Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.384/5

ПЛАСТИНА, ИМЕЮЩАЯ ФОРМУ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ, НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В. С. Проценко, В. Л. Рвачев

(Харьков)

Дается метод решения задачи о контакте тонкой пластинки в виде бесконечной полосы, лежащей без трения на упругом полупространстве, в трехмерной постановке. Этот метод сводит задачу к решению бесконечной системы алгебраических уравнений с вполне непрерывной формой.

Соответствующая плоская задача рассматривалась рядом авторов [1–6]. Наиболее завершенными следует считать результаты, полученные в работах [3–6]. Эта же проблема для линейно-деформируемого основания общего типа рассмотрена в [7–9].

1. Задача об изгибе пластинки, лежащей без трения на упругом полупространстве, сводится к следующей системе уравнений:

$$D\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 w(x,y)=g(x,y)-r(x,y) \tag{1.1}$$

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E}\iint\limits_S \frac{r(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}=w(x,y)$$

Здесь D — цилиндрическая жесткость пластинки, $w(x, y)$ — прогиб, $g(x, y)$ — вертикальная нагрузка, $r(\xi, \eta)$ — реакция основания, S — область контакта.

Для решения этой системы важно уметь решать второе уравнение (1.1) — основное интегральное уравнение контактной задачи о штампе, имеющем в плане форму области контакта S, при условии, что поверхность основания штампа искривлена по закону $z = w(x, y)$. Функция $w(x, y)$, вообще говоря, неизвестна, поэтому надо уметь находить общее (или, по крайней мере, достаточно общее) решение указанной контактной задачи. Общее решение контактной задачи для одного полосового штампа, полученное в работе [10], будет использовано для решения задачи об изгибе пластинки, имеющей форму полосы шириной 2.

Примем, что на пластинку действует нагрузка, которая представлена в виде

$$g(x, y) = F^{-1}[g^*(x, \lambda)], \quad g^*(x, \lambda) = F[g(x, y)]$$

где $F[u]$ и $F^{-1}[u]$ — прямое и обратное преобразование Фурье.

К функциям $w(x, y)$ и $r(x, y)$ также применим преобразование Фурье. Тогда система (1.1) будет удовлетворяться при условии, что $\{w^*(x, \lambda),$

$r^*(x, \lambda)\}$ — решение следующей системы уравнений:

$$D\left(\frac{d^2}{dx^2} - \lambda^2\right)^2 w^*(x,\lambda) - g^*(x,\lambda) + r^*(x,\lambda) = 0 \tag{1.2}$$

$$\frac{1-\nu^2}{\pi E}\int_{-1}^{1} r^*(\xi,\lambda) K_0(\lambda\,|x-\xi|)\,d\xi = w^*(x,\lambda) \quad (|x| \leqslant 1)$$

Решение последнего уравнения имеет вид [10]

$$r^*(x,\lambda) = \frac{-E}{(1-\nu^2)\,|\sin\eta|}\sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m \frac{\mathrm{Fek}'_m(0,-q)}{\mathrm{Fek}_m(0,-q)}\,\mathrm{ce}_m(\eta,-q) \tag{1.3}$$

$$0 \leqslant \eta \leqslant \pi$$

Здесь $\mathrm{Fek}_m(x, -q)$, $\mathrm{ce}_m(x, -q)$ — известные функции Матье [11], γ_m — коэффициенты разложения функции $w^*(x, \lambda)$ в ряд Фурье по периодическим функциям Матье

$$w^*(x,\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \gamma_m\,\mathrm{ce}_m(\eta,-q) \qquad \left(\eta = \arccos x, \quad q = \frac{1}{4}\lambda^2\right) \tag{1.4}$$

Будем рассматривать пластинку, у которой края свободны. Тогда прогиб $w^*(x, \lambda)$ должен удовлетворять условиям (ν_0 — коэффициент Пуассона пластинки)

$$\frac{d^2w^*}{dx^2} - \nu_0\lambda^2 w^* = 0, \qquad \frac{d^3w^*}{dx^3} - \lambda^2(1-\nu_0)\frac{dw^*}{dx} = 0 \qquad \text{при } x = \pm 1 \tag{1.5}$$

Решение первого уравнения (1.2) запишем в виде

$$w^*(x, \lambda) = w_1(x, \lambda) + w_0(x, \lambda) \tag{1.6}$$

где $w_1(x, \lambda)$ — частное решение неоднородного уравнения, $w_0(x, \lambda)$ — общее решение однородного уравнения.

