Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.3

ОДНО ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ТОЖДЕСТВО В ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ УПРУГОСТИ И ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ УРАВНЕНИЙ ПЛИТ

Б. А. Шойхет

(Ленинград)

Для некоторого класса нелинейных законов упругости выводится тождество, обобщающее соотношение Прагера — Синга [1,2] в линейной упругости. Оно позволяет оценивать энергетическую норму разности между некоторым статически допустимым полем напряжений σ и истинным полем σ°, а также между некоторым кинематически допустимым полем смещений $\mathbf{u}$ и истинным полем $\mathbf{u}^\circ$, через энергетическую норму разности полей σ и $\sigma(\mathbf{u})$ ($\sigma(\mathbf{u})$ — поле напряжений, порождаемое полем $\mathbf{u}$). С помощью этого тождества, при определенных ограничениях, доказывается, что среднеквадратичная (по объему плиты) величина ошибки решения уравнений плит, выводимых из объемной задачи посредством гипотез Кирхгофа, не превышает $ch^{1/2}$, где c — константа, h — относительная толщина.

Соотношение Прагера — Синга [1,2] использовалось [3,4] для оценки погрешности линейной теории оболочек.

Результаты работы примыкают к [1–7].

1. Пусть удельная энергия деформации имеет вид [8]

$$A(\varepsilon) = {}^9/_2\, K(\varepsilon_0)^2 + A_2(\psi_\varepsilon) \tag{1.1}$$

$$\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}, \quad \varepsilon_0 \equiv {}^1/_3\,(\varepsilon_{ii}), \quad \psi_\varepsilon \equiv (2^{-1}\varepsilon_{ij}'\varepsilon_{ij}')^{1/2}, \quad \varepsilon_{ij}' \equiv \varepsilon_{ij} - \delta_i^j\varepsilon_0$$

Здесь ε — тензор деформаций, ε_0 — среднее удлинение, ψ_ε — интенсивность касательных деформаций, δ_i^j — символ Кронекера, K — модуль, объемного расширения, $A_2(\tau)$ — функция, заданная при $\tau \in [0, \infty)$, дважды дифференцируемая, удовлетворяющая условиям

$$A_2 = dA_2 / d\tau = 0, \quad \tau = 0, \quad 4G_1 \leqslant d^2A_2 / d\tau^2 \leqslant 4G_2 \tag{1.2}$$

$$\forall \tau \in [0, \infty)$$

$G_1,\ G_2 > 0$ — константы, ограничивающие пределы изменения модуля сдвига.

Введем обозначения

$$(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \equiv a_{ij}b_{ij}, \quad |\mathbf{a}| \equiv (\mathbf{a}, \mathbf{a})^{1/2} \quad (\mathbf{a} = \{a_{ij}\},\ \mathbf{b} = \{b_{ij}\})$$

Лемма 1. При условиях (1.2) функция $A(\varepsilon)$ строго выпукла, более того, для любых $\varepsilon = \{\varepsilon_{ij}\}$, $\varepsilon^1 = \{\varepsilon_{ij}^1\}$ справедливы оценки

$$\gamma\,|\varepsilon - \varepsilon^1|^2 \leqslant (\nabla A(\varepsilon) - \nabla A(\varepsilon^1),\ \varepsilon - \varepsilon^1) \leqslant \varkappa\,|\varepsilon - \varepsilon^1|^2 \tag{1.3}$$

$$\nabla A(\varepsilon) \equiv \{\partial A(\varepsilon) / \partial \varepsilon_{ij}\}, \quad \gamma = \min\{3K,\ 2G_1\}$$

$$\varkappa = \max\{3K, 2G_2\}$$

$$\gamma\,|\varepsilon - \varepsilon^1| \leqslant |\nabla A(\varepsilon) - \nabla A(\varepsilon^1)| \leqslant \varkappa\,|\varepsilon - \varepsilon^1| \tag{1.4}$$

Пусть упругое тело занимает область V переменных (x_1, x_2, x_3), S — кусочно-гладкая граница области V. Рассмотрим следующую задачу упругости:

(1.5) $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3), \quad \varepsilon_{ij}(\mathbf{u}) = 2^{-1}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \varepsilon(\mathbf{u}) = \{\varepsilon_{ij}(\mathbf{u})\}$

(1.6) $\sigma = \{\sigma_{ij}\} = \nabla A(\varepsilon)$

(1.7) $\sigma_{ij,j} + f_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$

(1.8) $\sigma_{ij}n_j = F_i, \quad i = 1, 2, 3$ на S_F

(1.9) $u_i = 0, \quad i = 1, 2, 3$ на $S_u, \quad S = S_F \bigcup S_u$

Из (1.3) закон упругости (1.6) однозначно обратим; известно [9], что обратное отображение задается с помощью двойственной функции $A^*(\sigma)$

(1.10) $\varepsilon = \nabla A^*(\sigma) \equiv \{\partial A^*(\sigma) / \partial\sigma_{ij}\}$

