

**О ДЕФОРМАЦИИ УПРУГОЙ КЛИНОВИДНОЙ ПЛАСТИНКИ,
ПОДКРЕПЛЕННОЙ СТЕРЖНЕМ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ,
И ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ**

Б. М. Нуллер

(Ленинград)

Рассматривается плоское напряженное состояние бесконечного упругого клина, подкрепленного по биссектрисе бесконечным упругим стержнем, жесткость которого изменяется, как r^ω (r — расстояние от вершины клина). Задача сведена к разностному уравнению первого порядка со сдвигом ω и решена в замкнутой форме. Решение сохраняет смысл при $\omega = \pm \infty$, когда указанная основная задача для подкрепленной области переходит в смешанную задачу для области однородной. Таким образом, предлагаемый метод, который применим также к задачам для прямоугольных, цилиндрических и конических областей, усиленных стержнями, пластинами, круглыми плитами и оболочками переменной жесткости, является в определенном отношении более общим, чем метод Винера — Хопфа.

Ранее при помощи разностных уравнений изучались однородные [1-4] и неоднородные [5,6] задачи для упругого клина, подкрепленного стержнями постоянной жесткости. Соответствующие задачи теплопроводности и дифракции электромагнитных волн на клине были решены в работах [7,8] и др.

1. Пусть упругая клиновидная пластинка $0 \leq r < \infty$, $-\alpha \leq \theta \leq \alpha$ толщины h полностью спаяна по биссектрисе с бесконечным упругим стержнем. Жесткости стержня $2D_j(r)$ на растяжение и изгиб в плоскости r, θ выражаются соответственно равенствами

$$(1.1) \quad D_1(r) = \beta r + \gamma r^{1+\omega}$$

$$(1.2) \quad D_2(r) = \beta r^3 + \gamma r^{3+\omega}$$

где $\beta \geq 0$, $\gamma \geq 0$ и ω — любые действительные числа, причем одинаковые буквы могут обозначать в (1.1) и (1.2) различные числа. Величины усилий, приложенных к клину или стержню в точках $r = l_s$, обозначим буквами M, N, S с индексами s , индексы 0 и ∞ соответствуют точкам клина $r = 0$ и стержня $r = \infty$ (см. фигуру; обозначения усилий, приложенных в точках $r = l_s$ и $r = \infty$ и изображенных стрелками, аналогичны указанным для точки $r = 0$ и на фигуре опущены).

Разобьем поставленную задачу на симметричную и кососимметричную. Тогда граничные условия для правой половины клина распадутся на три группы: общие условия

$$(1.3) \quad h\sigma_\theta(r, \alpha) = N_1 \delta(r - l_1), \quad h\tau_{r\theta}(r, \alpha) = S_1 \delta(r - l_1)$$

условия контакта со стержнем, растягиваемым без изгиба

$$(1.4) \quad v(r, 0) = 0$$

$$(1.5) \quad \frac{\partial}{\partial r} D_1(r) \frac{\partial}{\partial r} u(r, 0) + h\tau_{r\theta}(r, 0) = -S_3\delta(r - l_3)$$

$$(1.6) \quad h \int_0^{\infty} \tau_{r\theta}(r, 0) dr = S_2 - S_3 - S_{\infty}$$

и условия контакта со стержнем, изгибаемым без растяжения

$$(1.7) \quad u(r, 0) = 0$$

$$(1.8) \quad \frac{\partial^2}{\partial r^2} D_2(r) \frac{\partial^2}{\partial r^2} v(r, 0) - h\sigma_{\theta}(r, 0) = N_3\delta(r - l_3)$$

$$(1.9) \quad h \int_0^{\infty} \sigma_{\theta}(r, 0) dr = -N_2 - N_3$$

$$(1.10) \quad h \int_0^{\infty} \sigma_{\theta}(r, 0) r dr = M_2 + N_2 l_2 - N_3 l_3 - M_{\infty}$$

Здесь $\delta(r)$ — дельта-функция Дирака.

2. Решение симметричной задачи будем искать в виде интегралов [5], вычисленных с учетом граничных условий (1.3), (1.4)