Функцию $w_0(x, \lambda)$ определим так, чтобы удовлетворялись условия

$$\frac{d^2w_0}{dx^2} - \nu_0\lambda^2 w_0 = \nu_0\lambda^2 w_1 - \frac{d^2w_1}{dx^2}$$

$$\frac{d^3w_0}{dx^3} - (2-\nu_0)\lambda^2\frac{dw_0}{dx} = (2-\nu_0)\lambda^2\frac{dw_1}{dx} - \frac{d^3w_1}{dx^3} \qquad \text{при } x = \pm 1$$

Эта функция находится элементарно, после того как будет найдено решение $w_1(x, \lambda)$.

Решение $w_1(x, \lambda)$ определим условиями

$$w_1(x, \lambda) = d^2w_1 / dx^2 = 0 \qquad \text{при } x = \pm 1 \tag{1.7}$$

Тогда функция $w^*(x, \lambda)$, определенная формулой (1.6), будет удовлетворять условиям (1.5).

В дальнейшем будем считать, что решение w_0 известно. Задача состоит в том, чтобы найти функцию $w_1(x, \lambda)$, удовлетворяющую системе (1.2) и краевым условиям (1.7).

2. Пусть $G(x, \xi)$ — функция Грина краевой задачи

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\lambda^2\frac{d^2y}{dx^2} = 0, \quad y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$$

Такая функция легко может быть построена и имеет вид

$$G(x,\xi)=\frac{1}{4\lambda^2}\Big\{1-x\xi-|x-\xi|+\frac{1}{\sqrt{2}\,\lambda}\operatorname{sh}\sqrt{2}\,\lambda\,|x-\xi|+ + \frac{\operatorname{ch}\sqrt{2}\,\lambda(x+\xi)-\operatorname{ch}2\sqrt{2}\,\lambda\operatorname{ch}\sqrt{2}\,\lambda(x-\xi)}{\sqrt{2}\,\lambda\operatorname{sh}2\sqrt{2}\,\lambda}\Big\} \tag{2.1}$$

С помощью функции Грина (2.1) первое уравнение (1.2) представим в виде эквивалентного интегрального соотношения

$$w_1(x,\lambda)=k_0\int_{-1}^{1}G(x,\xi)\,[g^*(\xi,\lambda)-r^*(\xi,\lambda)]\,d\xi- -\lambda^4\int_{-1}^{1}G(x,\xi)\,w_1(\xi,\lambda)\,d\xi\quad(k_0=D^{-1}) \tag{2.2}$$

Представляя функцию $w_1(x,\lambda)$ в виде разложения (1.4) и используя соответствующее этому разложению решение (1.3), из уравнения (2.2) получим

$$\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m\operatorname{ce}_m(\eta,-q)=k_1\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m\frac{\operatorname{Fek}_m'(0,-q)}{\operatorname{Fek}_m(0,-q)}\times \times\int_{-1}^{1}G(x,\xi)\frac{\operatorname{ce}_m(t,-q)}{|\sin t|}\,d\xi- -\lambda^4\sum_{m=0}^{\infty}\gamma_m\int_{-1}^{1}G(x,\xi)\operatorname{ce}_m(t,-q)\,d\xi+f(\eta) \tag{2.3}$$

$$f(\eta)=k_0\int_{-1}^{1}G(x,\xi)\,g^*(\xi,\lambda)\,d\xi$$

$$t=\arccos\xi,\quad \eta=\arccos x,\quad k_1=Ek_0/(1-\nu^2)$$

После умножения равенства (2.3) на $\operatorname{ce}_k(\eta,-q)$ и последующего интегрирования по промежутку $(0,\pi)$, найдем