Причем если ε и σ связаны соотношением (1.6) или (1.10), то

(1.11) $A^*(\sigma) + A(\varepsilon) = (\sigma, \varepsilon)$

Можно проверить, что

$$A^*(\sigma) = (2K)^{-1}(\sigma_0)^2 + A_2^*(2\psi_\sigma)$$

$$\sigma_0 \equiv {}^1/_3(\sigma_{ii}), \quad \psi_\sigma \equiv (2^{-1}\sigma_{ij}'\sigma_{ij}')^{1/2}, \quad \sigma_{ij}' \equiv \sigma_{ij} - \delta_i^j\sigma_0$$

(здесь $A_2^*(t)$ — двойственная функция к $A_2(\tau)$) и справедливы неравенства для любых σ, σ^1

(1.12) $\varkappa^{-1}|\sigma - \sigma^1|^2 \leqslant (\nabla A^*(\sigma) - \nabla A^*(\sigma^1), \sigma - \sigma^1) \leqslant \gamma^{-1}|\sigma - \sigma^1|^2$

(1.13) $\varkappa^{-1}|\sigma - \sigma^1| \leqslant |\nabla A^*(\sigma) - \nabla A^*(\sigma^1)| \leqslant \gamma^{-1}|\sigma - \sigma^1|$

Пусть $\varepsilon \in L_2(V)$ — тензорное поле, из (1.4), (1.13) закон упругости (1.6) есть взаимно-однозначное непрерывное отображение, сопоставляющее всякому $\varepsilon \in L_2(V)$ поле $\sigma \in L_2(V)$; обратное отображение (1.10) также непрерывно.

Теорема 1 [10–12] (*принцип минимума полной энергии*). Пусть

(1.14) $f_i \in L_2(V), \quad F_i \in L_2(S_F), \quad i = 1, 2, 3$

Введем пространство H допустимых полей смещений и функционал полной энергии

(1.15) $H = \{\mathbf{u} \mid \mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3),\ u_i \in W_2^1(V),\ u_i = 0$ на $S_u,\ i = 1, 2, 3\}$

(1.16) $\Phi(\mathbf{u}) = \int\limits_V A(\varepsilon(\mathbf{u}))\,dV - \int\limits_V f_iu_i\,dV - \int\limits_{S_F} F_iu_i\,dS$

Тогда существует единственное поле $\mathbf{u}^0$, доставляющее минимум функционалу $\Phi(\mathbf{u})$ на пространстве H.

Положим

(1.17) $\varepsilon^\circ \equiv \varepsilon(\mathbf{u}^\circ), \quad \sigma^\circ \equiv \nabla A(\varepsilon^\circ)$

тогда для любого поля $\mathbf{u} \in H$ справедливо тождество

(1.18) $\int\limits_V (\sigma^\circ, \varepsilon(\mathbf{u}))\,dV = \int\limits_V f_iu_i\,dV + \int\limits_{S_F} F_iu_i\,dS$

Определение 1. Поле $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ назовем статически допустимым, если $\sigma \in L_2(V)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, и для любого $u \in H$ справедливо тождество

$$\int_V (\sigma, \varepsilon(u))\, dV = \int_V f_i u_i dV + \int_{S_F} F_i u_i dS \tag{1.19}$$

Совокупность статически допустимых полей обозначим через P, из (1.18) $\sigma^\circ \in P$.

Замечание 1. Если поле σ статически допустимо в обычном смысле, т. е. σ_{ij} дифференцируемы, и удовлетворяются уравнения равновесия (1.7) и граничные условия (1.8), то σ статически допустимо в смысле определения 1.

Лемма 2. Множество P выпукло и замкнуто в $L_2(V)$.

Доказательство. Выпуклость P очевидна, докажем замкнутость, т. е. докажем, что если последовательность $\sigma^n = \{\sigma_{ij}{}^n\}$ принадлежит P и при $n \to \infty$ сходится в $L_2(V)$ к некоторому полю $\sigma^* = \{\sigma_{ij}\}$, то $\sigma^* \in P$.

Так как $\sigma^n \in P$, то $\sigma_{ij}{}^n = \sigma_{ji}{}^n$ и из условия $\| \sigma^n - \sigma^* \|_{L_2(V)} \to 0$ следует, что $\sigma_{ij}{}^* = \sigma_{ji}{}^*$.

Подставим σ^n в (1.19) и при фиксированном u перейдем к пределу при $n \to \infty$, получим, что σ^* удовлетворяет тождеству (1.19) т. е. $\sigma^* \in P$.

Теорема 2 (*начало Кастильяно*). Введем функционал дополнительной энергии деформации

$$E^*(\sigma) = \int_V A^*(\sigma)\, dV \tag{1.20}$$

Тогда существует единственное поле напряжений, доставляющее минимум функционалу $E^*(\sigma)$ на P, а именно поле σ°, и справедливо равенство

$$\Phi(u^\circ) = -E^*(\sigma^\circ) \tag{1.21}$$

Доказательство. Из (1.12) оператор $\nabla A^*(\sigma)$ коэрцитивен в $L_2(V)$, откуда [13] следует существование и единственность минимума. Докажем, что поле σ° удовлетворяет для любого $\sigma \in P$ тождеству

$$\int_V (\nabla A^*(\sigma^\circ), \sigma - \sigma^\circ)\, dV = 0 \tag{1.22}$$

Действительно, из (1.17) — (1.19)

$$\int_V (\nabla A^*(\sigma^\circ), \sigma - \sigma^\circ)\, dV = \int_V (\varepsilon^\circ, \sigma - \sigma^\circ)\, dV =$$
$$= \int_V f_i u_i^\circ dV + \int_{S_F} F_i u_i^\circ dS - \int_V (\varepsilon^\circ, \sigma^\circ)\, dV = 0$$

Из [13] тождество (1.22) — необходимое и достаточное условие минимума.