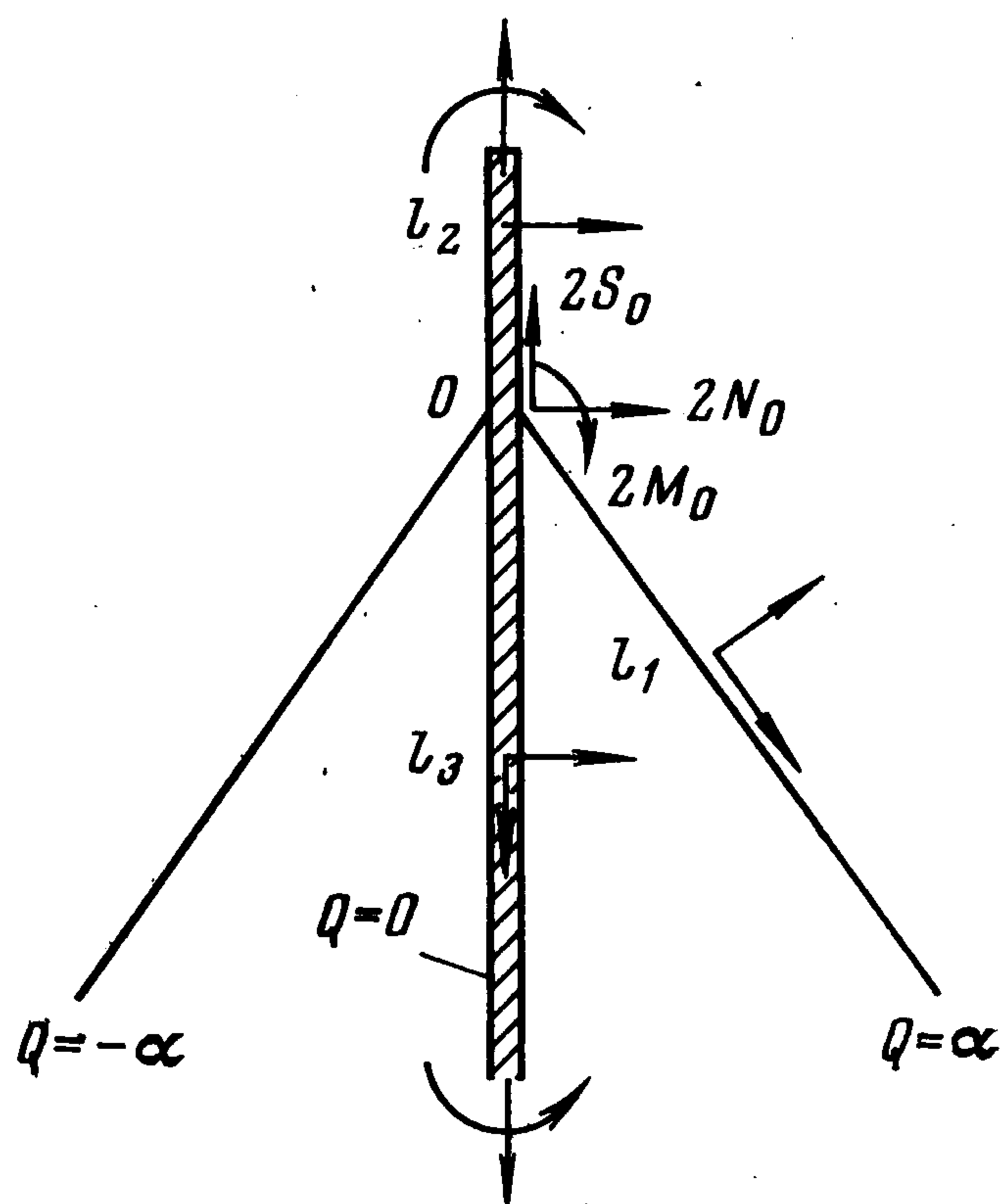
$$(2.1) \quad 2G \begin{Bmatrix} u(r, \theta) \\ v(r, \theta) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \left(\pm A(p) \left[(p \pm \kappa) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (p+1)\theta \pm \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (p-1)\theta - \Delta_1^+ \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (p-1)\theta \right] + \right. \\ \left. + B(p) \left[(p \pm \kappa) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (p+1)\theta + \Delta_1^- \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} (p-1)\theta \pm \Delta_2^+ \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} (p-1)\theta \right] \pm \frac{N_1 l_1^p}{hp} \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} [(p-1)(\alpha - \theta)] \mp \right. \\ \left. \mp \frac{S_1 l_1^p}{hp} \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} [(p-1)(\alpha + \theta)] \right) \frac{dr}{r^p}$$

$$(2.2) \quad \Delta_1^{\pm} = \cos 2p\alpha \pm p \cos 2\alpha, \quad \Delta_2^{\pm} = \sin 2p\alpha \pm p \sin 2\alpha, \quad \kappa = \frac{3-\nu}{1+\nu}$$

$$(2.3) \quad B(p) = (\Delta_2^+)^{-1} \{ A(p) (\Delta_1^+ - p + \kappa) - h^{-1} p^{-1} l_1^p [N_1 \sin (p-1)\alpha - S_1 \cos (p-1)\alpha] \}$$

где ν — коэффициент Пуассона, G — модуль сдвига пластинки, контур L — прямая $\text{Re } p = \lambda$.

Подставим выражения (2.1) — (2.3) в условие (1.5) и сгруппируем слагаемые с одинаковыми степенями r . В первом интеграле полученного



равенства

$$(2.4) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_L \left\{ \left[\frac{\beta p^2 \Delta_3}{2G\Delta_2^+} - h(1 + \kappa)p \right] A(p) + \beta p q(p) - S_3 l_3^p \right\} \frac{dp}{r^{p+1}} + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{\gamma p(p - \omega) \Delta_3}{2G\Delta_2^+} A(p) + \gamma(p - \omega) q(p) \right] \frac{dp}{r^{p+1-\omega}} = 0$$

$$q(p) = (2Gh\Delta_2^+)^{-1} (p + \kappa + \Delta_1^- + \Delta_2^+) l_1^p [S_1 \cos(p - 1)\alpha - \\ - N_1 \sin(p - 1)\alpha]$$

$$\Delta_3 = 4\kappa \sin^2 p\alpha + 4p^2 \sin^2 \alpha - (1 + \kappa)^2$$

содержимое фигурной скобки обозначим через $C(p)$, аргумент p заменим на $p - \omega$, контур L сдвинем по вещественной оси на величину ω и обозначим через L_1 . Перепишем это равенство в виде

$$(2.5) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} C(p - \omega) \frac{dp}{r^{p+1-\omega}} = \frac{1}{2\pi i} \int_L [F(p)C(p) + f(p)] \frac{dp}{r^{p+1-\omega}}$$

$$(2.6) \quad F(p) = \beta^{-1} \gamma p^{-1} (\omega - p) [1 - 2Gh(1 + \kappa)(\beta p \Delta_3)^{-1} \Delta_2^+]^{-1}$$

$$(2.7) \quad f(p) = F(p) [S_3 l_3^p - 2Gh(1 + \kappa) \Delta_2^+ \Delta_3^{-1} q(p)]$$

Допустим, функция $C(p)$ в полосе, ограниченной прямыми $\operatorname{Re} p = \lambda$ и $\operatorname{Re} p = \lambda - \omega$, 1) регулярна и 2) стремится к нулю при $|\operatorname{Im} p| \rightarrow \infty$. Тогда по теореме Коши в (2.5) контур L_1 можно заменить на L , и задача сводится к разностному уравнению первого порядка

$$(2.8) \quad C(p - \omega) = F(p)C(p) + f(p) \quad (p \in L)$$

Форма его решения и положение контура L связаны со знаком параметра ω , случаи $\omega = 0$ и $\gamma = 0$ вполне элементарны. Единственность решения задачи (2.8) устанавливается при помощи аналога теоремы Лиувилля (см. теорему 7 п. 101 [9]) так же, как единственность решения задачи Римана [10]. Коэффициент задачи (2.8) будем всегда представлять в виде произведения $F(p) = F_1(p)F_2(p)$, где $F_1(p)$ — элементарная функция; на L функция $F_2(p)$ удовлетворяет условию Гельдера и имеет индекс $\kappa = 0$.

