . Следовательно, если решение $x = \varphi(t)$ известно на участке BD , отсекаемом характеристиками положительного и отрицательного наклона, проведенными из некоторой точки C оси времени, то оно может быть продолжено в обе стороны. Продолжим, например, решение системы (3.7), (3.8) вверх. Выразим из соотношений (3.7), (3.8) $\varphi(\tau_1)$ и τ_1 через $\varphi(\tau_2)$ и τ_2



Фиг. 2

$$(5.1) \quad \tau_1 = \frac{a_0 \tau_2 + \varphi(\tau_2)}{a_0 - a_1} + \xi$$

$$\varphi(\tau_1) = a_0 \frac{a_0 \tau_2 + \varphi(\tau_2)}{a_0 - a_1} - \varphi(\tau_2) - a_0 \tau_2 + a_0 \xi$$

$$\xi = \frac{a_1}{a_1 - a_0} f^{-1} \left\{ \frac{a_0 - a_1}{a_0 + a_1} f \left(\tau_2 - \frac{\varphi(\tau_2)}{a_1} \right) + \frac{2a_0^2 f(\tau_2 + \varphi(\tau_2)/a_0)}{a_1(a_0 + a_1)} \right\} +$$

$$+ \frac{2(a_1 - a_0)}{a_1} f(t_0)$$

Здесь f^{-1} — функция, обратная к f в интервале времени $[t_s, t_0]$, t_s — момент, когда на конце стержня впервые возникают пластические деформации. Если функция $\varphi(\tau_2)$ на участке BD известна, то, подставляя ее выражение в (5.1), получим параметрические уравнения функции $\varphi(t)$ на участке DE . Затем таким же образом продолжаем решение за отрезок DE и т. д.

Если кривая $x = \varphi(t)$ не имеет своей асимптотой прямую с угловым коэффициентом a_0 , то можно продолжать решение такими отрезками, как DE , до бесконечности. В противном случае решение можно продолжить за конечное число шагов. Аналогично строится продолжение решения вниз.

6. Материал с запаздывающей текучестью. В схеме с линейным упрочнением [10] для материала с запаздывающей текучестью применительно к задаче о распространении

упругопластических волн в полубесконечном стержне $x \geq 0$ принимаются зависимости

$$\sigma = E\varepsilon, \quad |\varepsilon| \leq \varepsilon_s; \quad \sigma = E_1\varepsilon + (E - E_1)\varepsilon_s \left(t - \frac{x}{a_0}\right), \quad |\varepsilon| > \varepsilon_s$$

при активном нагружении и

$$\sigma = \sigma_0 + E(\varepsilon - \varepsilon_0) = E\varepsilon + (E - E_1)(\varepsilon_{s0} - \varepsilon_0)$$

при разгрузке от деформации ε_0 . Здесь $x = \varphi(t)$ — уравнение волны разгрузки и $\varepsilon_{s0} = \varepsilon_s(\varphi^{-1}(x) - x/a_0)$. Начало разгрузки определяется требованием [11]

$$\partial\sigma / \partial t \leq E\varepsilon'_s(t - x/a_0)$$

Если на конце стержня $x < 0$ задано напряжение $\sigma(0, t) = f(t)$, то решение в области активной упругопластической деформации имеет вид [10]

$$(6.1) \quad \begin{aligned} u_x &= \frac{1}{E_1} F\left(t - \frac{x}{a_1}\right) + \varepsilon_s\left(t - \frac{x}{a_0}\right), \quad F(t) = f(t) - E\varepsilon_s(t) \\ u_t &= -\frac{a_1}{E_1} F\left(t - \frac{x}{a_1}\right) - a_0\varepsilon_s\left(t - \frac{x}{a_0}\right) \end{aligned}$$

В области разгрузки $x \leq \varphi(t)$ движение определяется уравнением

$$\begin{aligned} u_{tt} &= a_0^2 u_{xx} + (a_0^2 - a_1^2) \frac{d}{dx}(\varepsilon_{s0} - \varepsilon_0) \\ a_0 &= \sqrt{E/\rho}, \quad a_1 = \sqrt{E_1/\rho} \end{aligned}$$

Повторяя рассуждения п. 1, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1) F\left(\tau_1 - \frac{\varphi(\tau_1)}{a_1}\right) - (a_0 - a_1) F\left(\tau_2 - \frac{\varphi(\tau_2)}{a_1}\right) &= 2a_1 F(t) \\ \tau_1 - t &= \varphi(\tau_1) / a_0, \quad t - \tau_2 = \varphi(\tau_2) / a_0 \end{aligned}$$

которая при $\varepsilon_s = \text{const}$ переходит в систему уравнений для волны разгрузки в материале без запаздывания текучести для случая, когда на конце стержня задано напряжение.

Процедура определения производных $\varphi'(t_0)$, $\varphi''(t_0)$, ..., $\varphi^{(n)}(t_0)$ совершенно аналогична описанной в п. 2, 3. В частности, справедлив вывод, что для функции $F(t)$, имеющей вид параболы n -го порядка, волна разгрузки является прямой линией.

Поступила 2 I 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. О распространении волны разгрузки. ПММ, 1945, т. 9, вып. 1.
2. Шапиро Г. С. Продольные колебания стержней. ПММ, 1946, т. 10, вып. 5—6.
3. Бидерман В. Л. Расчеты на ударную нагрузку. В сб.: Основы современных методов расчета на прочность в машиностроении. М., Машгиз, 1952.
4. Tuschak P. A. A note on the unloading boundary in elastic-plastic stress wave propagation. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1973, vol. 40, No. 1. (Рус. перев.: Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е. Прикл. механ., 1973, № 1)
5. Tuschak P. A., Schultz A. B. Determination of the unloading boundary in longitudinal elastic-plastic stress wave propagation. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1971, vol. 37, No. 4. (Рус. перев.: Тр. Америк. о-ва инж.-механ. Сер. Е. Прикл. механ., 1971, № 4.)
6. Włodarczyk E. An analytical solution of the problem of a weak-discontinuity unloading wave. Proc. Vibrat. Problems, 1971, vol. 12, No. 1.
7. Скобеев А. М. К теории волны разгрузки. ПММ, 1962, т. 26, вып. 6.
8. Ленский В. С. Введение в теорию пластичности, вып. 2. М., Изд-во МГУ, 1969.
9. Рахматулин Х. А., Демьянов Ю. А. Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. М., Физматгиз, 1961.
10. Ленский В. С., Фомина Л. Н. Распространение одномерных волн в материалах с запаздывающей текучестью. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1959, № 3.
11. Гуляев Ю. П., Ленский В. С. О волне разгрузки в материалах с запаздывающей текучестью. ПММ, 1968, т. 32, вып. 6.