Из (1.17), (1.11), (1.20), (1.18)

$$\Phi(u^\circ) = \int_V (-A^*(\sigma^\circ) + (\sigma^\circ, \varepsilon^\circ))\, dV - \int_V f_i u_i^\circ dV - \int_{S_F} F_i u_i^\circ dS =$$
$$= -E^*(\sigma^\circ) + \int_V (\sigma^\circ, \varepsilon^\circ)\, dV - \int_V f_i u_i^\circ\, dV - \int_{S_F} F_i u_i^\circ dS = -E^*(\sigma^\circ)$$

Теорема 3. Пусть $\sigma \in P$, $u \in H$, положим

(1.23) $$\sigma(\mathbf{u}) \equiv \nabla A(\varepsilon(\mathbf{u}))$$

Справедливо тождество

(1.24) $$E^*(\sigma) - E^*(\sigma^\circ) + \Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}^\circ) = E^*(\sigma) - E^*(\sigma(\mathbf{u})) - \int_V (\varepsilon(\mathbf{u}), \sigma - \sigma(\mathbf{u}))\, dV$$

Доказательство. Ввиду (1.21) достаточно доказать, что

$$\Phi(\mathbf{u}) = -E^*(\sigma(\mathbf{u})) - \int_V (\varepsilon(\mathbf{u}), \sigma - \sigma(\mathbf{u}))\, dV$$

Из (1.13), (1.11), (1.16)

$$\Phi(\mathbf{u}) = -E^*(\sigma(\mathbf{u})) + \int_V (\varepsilon(\mathbf{u}), \sigma(\mathbf{u}))\, dV - \int_V f_i u_i dV - \int_{S_F} F_i u_i dS = -E^*(\sigma(\mathbf{u})) + \int_V (\varepsilon(\mathbf{u}), \sigma(\mathbf{u}))\, dV - \int_V (\varepsilon(\mathbf{u}), \sigma)\, dV$$

последнее равенство следует из (1.19).

Замечание 2. При линейном законе упругости

$$E^*(\sigma) - E^*(\sigma^\circ) = E^*(\sigma - \sigma^\circ), \quad \Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}^\circ) = E^*(\sigma(\mathbf{u}) - \sigma^\circ)$$

$$E^*(\sigma) - E^*(\sigma(\mathbf{u})) - \int_V (\varepsilon(\mathbf{u}), \sigma - \sigma(\mathbf{u}))\, dV = E^*(\sigma - \sigma(\mathbf{u}))$$

и тождество (1.24) совпадает с соотношением Прагера — Синга [1, 2]

$$E^*(\sigma - \sigma^\circ) + E^*(\sigma(\mathbf{u}) - \sigma^\circ) = E^*(\sigma - \sigma(\mathbf{u}))$$

Замечание 3. Тождество (1.24) справедливо при более слабых предположениях, чем (1.1), (1.2), например, можно предположить, что $A(\varepsilon) = A_1(\varepsilon_0) + A(\psi_\varepsilon)$, где $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ — строго выпуклые непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям

(1.25) $$A_i = dA_i / d\tau = 0, \ \tau = 0, \ i = 1, 2$$

$$-a_i + b_i \tau^{p_i - 1} \leqslant dA_i / d\tau \leqslant c_i + d_i \tau^{p_i - 1}, \quad i = 1,2$$

$$a_i, \ c_i \geqslant 0, \ b_i, \ d_i > 0 = \text{const}, \quad 1 < p_2 \leqslant p_1$$

Например, ограничениям (1.25) удовлетворяет функция

$$A(\varepsilon) = {}^9/_2 \ K(\varepsilon_0)^2 + a_2 (\psi_\varepsilon)^p, \quad 1 < p \leqslant 2$$

Здесь $p_1 = 2$, $p_2 = p$.

Тождество (1.24) верно и в случае, если $A(\varepsilon)$ — непрерывно дифференцируемая строго выпуклая функция, $A = \nabla A = 0$, $\tau = 0$ и выполнены неравенства

$$-a + b|\varepsilon|^p \leqslant (\nabla A(\varepsilon), \varepsilon) \leqslant c + d|\varepsilon|^p$$

$$a, \ c \geqslant 0, \ b, \ d \geqslant 0 = \text{const}, \ p > 1$$

Лемма 3. Пусть $\sigma \in P$, $\mathbf{u} \in H$. При условиях (1.2) имеют место оценки

(1.26) $$\frac{1}{2\varkappa} \|\sigma - \sigma^\circ\|^2_{L_2(V)} + \frac{\gamma}{2} \|\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon^\circ\|^2_{L_2(V)} \leqslant \frac{1}{\gamma} \|\sigma - \sigma(\mathbf{u})\|^2_{L_2(V)}$$