Пусть $\omega < 0$. Полагая $\lambda < 0$, $S_0 = 0$, рассмотрим различные значения параметров β и γ . При $\beta > 0$, $\gamma > 0$ получим

$$(2.9) \quad F_1(p) = \beta^{-1} \gamma p^{-1} (\omega - p) \\ F_2^{-1}(p) = 1 - 2Gh(1 + \kappa) \beta^{-1} p^{-1} \Delta_2^+ \Delta_3^{-1} \\ F_2(iy) = 1 + \kappa_1 |y|^{-1} + O(e^{-2\alpha|y|}), \quad \kappa_1 = Gh(1 + \kappa) \beta^{-1} \kappa^{-1}$$

Каноническое решение $C_0(p)$ однородного уравнения (2.8), учитывая условия 1) и 2), запишем в виде

$$(2.10) \quad C_0(p) = \pi \omega^{-1} p (\beta / \gamma)^{p/\omega} \sin^{-1}(\pi \omega^{-1} p) X(p)$$

где функция $X(p)$ выражается в форме Р. Д. Банцури [3]

$$(2.11) \quad X(p) = F_2^{-1}(p) Y(p) \quad (\omega < \operatorname{Re} p \leq 0), \quad X(p) = Y(p) \\ (0 < \operatorname{Re} p \leq -\omega)$$

$$(2.12) \quad Y(p) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\omega i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-p)}{|\omega|} \ln F_2(t) dt \right\}$$

Согласно асимптотике (2.9) интеграл (2.12) существует только в смысле главного значения по Коши и в этом смысле обладает экспоненциальной сходимостью на бесконечности.

Решение неоднородного уравнения (2.8) в силу тех же условий 1), 2) и в связи с наличием у функции $f(p)$ в точке $p = 0$ простого полюса приобретает вид [5]

$$(2.13) \quad C(p) = AC_0(p) + C_{10}(p)Z(p), \quad C_{10}(p) = C_0(p) \cos(\pi\omega^{-1}p)$$

$$(2.14) \quad Z(p) = W(p) - g(p) \quad (\omega < \operatorname{Re} p \leq 0), \quad Z(p) = W(p) \\ (0 < \operatorname{Re} p \leq -\omega)$$

$$(2.15) \quad W(p) = -\frac{1}{2\omega i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{g(t) dt}{\sin[\pi|\omega|^{-1}(t-p)]}, \quad g(p) = -\frac{f(p)}{C_{10}(p-\omega)}$$

где $C_{10}(p)$ — решение однородного уравнения

$$C_1(p-\omega) = -F(p)C_1(p) \quad (p \in L)$$

Значение постоянной A найдем из условия (1.6), левая часть которого представляет собой трансформанту функции $\tau_{r\theta}(r, 0)$, равную $(1 + \kappa)p \cdot A(p)$ при $p = 0$, а неизвестная сила S_∞ в правой части определяется равенствами

$$(2.16) \quad S_\infty = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_L E(p) \left(\frac{\beta}{r^p} + \frac{\gamma}{r^{p-\omega}} \right) dp = -\beta \lim_{p \rightarrow 0} pE(p)$$

$$E(p) = (2G\Delta_2^+)^{-1} p \Delta_3 A(p) + q(p)$$

Здесь контурный интеграл был заменен рядом по вычетам в полюсах, расположенных правее мнимой оси. Выражая $A(p)$ через $C(p)$ и переходя в формуле (2.13) к пределу при $p \rightarrow 0$, получим

$$(2.17) \quad -S_2 \{ [1 + 2Gh(1 + \kappa)^{-1} \beta^{-1} (2\alpha + \sin 2\alpha)] Y(-0) \}^{-1}$$

Исследуем характер контактных напряжений в вершине клина. Замыкая в (2.1) контур L слева системой полуокружностей, проходящих между полюсами трансформанты $\tau_{r\theta}(r, \theta)$, получим при $r \rightarrow 0$

$$(2.18) \quad \tau_{r\theta}(r, 0) = \operatorname{Res} \left[\frac{2A\pi G(1 + \kappa)(\beta/\gamma)^{p/\omega} \Delta_2^+ Y(p)}{\beta\omega\Delta_3 \sin(\pi\omega^{-1}p) r^{p+1}} \right]_{p=\mu}$$

Здесь μ — первый полюс функции, заключенной в квадратные скобки. Очевидно, он может быть либо первым нулем $p = \omega$ функции $\sin(\pi\omega^{-1}p)$, либо первым нулем $p = a_1$ функции Δ_3 (таблица значений a_1 имеется в [11]). Поэтому, если $\omega > -1$, то при любом α в вершине возникают неограниченно растущие напряжения $\tau_{r\theta}(r, 0) = O(r^{-\mu-1})$, где μ — ближайшая из точек $p = \omega$ и $p = a_1$ к мнимой оси. Если $\omega \leq -1$, то $\mu = a_1$, и указанная особенность имеет место только при $\alpha > \alpha^*$, где $\alpha^* = \arcsin(1 + \nu)^{-1/2}$ [11].

Когда $r \rightarrow \infty$, то $\tau_{r\theta}(r, 0) = O(r^{-\mu-1})$; здесь μ выбирается из чисел $-\omega$ и a_2 — первого полюса функции $F_2(p)$ при $\operatorname{Re} p > 0$.

Пусть $\beta = 0$, $\gamma > 0$. Учитывая изменения в (2.6), получим

$$(2.19) \quad F_2(p) = -\frac{\Delta_3}{2\kappa\Delta_2^+} \operatorname{tg} \frac{\pi p}{2|\omega|}, \quad F_2(iy) = 1 + O(e^{-2\alpha|y|}) + O(e^{-\pi|\omega^{-1}y|})$$

$$(2.20) \quad C_0(p) = \left[\frac{Gh(1+\kappa)}{\gamma\kappa|\omega|} \right]^{p/\omega} \frac{\Gamma(1-\omega^{-1}p) X(p)}{\cos(1/2\pi\omega^{-1}p)}$$

Остальная часть решения (2.11) — (2.15) сохраняется, сохраняют свой характер и контактные напряжения в вершине клина. На бесконечности жесткость стержня теперь равна нулю, весь главный вектор внешней нагрузки передается на клин. Согласно (2.16) $S_\infty = 0$, вместо (2.17) имеем

$$(2.21) \quad A = -S_2 X^{-1}(0) - Z(0)$$

Это во многом рациональное решение становится непригодным при $\omega = -\infty$. Чтобы соответствующий предельный переход был осуществим, следует вместо (2.19) и (2.20) пользоваться более громоздкими формулами

$$(2.22) \quad F_1(p) = \frac{\gamma\kappa(\omega-p)}{Gh(1+\kappa)} \operatorname{ctg} \pi p, \quad F_2(p) = -\frac{\Delta_3 \operatorname{tg} \pi p}{2\kappa\Delta_2^+}$$

$$(2.23) \quad C_0(p) = \left[\frac{Gh(1+\kappa)}{\gamma\kappa} \right]^{p/\omega} \frac{\pi\omega^{-1}p\Gamma(p) X(p)}{\sin(\pi\omega^{-1}p)}$$

$$T(p) = \prod_{s=1}^{\infty} \Gamma\left(\frac{\pi s - 1/2\pi + p}{-\omega}\right) \Gamma\left(1 - \frac{\pi s - p}{\omega}\right) \Gamma^{-1}\left(\frac{\pi s + p}{-\omega}\right) \Gamma^{-1} \times \\ \times \left(1 - \frac{\pi s - 1/2\pi - p}{\omega}\right) \left(1 - \frac{1}{2s}\right)^{2p/\omega+1}$$

Они дают экспоненциальную сходимость интеграла (2.12) и не изменяют выражения (2.21). Решение задачи $C(p-\omega) = F_1(p) C(p)$ получено методом Барнса, исследовавшего уравнение (2.8) еще в 1904 г. [12].

Случай $\beta > 0$, $\gamma = 0$ при любых ω равносильен элементарному случаю $\omega = 0$.

Построим решение при $\omega > 0$. Жесткость стержня растет теперь по r так, что в точке $r = 0$ перемещения клина и стержня, вызванные действием сосредоточенных сил S_0 и S_2 , могут быть согласованы, главный вектор заданной нагрузки на бесконечности целиком передается на стержень, следовательно, $\lambda > 0$.

При $\beta > 0$, $\gamma > 0$ в решении (2.9) — (2.16) изменяются только равенства (2.11) и (2.14)

$$(2.24) \quad X(p) = F_2^{-1} Y(p), \quad Z(p) = W(p) - g(p) \quad (0 < \operatorname{Re} p \leq \omega) \\ X(p) = Y(p), \quad Z(p) = W(p) \quad (-\omega < \operatorname{Re} p \leq 0)$$

Из равенств

$$2.25) \quad S_\infty = -\gamma \lim_{p \rightarrow \omega} (p - \omega) E(p) = Y(-0) [A + W(-0)]$$

и из условия равновесия системы клин — стержень

$$(2.26) \quad S_\infty + S_3 - S_2 - S_0 - N_1 \sin \alpha + S_1 \cos \alpha = 0$$

получим

$$(2.27) \quad A = (S_0 + S_2 - S_3 + N_1 \sin \alpha - S_1 \cos \alpha) Y^{-1}(-0) - W[(-0)]$$

Пусть $\beta = 0$, $\gamma > 0$. Тогда удовлетворяющее условиям 1) и 2) решение задачи (2.8) определяется равенствами (2.13), (2.20), (2.24), (2.19),

(2.12) и (2.15). Чтобы установить связь между величинами S_0 и S_2 , воспользуемся условием (1.6), согласно которому

$$S_2 = \lim_{p \rightarrow 0} [h(1 + \kappa) p A(p)] + S_3 + S_\infty = -C(0) + S_\infty$$

Вычислив по формулам (2.13) и т. д. $C(0)$ и учитывая (2.25), получим

$$(2.28) \quad C(0) = S_\infty = Y(-0) [A + W(-0)]$$

Таким образом, $S_2 = 0$ при любых A . Приложенная к подкрепленному клину сила полностью передается на его вершину, являясь силой S_0 . Из (2.28) и (2.26) снова следует (2.27).

В решении, сохраняющем смысл при $\omega = \infty$, вместо (2.19) и (2.20) нужно брать равенства (2.22) и (2.23).

3. Рассмотрим кососимметричную задачу. В силу (1.7) для перемещений (2.1) имеем

$$(3.1) \quad A(p) = -(\Delta_2^-)^{-1} \{B_-(p) (\Delta_1^- + p + \kappa) + h^{-1} p^{-1} l_1^p [N_1 \times \times \cos(p-1)\alpha - S_1 \sin(p-1)\alpha]\}$$

Подставив (2.1) в (1.8), вводя новую неизвестную функцию

$$(3.2) \quad C(p) = B(p) [(2G\Delta_2^-)^{-1} \beta p^2 (p^2 - 1) \Delta_3 + h(1 + \kappa) p] - - \beta p^2 (p^2 - 1) q(p) - N_3 l_3^p$$

и предполагая, что в прежней полосе она удовлетворяет прежним условиям 1), 2), получим уравнение (2.8) со следующими значениями входящих в него функций:

$$(3.3) \quad F(p) = \frac{\gamma(p - \omega)(p - \omega - 1)}{\beta p(1 - p) [1 + 2Gh(1 + \kappa) \beta^{-1} p^{-1} (p^2 - 1)^{-1} \Delta_2^- \Delta_3^{-1}]}$$

$$(3.4) \quad f(p) = -F(p) [N_3 l_3^p + 2Gh(1 + \kappa) p \Delta_2^- \Delta_3^{-1} q(p)]$$

$$(3.5) \quad q(p) = (2Ghp)^{-1} l_1^p \{ [N_1 \cos(p-1)\alpha - S_1 \sin(p-1)\alpha] \times \times (\Delta_2^-)^{-1} + N_1 \sin(p-1)\alpha + S_1 \cos(p-1)\alpha \}$$