Доказательство. Из (1.12), (1.3) и теоремы 10.4 [13] следуют неравенства

(1.27) $$E^*(\sigma) - E^*(\sigma^\circ) \geqslant \frac{1}{2\varkappa} \|\sigma - \sigma^\circ\|^2_{L_2(V)}$$

$$\Phi(\mathbf{u}) - \Phi(\mathbf{u}^\circ) \geqslant \frac{\gamma}{2} \|\varepsilon(\mathbf{u}) - \varepsilon^\circ\|^2_{L_2(V)}$$

Так как отображения $\nabla A(\varepsilon)$, $\nabla A^*(\sigma)$ обратны, то $\varepsilon(\mathbf{u}) = \nabla A^*(\sigma(\mathbf{u}))$, поэтому

$$
\begin{aligned}
(1.28)\qquad & E^*(\sigma) - E^*(\sigma(\mathbf{u})) - \int_V (\varepsilon(\mathbf{u}), \sigma - \sigma(\mathbf{u}))\, dV = \\
&= \int_0^1 \frac{d}{dt} E^*(\sigma(\mathbf{u}) + t(\sigma - \sigma(\mathbf{u})))\, dt - \int_V (\nabla A^*(\sigma(\mathbf{u})), \sigma - \sigma(\mathbf{u}))\, dV = \\
&= \int_0^1 dt \int_V \frac{1}{t} (\nabla A^*(\sigma(\mathbf{u}) + t(\sigma - \sigma(\mathbf{u}))) - \nabla A^*(\sigma(\mathbf{u})), t(\sigma - \sigma(\mathbf{u})))\, dV \leqslant \\
&\leqslant \int_0^1 \frac{1}{\gamma t} \| t(\sigma - \sigma(\mathbf{u})) \|^2_{L_2(V)}\, dt \leqslant \frac{1}{2\gamma} \| \sigma - \sigma(\mathbf{u}) \|^2_{L_2(V)}
\end{aligned}
$$

Неравенство в (1.28) следует из (1.12). Из (1.27), (1.28) и тождества (1.24) и следует (1.26).

2. Уравнения плит. Рассмотрим изгиб жестко защемленной плиты постоянной толщины, симметрично загруженной нагрузкой, приложенной к верхней и нижней граням. Плита занимает область

$$V_h = \{(\mathbf{x}, x_3) \mid \mathbf{x} = (x_1, x_2),\ \ \mathbf{x} \in \Omega,\ \ -d < x_3 < d\}$$

Здесь Ω — срединная плоскость, l — ее характерный размер, $2d$ — толщина плиты, $h = 2d / l$ — характерная относительная толщина, тогда в формулах (1.7) — (1.10), (1.14) — (1.6) S_u — боковая поверхность плиты, $S_F = \Omega^+ \cup \Omega^-$, где Ω^+, Ω^- — верхняя и нижняя грани плиты,

$$
\begin{aligned}
(2.1)\qquad & f_1 = f_2 = f_3 = 0, \quad F_1 = F_2 = 0 \quad \text{на} \quad S_F \\
& F_3 = F^h / 2 \quad \text{на } \Omega^+, \quad F_3 = -F^h / 2 \quad \text{на } \Omega^-
\end{aligned}
$$

Подчеркнем, что в (2.1) нормальная нагрузка F^h зависит от h.

Выведем уравнения плит, пользуясь гипотезами Кирхгофа. Введем обозначения: если $\mathbf{a} = \{a_{ij}\}$ — тензор, $i, j = 1, 2, 3$, то $\mathbf{a} = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2\}$, где

$$(2.2)\qquad \mathbf{a}_1 \equiv (a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}), \quad \mathbf{a}_2 \equiv (a_{13}, a_{31}, a_{23}, a_{32}, a_{33})$$

Если тензор $\mathbf{a}$ снабжен каким-либо верхним индексом, то этим же индексом снабжаются $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, например тензору $\mathbf{a}^h = \{a_{ij}^h\}$ по (2.2) соответствуют $\mathbf{a}_1^h$, $\mathbf{a}_2^h$.

Запишем закон упругости (1.6) в форме

$$
\begin{aligned}
(2.3)\qquad & \sigma_1 = \frac{\partial A(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_1} \equiv \left\{ \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{11}}, \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{12}}, \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{21}}, \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{22}} \right\} \\
& \sigma_2 = \frac{\partial A(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}{\partial \varepsilon_2} \equiv \left\{ \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{13}}, \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{31}}, \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{23}}, \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{32}}, \frac{\partial A}{\partial \varepsilon_{33}} \right\}
\end{aligned}
$$

По статическим гипотезам Кирхгофа положим в (2.3) $\sigma_2 = 0$ и рассмотрим (2.3) при фиксированном ε_1 как систему уравнений относительно ε_2. Используя (1.3), (1.4), можно показать, что эта система однозначно разрешима при любом ε_1, и ее решение $\varepsilon_2(\varepsilon_1)$ имеет вид

$$(2.4)\qquad \varepsilon_2(\varepsilon_1) = (0, 0, 0, 0, Q(\varepsilon_1))$$

где $Q(\varepsilon_1)$ непрерывна и удовлетворяет ограничениям

(2.5) $$|Q(\varepsilon_1)| \leqslant \varkappa / \gamma |\varepsilon_1|$$

$$(\varepsilon_1^1, \varepsilon_1) \equiv \sum_{i,j=1}^{2} \varepsilon_{ij}^1 \varepsilon_{ij}, \quad |\varepsilon_1| \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_1)^{1/2}$$

Подставим (2.4) в $A(\varepsilon)$, получим функцию четырех вещественных аргументов

(2.6) $$D(\varepsilon_1) \equiv A(\varepsilon_1, \ 0, \ 0, \ 0, \ 0, \ Q(\varepsilon_1))$$

Воспользуемся кинематическими гипотезами Кирхгофа, согласно которым

(2.7) $$u_i(\mathrm{x}, x_3) = -w_{,i}(\mathrm{x})\, x_3, \quad i = 1, 2, \quad u_3(\mathrm{x}, x_3) = w(\mathrm{x})$$

Подставив (2.7) в (1.5), получим

(2.8) $$\varepsilon_1(w) = -\mu(w)\, x_3, \quad \mu(w) \equiv \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_2 \partial x_1}, \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)$$

Заменим в (1.16) $A(\varepsilon(\mathrm{u}))$ на $D(\varepsilon_1(w))$, а в линейную часть (1.16) подставим гипотезы (2.7), учитывая (2.1), получим функционал полной энергии тонкой плиты

$$\Psi_h(w) = \int_{V_h} D(-\mu(w)\, x_3)\, d\mathrm{x} dx_3 - \int_{\Omega} F^h w\, d\mathrm{x}$$

Лемма 4. $D(\varepsilon_1)$ дважды непрерывно дифференцируема, строго выпукла и для любых ε_1, ε_1^1 справедливы оценки

(2.9) $$\gamma |\varepsilon_1 - \varepsilon_1^1|^2 \leqslant (\nabla D(\varepsilon_1) - \nabla D(\varepsilon_1^1), \ \varepsilon_1 - \varepsilon_1^1) \leqslant \varkappa |\varepsilon_1 - \varepsilon_1^1|^2$$

$$\nabla D(\varepsilon_1) \equiv \{\partial D / \partial \varepsilon_{11}, \partial D / \partial \varepsilon_{12}, \partial D / \partial \varepsilon_{21}, \ \partial D / \partial \varepsilon_{22}\}$$

$$(\varepsilon_1 = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{21}, \varepsilon_{22}\}, \quad \varepsilon_1^1 = \{\varepsilon_{11}^1, \varepsilon_{12}^1, \varepsilon_{21}^1, \varepsilon_{22}^1\})$$

Справедливы также равенства

(2.10) $$D(-\varepsilon_1) = D(\varepsilon_1)$$

(2.11) $$\nabla D(\varepsilon_1) = \partial A(\varepsilon_1, 0, 0, 0, 0, Q(\varepsilon_1)) / \partial \varepsilon_1$$

Пусть Γ — граница Ω, введем пространство допустимых прогибов

$$W_2^{2,0}(\Omega) = \{w \mid w \in W_2^2(\Omega), \ \ w = \partial w / \partial n = 0 \text{ на } \Gamma\}$$

Теорема 4. Существует единственная функция $w^h \in W_2^{2,0}(\Omega)$, доставляющая минимум функционалу $\Psi_h(w)$ на $W_2^{2,0}(\Omega)$.

Доказательство, ввиду леммы 4, следует из [14].

Введем обозначения

(2.12) $$\delta^h = \{\delta_{ij}^h\}, \quad \delta_1^h \equiv \varepsilon_1(w^h) = -\mu(w^h) x_3, \quad \delta_2^h \equiv \varepsilon_2(\delta_1^h) = (0, 0, 0, 0, Q(\delta_1^h))$$

(2.13) $$\alpha^h = \{\alpha_{ij}^h\}, \quad \alpha_1^h \equiv \nabla D(\delta_1^h), \quad \alpha_2^h \equiv 0$$

Тензоры δ^h, α^h по (2.12), (2.13) задают деформации и напряжения в уравнениях плит. Из (2.11), (2.13) и определения (2.4) следует, что

$$\alpha_1^h = \partial A(\delta_1^h, \delta_2^h) / \partial \varepsilon_1, \ \alpha_2^h = 0 = \partial A(\delta_1^h, \delta_2^h) / \partial \varepsilon_2$$

т. е.

$$\alpha^h = \nabla A\,(\delta^h) \tag{2.14}$$

3. Оценка погрешности уравнений плит. Идея получения оценки, заимствованная из [3,4], состоит в том, что по решению w^h, δ^h, α^h уравнений плит конструируются два поля: статически допустимое поле напряжений $\sigma \in P$ и кинематически допустимое поле перемещений $\mathrm{u} \in H$, причем так, что норма разности $\sigma - \sigma(\mathrm{u})$ допускает явную оценку через параметр h и производные от w^h, а далее применяется (1.26).