Пусть $\omega < -1$. Тогда $\lambda < 0$, $M_0 = N_0 = 0$, и если $\beta > 0$, $\gamma > 0$, то

$$(3.6) \quad F_1(p) = -\beta^{-1} \gamma p^{-1} (p-1)^{-1} (p-\omega)(p-\omega-1) \\ F_2(p) = F(p) F_1^{-1}(p)$$

Общее решение уравнения (2.8) имеет вид

$$(3.7) \quad C(p) = C_0(p) \{ A_1 + A_2 \pi \omega^{-1} \operatorname{ctg} [\pi \omega^{-1} (p-1)] + + \cos(\pi \omega^{-1} p) Z(p) \}$$

$$(3.8) \quad C_0(p) = \pi \omega^{-1} p (p-1) (\beta / \gamma)^{p/\omega} \sin^{-1}(\pi \omega^{-1} p) X(p)$$

где функции $X(p)$ и $Z(p)$ определяются равенствами (2.11) — (2.15).

Найдем постоянные A_1 и A_2 . Подобно (2.16) имеем

$$(3.9) \quad M_\infty = -\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_L \left[\frac{B(p) \Delta_3}{2G\Delta_2^-} - q(p) \right] (p+1) p (\beta r^{1-p} + \gamma r^{1+\omega-p}) dp = \\ = \lim_{p \rightarrow 1} p(1-p^2) [B(p) (2G\Delta_2^-)^{-1} - q(p)]$$

Отсюда и из условий (1.9), (1.10), левые части которых равны $h(1 + \kappa) p B(p)$ при $p = 0$ и $p = 1$, следует

$$(3.10) \quad A_1 = \frac{N_2 + N_3 - (1 + \kappa)^{-1} (N_1 \cos \alpha + S_1 \sin \alpha)}{X(0) [t_2(0) - 1]} + A_2 \pi \omega^{-1} \operatorname{ctg} \pi \omega^{-1}$$

$$(3.11) \quad A_2 = (M_2 + N_2 l_2) \pi^{-1} \omega (\gamma / \beta)^{1/\omega} \sin \pi \omega^{-1} Y^{-1} (1)$$

Контактные напряжения $\sigma_\theta(r, 0)$ в вершине клина определяются вычетом их трансформанты $h(1 + \kappa)p B(p)$ в первом полюсе $p = \mu$ слева от мнимой оси. Согласно (2.1), (3.1), (3.2), (3.7) и (3.8) при $r \rightarrow 0$ $\sigma_\theta(r, 0) = O(r^{-\mu-1})$. Если $A_2 = 0$, то, как в симметричной задаче, $\mu = a_1$, степенная особенность появляется при $\alpha > \alpha^*$. Если $A_2 \neq 0$, то μ равно a_1 или $\omega + 1$ и тогда при $\omega \rightarrow -1 - 0$ (d — постоянная)

$$(3.12) \quad \sigma_\theta(r, 0) \rightarrow dr^{-1+0}$$

Рассмотрим случай $\beta = 0$, $\gamma > 0$. Положим

$$(3.13) \quad F_1(p) = \frac{\gamma \kappa (p+1) (p-\omega) (p-\omega-1)}{Gh(1+\kappa) \operatorname{tg} (1/2\pi |\omega|^{-1} p)}$$

$$F_2(p) = -\frac{\Delta_3}{2\kappa \Delta_2^-} \operatorname{tg} \frac{\pi p}{2|\omega|}$$

Решение задачи (2.8) запишем в виде

$$(3.14) \quad C(p) = C_0(p) [A_1 \omega^{-1} \operatorname{ctg} (\pi \omega^{-1} p) + A_2 + \cos (\pi \omega^{-1} p) Z(p)]$$

$$(3.15) \quad C_0(p) = Q^p h^\omega \Gamma\left(\frac{\omega-p}{\omega}\right) \Gamma\left(\frac{\omega+1-p}{\omega}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{|\omega|}\right) \sin \frac{\pi p}{2\omega} X(p)$$

$$Q = Gh(1+\kappa) \kappa^{-1} \gamma^{-1} |\omega|^{-3}$$

вычисляя функции $X(p)$ и $Z(p)$ по формулам (2.11) — (2.15). Так как $M_\infty = 0$, из условий (1.9), (1.10) получим

$$(3.16) \quad A_1 = 2N_2 \pi^{-1} \omega \sin \pi \omega^{-1} X^{-1}(0)$$

$$(3.17) \quad A_2 = \frac{(N_3 l_3 - N_2 l_2 - M_2) \omega Q^{-1/\omega}}{\Gamma(-\omega^{-1}) \Gamma(-2\omega^{-1}) \sin(1/2\pi \omega^{-1}) X(1)} - \left[\frac{2N_2 \omega}{\pi X(0)} + Z(1) \right] \cos \frac{\pi}{\omega}$$

Напряжения $\sigma_\theta(r, 0)$ остаются в вершине клина теми же, что при $\beta \neq 0$. При больших $|\omega|$ в (3.14) следует положить

$$(3.18) \quad F_1(p) = \frac{\gamma \kappa (p+1) (p-\omega) (p-\omega-1)}{Gh(1+\kappa)} \operatorname{ctg} \pi p, \quad F_2(p) = -\frac{\Delta_3 \operatorname{tg} \pi p}{2\kappa \Delta_2^-}$$

$$(3.19) \quad C_0(p) = \frac{\pi p}{2\omega} (Q |\omega|)^{p/\omega} \Gamma\left(\frac{\omega+1-p}{\omega}\right) \Gamma\left(\frac{p+1}{-\omega}\right) T(p) X(p)$$

$$A_2 = \frac{2(N_3 l_3 - N_2 l_2 - M_2) (Q |\omega|)^{1/\omega} \omega^2}{\pi \Gamma(-\omega^{-1}) \Gamma(-2\omega^{-1}) T(1) X(1)}$$

не изменяя остальные функции и постоянную A_1 .

Пусть $\omega \in [-1, 0)$. Тогда в решениях (3.7) и (3.14) слагаемые с коэффициентом A_2 не удовлетворяют условию 1), (что заметно уже в (3.12)), так как функции $\operatorname{ctg} [\pi \omega^{-1} (p-1)]$ и $\Gamma(1 + \omega^{-1} - \omega^{-1} p)$ имеют полюсы в точке $p = 1 + n\omega$ (n — целая часть $|\omega|^{-1}$). Если $A_2 = 0$, эти решения распространяются на рассматриваемый промежуток ω , но в них при $\beta > 0$, например, согласно (3.11) $M_2 + N_2 l_2 = 0$. Чтобы избавиться от такого рода ограничений, построим в дополнение к рассмотренному новое решение (2.1), (2.2), (3.1), (3.2) однородной задачи с одной постоянной A_2^* , вместо A_2 , отличающееся от прежнего лишь местом контура L — пря-

мой $\operatorname{Re} p = \lambda^*$. Полагая $\lambda^* > 1 + \omega$, $\lambda_1^* > \lambda^*$, в случае $\beta \neq 0$ решение уравнения (2.8), (3.13) при $f(p) \equiv 0$ запишем в виде

$$(3.20) \quad C(p) = A_2^* \pi \omega^{-1} p (p-1) (\beta/\gamma)^{\omega/\omega} \sin [\pi \omega^{-1} (p-1)] X^*(p)$$

$$(3.21) \quad X^*(p) = F_2^{-1}(p) Y^*(p) \quad (\omega + \lambda_1^* < \operatorname{Re} p \leq \lambda_1^*)$$

$$(3.22) \quad X^*(p) = Y^*(p) \quad (\lambda_1^* < \operatorname{Re} p \leq \lambda_1^* - \omega)$$

$$(3.23) \quad Y^*(p) = \exp \left\{ -\frac{1}{2\omega i} \int_{\lambda_1^* - i\infty}^{\lambda_1^* + i\infty} \operatorname{ctg} \frac{\pi(t-p)}{|\omega|} \ln F_2(t) dt \right\}$$

Нетрудно проверить, что оно удовлетворяет условиям 1), 2), если в полосе $0 < \operatorname{Re} p < \lambda_1^*$ у функции $F_2(p)$ нет полюсов и нулей. Если таковые имеются и изменяют индекс функции $F_2(p)$ при смещении L с мнимой оси на λ_1^* , то его снова можно сделать равным нулю, умножив $F_2(p)$ на $\operatorname{tg}^k \pi p$. Аналогичным образом с учетом (3.15) строится решение при $\beta = 0$. Если $\omega > -1$, то A_1 можно найти по (3.10), если $\omega = -1$, то

$$(3.24) \quad A_1 = \frac{N_2 + N_3 - (1 + \kappa)^{-1} (N_1 \cos \alpha + S_1 \sin \alpha)}{X(0) [F_2(0) - 1]} + \frac{A_2^* X^*(0)}{X(0)}$$

$$X^*(0) = Y^*(n\omega) \prod_{s=1}^n F_2^{-1}(s|\omega|)$$

Во всем промежутке $-1 \leq \omega < 0$

$$(3.25) \quad A_2^* = (M_2 + N_2 l_2) (\gamma/\beta)^{1/\omega} [Y^*(1)]^{-1}$$

Пусть $\omega > 0$, $l_2 = 0$. Решение, как при $\omega \in [1, 0)$, будем искать в виде суммы интегралов (2.1), взятых по контурам а) $\operatorname{Re} p = \lambda > 0$ и б) $\operatorname{Re} p = \lambda^* > 1$ и соответствующих случаям действия на подкрепленный клин а) всех усилий, кроме M_0, M_2 , и б) только моментов M_0, M_2 . Таким образом, в уравнении (2.8) для задачи б) $f(p) \equiv 0$.

Если $\beta \neq 0$, то при всех ω решение этого уравнения для задачи а) выражается формулами (3.7) при $A_2 = 0$, (3.8), (2.24), (2.12), (2.15), (3.6), (3.3) — (3.5), для задачи б) — формулой (3.20), в которой

$$(3.26) \quad X^*(p) = F_2^{-1}(p) Y^*(p) \quad (1 < \operatorname{Re} p \leq 1 + \omega)$$

$$X^*(p) = Y^*(p) \quad (1 - \omega \leq \operatorname{Re} p \leq 1)$$

Здесь для простоты предполагается, что функция $F_2(p)$, определенная равенствами (3.6), (3.3), не имеет полюсов и нулей в полосе $0 < \operatorname{Re} p \leq 1$; это справедливо во всяком случае при $\alpha \leq 1/6 \pi$. В формуле (3.23) для $Y^*(p)$ можно положить $\lambda_1^* = 1$. Постоянная A_2^* находится из (3.25), A_1 — из (3.10) при $\omega \neq 1$ и из (3.24) при $\omega = 1$, где под $X^*(0) = F(1)$ $X^*(1)$ нужно понимать аналитическое продолжение функции $X^*(p)$ в точке $p = 0$. Вместе с M_2, N_2 на вершину клина действуют теперь усилия M_0, N_0 , величины которых зависят от A_1, A_2^* и могут быть найдены путем интегрирования по θ напряжений $\sigma_r(r, \theta)$ при $r \rightarrow 0$.