Сделаем замену переменной $x_3 = hz$, тогда область V_h отобразится в область $V_1 = \{(\mathrm{x}, z) \mid \mathrm{x} \in \Omega,\ -l/2 < z < l/2\}$. Если функция φ задана в V_h, то функцию g, заданную в V_1 формулой $g(\mathrm{x}, z) = \varphi(\mathrm{x}, hz)$, будем обозначать той же буквой φ. Очевидно

$$\|\varphi\|_{L_2(V_h)} = h^{1/2}\|\varphi\|_{L_2(V_1)} \tag{3.1}$$

Окончательные оценки будут получены в норме $L_2(V_1)$ (а не $L_2(V_h)$), поскольку норма в $L_2(V_1)$ не зависит от h.

Функция w^h удовлетворяет тождеству для любой $w \in W_2^{2,0}(\Omega)$

$$\int\limits_{V_h} (\nabla D(-\mu(w^h)x_3), -\mu(w)x_3)\,d\mathrm{x}dx_3 = \int\limits_{\Omega} F^h w\,d\mathrm{x} \tag{3.2}$$

Подставив в (3.2) $w = w^h$, используя (2.9) при $\varepsilon_1^1 = 0$ и интегрируя (3.2) по x_3, получим

$$\frac{2}{3}\gamma^2 d^3 \int\limits_{\Omega} (\mu(w^h), \mu(w^h))\,d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} F^h w^h d\mathrm{x} \tag{3.3}$$

Из (3.3) и теорем вложения [15] следует оценка

$$\|w^h\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \frac{c}{\gamma h^3}\|F^h\|_{L_2(\Omega)} \tag{3.4}$$

Буквой c здесь и далее обозначаются различные константы, не зависящие от h.

Из определений (2.12), (2.13) и (3.4), (2.5), (2.14), (1.4), (3.1) следуют оценки

$$\|\delta^h\|_{L_2(V_1)} \leqslant \frac{c}{\gamma h^2}\|F^h\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|\alpha^h\|_{L_2(V_1)} \leqslant \frac{c\varkappa}{\gamma h^2}\|F^h\|_{L_2(\Omega)} \tag{3.5}$$

Пусть F^h представима в виде $F^h = h^2 q^h$, причем

$$\|q^h\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_q, \quad c_q = \mathrm{const} \tag{3.6}$$

Тогда из (3.4) — (3.6) следуют оценки с константами, не зависящими от h

$$\|w^h\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant \frac{c}{\gamma h} c_q$$

$$\|\delta^h\|_{L_2(V_1)} \leqslant \frac{c}{\gamma} c_q, \quad \|\alpha^h\|_{L_2(V_1)} \leqslant \frac{c\varkappa}{\gamma} c_q$$

Предположим большее, именно, пусть $w^h \in C^4(\Omega^c)$ (Ω^c — замыкание области Ω), δ^h, $\alpha^h \in C^2(V_h^c)$ и справедливы оценки с константой c_F, не зависящей от h

$$\|w^h\|_{C^4(\Omega^c)} \leqslant \frac{c_F}{\gamma h} \tag{3.7}$$

$$|\delta_{ij}^h| \leqslant \frac{c_F}{\gamma}, \quad |\delta_{ij,n}^h| \leqslant \frac{c_F}{\gamma}, \quad \left|\frac{\partial^2 \delta_{ij}^h}{\partial x_n \partial x_m}\right| \leqslant \frac{c_F}{\gamma}; \tag{3.8}$$

$$i, j = 1, 2, 3, \quad n, m = 1, 2$$

$$|\alpha_{ij}^h| \leqslant \frac{\varkappa c_F}{\gamma}, \quad |\alpha_{ij,n}^h| \leqslant \frac{\varkappa c_F}{\gamma}, \quad \left|\frac{\partial^2 \alpha_{ij}^h}{\partial x_n \partial x_m}\right| \leqslant \frac{\varkappa c_F}{\gamma}; \quad i, j, n, m = 1, 2 \tag{3.9}$$

Теорема 5. Пусть $\Gamma \in C^\infty$, $A(\varepsilon)$ удовлетворяет (1.1), (1,2) и $A_2(\psi_\varepsilon)$ как функция девяти вещественных аргументов ε_{ij}' четырежды непрерывно дифференцируема по ε_{ij}' и справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^3 A_2(\psi_\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}' \partial \varepsilon_{ks}' \partial \varepsilon_{mn}'}\right| \leqslant \frac{M_1}{1 + \psi_\varepsilon}, \quad i, j, k, s, m, n = 1, 2, 3, \quad M_1 = \mathrm{const}$$

$$\left|\frac{\partial^4 A_2(\psi_\varepsilon)}{\partial \varepsilon_{ij}' \partial \varepsilon_{ks}' \partial \varepsilon_{mn}' \partial \varepsilon_{pq}'}\right| \leqslant M_2, \quad i, j, k, s, m, n, p, q = 1, 2, 3, \quad M_2 = \mathrm{const}$$

$$\|q^h\|_{C^2(\Omega^c)} \leqslant c_q, \quad c_q = \mathrm{const}$$

Тогда w^h, δ^h, α^h удовлетворяют ограничениям (3.7) — (3.9).

Ввиду громоздкости доказательство не приводится, наметим лишь основные пункты.