Если $\beta = 0$, то для задачи а) при всех ω имеем

$$(3.27) \quad C(p) = C_0(p) \sin [\pi \omega^{-1} (p+1)] [A_1 \sin^{-1} (\pi \omega^{-1} p) + Z(p)]$$

Функции $C_0(p)$, $X(p)$ и $Z(p)$ определяются формулами (3.15), (2.24), (2.12), (2.15), (3.13), (3.3) — (3.5), причем в (2.15)

$$C_{10}(p) = C_0(p) \sin [\pi \omega^{-1}(p-1)]$$

Для задачи б) при $\omega \in (0, 1]$

$$(3.28) \quad C(p) = A_2^* C_0(p) \omega^{-1} \operatorname{ctg}(\pi \omega^{-1} p)$$

при $\omega \in (1, \infty)$

$$(3.29) \quad C(p) = A_2^* C_0(p) \omega^{-1} \sin [\pi \omega^{-1}(p+1)] \sin^{-1}(\pi \omega^{-1} p)$$

Здесь функция $C_0(p)$ определяется формулой (3.15), в которой нужно заменить $X(p)$ функцией $X^*(p)$, вычисляя ее по формулам (3.26), (3.23), (3.13) при $\lambda^* = 1$.

В случае больших ω для улучшения сходимости интегралов (2.12), (3.23) целесообразно в обеих задачах а) и б) пользоваться факторизацией (3.18) и решением (3.19), имеющим предел при $\omega \rightarrow \infty$.

4. Рассмотрим задачу (1.1) — (1.10) и ее решение при $\omega = \pm \infty$. Пусть $\omega = -\infty$. Тогда в промежутке $0 \leq r \leq 1$ стержень становится нерастяжимым и неизгибаемым, а при $r > 1$ его жесткости определяются только слагаемыми βr и βr^3 . Таким образом, основная задача для подкрепленной области переходит в смешанную задачу для области однородной с основными граничными условиями (1.3), (1.4), (1.7) и вытекающими из (1.5), (1.8) смешанными условиями

$$(4.1) \quad (\partial / \partial r)[u(r, 0)] = 0 \quad (r \in [0, 1])$$

$$(4.2) \quad \beta \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} u(r, 0) + h \tau_{r\theta}(r, 0) = -S_3 \delta(r - l_3) \quad (r \in (1, \infty))$$

$$(4.3) \quad \partial^2 / \partial r^2 [v(r, 0)] = 0 \quad (r \in [0, 1])$$

$$(4.4) \quad \beta \frac{\partial^2}{\partial r^2} r^3 \frac{\partial^2}{\partial r^2} v(r, 0) - h \sigma_\theta(r, 0) = N_3 \delta(r - l_3) \quad (r \in (1, \infty))$$

В случае симметричных нагрузок [функция] $C(p)$ имеет вид (2.13), (2.17). Переходя к пределу при $\omega \rightarrow -\infty$ в формулах (2.10) — (2.15) (условия теоремы о предельном переходе под знаком интеграла здесь выполняются), при $\beta \neq 0$ получим

$$(4.5) \quad C(p) = C_0(p) [A + Z(p)], \quad C_0(p) = X(p)$$

$$(4.6) \quad X(p) = F_2^{-1}(p) Y(p), \quad Z(p) = W(p) - g(p) \quad (\operatorname{Re} p \leq 0)$$

$$(4.7) \quad X(p) = Y(p), \quad Z(p) = W(p) \quad (\operatorname{Re} p > 0)$$

$$(4.8) \quad Y(p) = \exp \left\{ -\frac{\operatorname{sign} \omega}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\ln F_2(t) dt}{t-p} \right\}, \quad W(p) = -\frac{\operatorname{sign} \omega}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{g(t) dt}{t-p}$$

$$(4.9) \quad g(p) = C_0^{-1}(p) [\varepsilon S_3 l_3^p - 2Gh(1 + \kappa) \Delta_2^+ \Delta_3^{-1} q(p)]$$

где $F_2(p)$ вычисляется по (2.9), $\varepsilon = 1$ при $l_3 > 1$, $\varepsilon = 0$ при $l_3 < 1$.

При $\beta = 0$, т. е. в задаче о впаивном в клин абсолютно жестком стержне единичной длины, функцию $F_2(p)$ нужно вычислять по формуле (2.22). Из (2.23) получим

$$(4.10) \quad C_0(p) = \pi^{-1/2} \Gamma(1/2 + \pi^{-1} p) \Gamma^{-1}(1 + \pi^{-1} p) X(p)$$

другие равенства (4.5) — (4.9) и (2.21) сохраняют свой вид]

В кососимметричной задаче, если $\beta \neq 0$, согласно (3.7) — (3.11) получим

$$(4.11) \quad \begin{aligned} C(p) &= C_0(p)[A_1 + A_2(p-1)^{-1} + Z(p)] \\ C_0(p) &= (p-1)X(p) \\ A_1 &= \frac{N_2 + N_3 - (1+\kappa)^{-1}(N_1 \cos \alpha + S_1 \sin \alpha)}{X(0)[r_2(0) - 1]}, \quad A_2 = \frac{M_2 + N_2 l_2}{Y(1)} \end{aligned}$$

Здесь для $Z(p)$ и $X(p)$ имеем (4.6) — (4.8), (3.3), (3.6), где

$$(4.12) \quad g(p) = -C_0^{-1}(p)[N_3 l_3^p + 2Gh(1+\kappa)p\Delta_2^{-1}\Delta_3^{-1}q(p)]$$

Если $\beta = 0$, то в силу (3.14), (3.16), (3.19) получим

$$\begin{aligned} C(p) &= C_0(p)[A_1 \pi^{-1} p^{-1} + A_2 + Z(p)] \\ C_0(p) &= -^{1/2} \sqrt{\pi p} (p+1)^{-1} \Gamma(1/2 + \pi^{-1} p) \Gamma^{-1}(1 + \pi^{-1} p) X(p) \\ A_1 &= \frac{2N_2}{X(0)}, \quad A_2 = -\frac{4(M_2 + N_2 l_2 - N_3 l_3) \Gamma(1 + \pi^{-1})}{\sqrt{\pi} \Gamma(1/2 + \pi^{-1}) X(1)} \end{aligned}$$

Функции $X(p)$ и $Z(p)$ выражаются в виде (4.6) — (4.8), (3.18), (4.12).

В варианте $\omega = \infty$ стержень при $r \geq 1$ становится недеформируемым, при $r < 1$ имеет жесткости βr и βr^3 . В смешанных условиях (4.1) — (4.4), определяющих эту задачу, нужно поменять местами промежутки $[0, 1]$ и $(1, \infty)$, основные условия сохраняются. Решение симметричной задачи, если $\beta \neq 0$, дается соотношениями (4.5) — (4.9), (2.27), (2.9); в (4.6), (4.7) интервалы $\operatorname{Re} p \leq 0$ и $\operatorname{Re} p > 0$ меняются местами, $\varepsilon = 1$ при $l_3 < 1$, $\varepsilon = 0$ при $l_3 \geq 1$. Если $\beta = 0$, то в отличие от предыдущего функции $C_0(p)$ и $F_2(p)$ имеют вид (2.23), (2.22). Аналогичным путем строится решение кососимметричной задачи.

5. Смешанные задачи вида (1.3), (1.4), (1.7), (4.1) — (4.4) обычно решают методом Винера — Хопфа [13]. Если функциональное уравнение, к которому они сводятся, рассматривать как задачу Римана [10] или задачу линейного сопряжения [14] (см., например, [15]), то по формулам Ф. Д. Гахова можно получить решения, в точности совпадающие с предельными решениями п. 4. Для этого нужно только вместо дробно-линейных [10, 14] и полиномиальных множителей [15] приводить индекс коэффициента к нулю (при $\beta = 0$, когда он не равен нулю) с помощью функции $\operatorname{tg} \pi p$. При элементарной факторизуемости в виде отношения четырех гамма-функций она в отличие от функции $(1 - p^2)^{1/2}$ [15], сохраняет экспоненциальную сходимость интеграла (4.8), (2.22) и дает решение в наиболее эффективной форме.

Ясно, что изложенный выше метод можно применять к любым смешанным задачам теории упругости, которые решаются в замкнутой форме методом Винера — Хопфа. Однако здесь нужно различать два типа задач.

К первому типу, разобранному в п. 4, относятся смешанные задачи для полосовых, круговых и клиновидных штампов, для цилиндрических, конических и клиновидных абсолютно жестких обоем, контактирующих с соответствующими упругими областями, а также эквивалентные задачи о симметричных плоских щелях. Они и их решения являются предельными основными задачами и решениями для полосы, клина, цилиндра и конуса (в частности, полуплоскости и полупространства), полностью подкрепленных стержнями, пластинками и оболочками переменной жесткости.

Второй тип объединяет смешанные задачи для упругих областей, частично подкрепленных упругими стержнями, балочными плитами, оболочками постоянной или линейно-растущей толщины и задачи с прямолинейными несимметричными, цилиндри-

ческими и коническими полубесконечными щелями. Эти задачи можно свести к разностным уравнениям формально, путем введения в их граничные условия фиктивной экспоненциально растущей «жесткости». Но, что более интересно, все они получаются в пределе при $\omega \rightarrow \pm \infty$ из основных задач для соответствующих полностью подкрепленных областей, в которых между упругим тонкостенным подкрепляющим элементом и упругой пространственной областью проложен винклеровский слой с переменными коэффициентами постели $K(r)$, изменяющимися как r^ω , либо для областей, в которых винклеровский слой заполняет бесконечную щель.

В задачах для конических и клиновидных областей, когда исходные уравнения теории упругости преобразуются по Меллину, изгибные жесткости подкрепляющих стержней, пластинок и оболочек нужно задавать в форме (1.2), жесткости на растяжение, сдвиг и кручение — в задачах изгиба клиновидных пластин, усиленных стержнями — в форме (1.1), коэффициенты постели винклеровского слоя выражаются равенством

$$K(r) = (\beta r + \gamma r^{1+\omega})^{-1}$$

В задачах для прямоугольных и цилиндрических областей при использовании двустороннего преобразования Лапласа характер изменения жесткости D по продольной координате x не должен зависеть от вида жесткости, т. е. и при изгибе и при растяжении

$$D(x) = \beta + \gamma e^{\omega x}$$

Коэффициенты постели $K(x)$ имеют форму

$$K(x) = (\beta + \gamma e^{\omega x})^{-1}$$

Задачи для областей с винклеровским слоем переменной жесткости, которые сводятся к разностным уравнениям, разрешимым в квадратурах, и в несколько иной постановке, будут рассмотрены отдельно.

Поступила 20 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Koiter W. T. On the diffusion of load from a stiffener into a sheet. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1955, vol. 8, No. 2.
2. Alblas J. B., Kuypers W. J. On the diffusion of load from a stiffener into an infinite wedge-shaped plate. Appl. Sci. Research, S. A, 1965, vol. 15, No. 6.
3. Банцури Р. Д. Контактная задача для клина с упругим креплением. Докл. АН СССР, 1973, т. 211, № 4.
4. Попов Г. Я., Тихоненко Л. Я. Плоская задача о контакте полубесконечной балки с упругим клином. ПММ, 1974, т. 38, вып. 2.
5. Нуллер Б. М. Деформация упругого клина, подкрепленного балкой. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
6. Нуллер Б. М. К расчету подкрепленных откосов. Изв. ВНИИ Гидротехники, 1974, т. 105.
7. Лебедев Н. Н., Скальская И. П. Новый метод решения задачи дифракции электромагнитных волн на клине конечной проводимости. Ж. техн. физ., 1962, т. 32, вып. 10.
8. Васильев Б. А. Некоторые стационарные задачи теории теплопроводности для клиновидных тел при граничном условии третьего рода. Инж.-физ. ж., 1966, т. 11, № 2.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1965.
10. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
11. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.
12. Barnes E. W. The linear finite differences equations of the first order. Proc. London Math. Soc. Ser. 2, 1904, vol. 2.
13. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
14. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
15. Нуллер Б. М. Упругий клин, подкрепленный на конечном участке стержнем переменного сечения. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 5.