Из (3.2) функция w^h — обобщенное решение квазилинейного эллиптического уравнения четвертого порядка в области Ω

$$\sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}\left[\int_{-d}^{d} -\frac{\partial D(-\mu(w) x_3)}{\partial \varepsilon_{ij}} x_3 dx_3\right] = F^h \tag{3.10}$$

$$w = \partial w / \partial n = 0 \quad \text{на } \Gamma$$

Известны [12,16,17] достаточные условия, при которых обобщенное решение уравнения (3.10) регулярно; используя условия теоремы 5, можно показать, что уравнение (3.10) удовлетворяет этим достаточным условиям, откуда получим, что w^h есть классическое решение уравнения (3.10), т. е. $w^h \in C^4(\Omega^c)$, и удовлетворяет уравнению (3.10); далее, используя определение полей δ^h, α^h и условия теоремы 5, можно доказать (3.7) — (3.9).

Пример закона упругости, удовлетворяющего условиям теоремы 5

$$A_2(\psi_\varepsilon) = 2G_1(\psi_\varepsilon)^2[1 + G_2(\psi_\varepsilon)^2(1 + G_1(\psi_\varepsilon)^2)^{-1}]$$

В дальнейшем (3.7) — (3.9) предполагаются выполненными.

Построим статически допустимое поле $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$, «близкое» к α^h. Положим

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ij}^h, \quad i, j = 1, 2, \quad \sigma_{i3} = \sigma_{3i} = -\int_{-d}^{x_3} \sum_{j=1}^{2} \sigma_{ij,j}(\mathbf{x}, \tau)\, d\tau, \quad i = 1, 2 \tag{3.11}$$

$$\sigma_{33} = -\int_{0}^{x_3} \sum_{i=1}^{2} \sigma_{3i,i}(\mathbf{x}, \tau)\, d\tau \tag{3.12}$$

Напряжения σ_2 получены из σ_1 интегрированием уравнений равновесия (1.7).

Проверим, что поле σ удовлетворяет граничным условиям (1.8) на Ω^+, Ω^-. Из (2.10), (2.12), (2.13) напряжения σ_1 нечетны по x_3, поэтому $\sigma_{i3} = \sigma_{3i}$ четны по x_3, $i = 1, 2$, и из (3.11) $\sigma_{i3} = \sigma_{3i} = 0$ на Ω^+, Ω^-, $i = 1, 2$.

Напряжение σ_{33} нечетно по x_3, поэтому

$$2\sigma_{33}(\mathrm{x}, d) = -\int_{-d}^{d} \sum_{i=1}^{2} \sigma_{3i,i}(\mathrm{x}, \tau)\, d\tau =$$
$$= \int_{-d}^{d} (d - x_3) \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2 \sigma_{ij}(\mathrm{x}, x_3)}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_3 =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left[\int_{-d}^{d} - \frac{\partial D(-\mu(w^h)\, x_3)}{\partial \varepsilon_{ij}}\, x_3 dx_3 \right] = F^h$$

откуда $\sigma_{33}(\mathrm{x}, \pm d) = \pm F^h / 2$, следовательно, $\sigma \in P$.

Из (3.11), (3.12), (3.9) получим (mes V — евклидова мера области V)

$$(3.13) \qquad \|\sigma - \alpha^h\|_{L_2(V_h)} = \|\sigma_2\|_{L_2(V_h)} \leqslant \frac{\varkappa c_F h}{\gamma} (\mathrm{mes}\, V)^{1/2} \leqslant \frac{\varkappa c_F (\mathrm{mes}\, \Omega)^{1/2}}{\gamma} h^{3/2}$$

Построим поле $\mathrm{u} \in H$ так, чтобы $\varepsilon(\mathrm{u})$ «мало отличалось» от δ^h, именно, положим

$$(3.14) \qquad u_i(\mathrm{x}, x_3) = -w_{,i}^h(\mathrm{x})\, x_3, \quad i = 1, 2,$$
$$u_3(\mathrm{x}, x_3) = w^h(\mathrm{x}) + \eta_\rho(\mathrm{x})\, \vartheta^h(\mathrm{x}, x_3)$$

$$(3.15) \qquad \vartheta^h(\mathrm{x}, x_3) = \int_0^{x_3} \delta_{33}^h(\mathrm{x}, \tau)\, d\tau$$

Здесь $\eta_\rho(\mathrm{x})$ — гладкая финитная в Ω функция, равная единице в подобласти Ω_ρ (Ω_ρ состоит из точек, удаленных от границы на расстояние, большее ρ) и такая, что

$$(3.16) \qquad 0 \leqslant \eta_\rho(\mathrm{x}) \leqslant 1, \quad |\nabla \eta_\rho(\mathrm{x})| \leqslant c / \rho$$

По условию (3.8) δ_{33}^h непрерывно дифференцируема по x_1, x_2, поэтому $\mathrm{u} \in H$ и из (3.14), (3.15), (2.12), (2.8) следует, что

$$\varepsilon_{ij}(\mathrm{u}) = \delta_{ij}^h, \quad i, j = 1, 2, \quad \varepsilon_{i3}(\mathrm{u}) = \varepsilon_{3i}(\mathrm{u}) = \eta_{\rho,i} \vartheta^h + \eta_\rho \vartheta_{,i}^h, \quad i = 1, 2$$
$$\varepsilon_{33}(\mathrm{u}) = \eta_\rho(\mathrm{x})\, \delta_{33}^h$$

Из (3.8), (3.15), $|\vartheta^h| \leqslant hlc_F / \gamma$, $|\vartheta_{,i}^h| \leqslant hlc_F / \gamma$, $i = 1, 2$, тогда ввиду (3.16) получим

$$|\varepsilon_{i3}(\mathrm{u})| \leqslant hcc_F \gamma^{-1} (\rho^{-1} + 1), \quad \mathrm{x} \notin \Omega_\rho, \quad |\varepsilon_{i3}(\mathrm{u})| \leqslant c_F \gamma^{-1}$$
$$\mathrm{x} \in \Omega_\rho, \quad i = 1, 2$$

Отсюда

$$(3.17) \qquad \|\varepsilon_{i3}(\mathrm{u})\|_{L_2(V_h)} \leqslant \frac{cc_F}{\gamma} (\rho^{-1} + 1)\, h^{3/2} \rho^{1/2} + h^{1/2} \frac{c_F}{\gamma} (l\, \mathrm{mes}\, \Omega)^{1/2}$$

Функции $\varepsilon_{33}(\mathrm{u})$ и δ_{33}^h совпадают при $\mathrm{x} \in \Omega_\rho$, поэтому из (3.8) получим

$$(3.18) \qquad \|\varepsilon_{33}(\mathrm{u}) - \delta_{33}^h\|_{L_2(V_h)} \leqslant \frac{cc_F}{\gamma} h^{1/2} \rho^{1/2}$$

Положим $\rho = h$, тогда из (3.17), (3.18) следует, что

$$\|\varepsilon(\mathbf{u})-\delta^h\|_{L_2(V_h)}=\Big(2\sum_{i=1}^{2}\|\varepsilon_{i3}(\mathbf{u})\|^2_{L_2(V_h)}+\|\varepsilon_{33}(\mathbf{u})-\delta_{33}^{h}\|^2_{L_2(V_h)}\Big)^{1/2}\leqslant\frac{cc_F}{\gamma}h \tag{3.19}$$

Из (3.19), (2.14), (1.4) следует, что

$$\|\sigma(\mathbf{u})-\alpha^h\|_{L_2(V_h)}\leqslant\frac{c\varkappa c_F}{\gamma}h \tag{3.20}$$

Из (3.20), (3.13) следует, что

$$\|\sigma(\mathbf{u})-\sigma\|_{L_2(V_h)}\leqslant\frac{c\varkappa c_F}{\gamma}h \tag{3.21}$$

Используя (3.21), (1.26), (3.1), получаем окончательные оценки погрешности решения уравнений плит (как и ранее, ε°, σ° — решение объемной задачи упругости)

$$\|\sigma^\circ-\alpha^h\|_{L_2(V_1)}\leqslant c\left(\frac{\varkappa}{\gamma}\right)^{3/2}c_F h^{1/2}$$

$$\|\varepsilon^\circ-\delta^h\|_{L_2(V_1)}\leqslant c\frac{\varkappa}{\gamma^2}c_F h^{1/2}$$

Поступила 2 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prager W., Synge J. L.* Approximations in elastisity based on the concept of function space. Quart. Appl. Math., 1947, vol. 5, No. 3.
2. *Synge J. L.* The hypercircle in mathematical physics. Cambridge Univ. Press, 1957.
3. *Koiter W. T.* On the foundations of the linear theory of thin elastic shells. Proc. Koninkl. nederl. acad. wet. B, 1970, vol. 73, No. 3.
4. *Koiter W. T.* On the mathematical foundation of shell theory. Actes Congres internat. mathém., vol. 3, Paris, Gauthier — Villars, 1971.
5. *Morgenstern D.* Herleitung der Plattentheorie aus der dreidimensionalen Elastizitäts theorie. Arch. Rational. Mech. and Analysis, 1959, vol. 4, No. 2.
6. *Бердичевский В. Л.* Одно энергетическое неравенство в теории изгиба пластин. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
7. *Шойхет Б. А.* Об асимптотически точных уравнениях тонких плит сложной структуры. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
8. *Каудерер Г.* Нелинейная механика. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
9. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи. Успехи матем. наук, 1968, т. 23, вып. 6.
10. *Лангенбах А.* О некоторых нелинейных операторах теории упругости в гильбертовом пространстве. Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ., астрон., 1961, № 1, вып. 1.
11. *Dinca G.* Sur la monotonie d'aprés Minty — Browder de l'operateur de la théorie de plasticité. C. R. Acad. Sci., Paris. Ser. A et B, 1969, vol. 269, No. 13.
12. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка. Киев, «Наукова думка», 1973.
13. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., «Наука», 1972.
14. *Langenbach A.* Elastisch-plastische Deformation en von Platten. Z. angew. Math. und Mech., 1961, Bd 41, Nr 3.
15. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во ЛГУ, 1950.
16. *Nečas J.* Sur la régularité des solutions faibles des équations elliptiques non linéaries. Comment. Math. Univ, Carolinae, 1968, vol. 9, No. 3.
17. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях. М., Изд-во иностр. лит., 1962.