$$\pi_k\gamma_k=\sum_{m=0}^{\infty}T_k^{(m)}\gamma_m+\sum_{m=0}^{\infty}K_k^{(m)}\gamma_m+\bar\alpha_k \tag{2.4}$$

$$(\pi_0=\pi,\ \pi_k=\pi/2,\ k\geqslant 1)$$

В полученной бесконечной системе матричные коэффициенты и свободные члены находятся по формулам

$$T_k^{(m)}=k_1\frac{\operatorname{Fek}_m'(0,-q)}{\operatorname{Fek}_m(0,-q)}\int_0^{\pi}\operatorname{ce}_k(\eta,-q)\,d\eta\int_{-1}^{1}G(x,\xi)\frac{\operatorname{ce}_m'(t,-q)}{|\sin t|}\,d\xi \tag{2.5}$$

$$K_k^{(m)}=-\lambda^4\int_0^{\pi}\operatorname{ce}_k(\eta,-q)\,d\eta\int_{-1}^{1}G(x,\xi)\operatorname{ce}_m(t,-q)\,d\xi$$

$$\bar\alpha_k=k_0\int_0^{\pi}\operatorname{ce}_k(\eta,-q)\,d\eta\int_{-1}^{1}G(x,\xi)\,g^*(\xi,\lambda)\,d\xi$$

$$(\xi=\cos t,\ x=\cos\eta)$$

Функцию Грина (2.1) представим в виде равномерно сходящегося билинейного разложения по произведениям собственных функций самосопряженной краевой задачи

$$\frac{d^4y}{dx^4} - 2\lambda^2 \frac{d^2y}{dx^2} - \mu y = 0, \quad y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$$

Искомое разложение имеет вид

$$G(x, \xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin p_{2k}x \sin p_{2k}\xi}{\mu_{2k}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos p_{2k+1}x \cos p_{2k+1}\xi}{\mu_{2k+1}} \tag{2.6}$$

где собственные значения μ_k определяются формулой

$$\mu_k = p_k^4 + 2\lambda^2 p_k^2, \quad p_k = \frac{\pi}{2} k \quad (k \geqslant 1)$$

Разложение (2.6) будет использовано при упрощении матричных коэффициентов и свободных членов системы (2.4).

3. Представление (2.6) позволяет получить разложение функции $G(x, \xi)$ в ряд по полиномам Чебышева

$$G(x, \xi) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} T_i(x) T_j(\xi), \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{3.1}$$

Коэффициенты a_{ij} находим по формулам Фурье из теории ортогональных функций. После некоторых преобразований получаем

$$a_{00} = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{2k+1}} J_0(p_{2k+1}) J_0(p_{2k+1})$$

$$a_{2n\,0} = a_{0\,2n} = \frac{(-1)^n}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{2k+1}} J_0(p_{2k+1}) J_n(p_{2k+1})$$

$$a_{2m\,2n} = \frac{(-1)^{m+n}}{4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\mu_{2k+1}} J_{2m}(p_{2k+1}) J_{2n}(p_{2k+1})$$

$$a_{2m+1\,2n+1} = \frac{(-1)^{m+n}}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_{2k}} J_{2m+1}(p_{2k}) J_{2n+1}(p_{2k})$$

Эти ряды сходятся равномерно относительно индексов m и n, так как $|J_n(x)| \leqslant 1$ для всех x и n, а $\mu_k \sim (^1/_2\pi k)^4$ при $k \to \infty$.

Справедливо утверждение: коэффициенты a_{mn} удовлетворяют неравенствам

$$|a_{mn}| \leqslant \frac{C}{m^2 n}, \quad |a_{mn}| \leqslant \frac{C}{mn^2}, \quad |a_{mn}| \leqslant \frac{C(m+n)}{m^2 n^2} \tag{3.2}$$

$$(C = \text{const}, \quad m, n \geqslant 2)$$

Для доказательства воспользуемся рекуррентной формулой из теории функций Бесселя (z — вещественное)

$$J_n(z) = \frac{z}{2n} [J_{n+1}(z) + J_{n-1}(z)] \tag{3.3}$$

Из формулы (3.3) следует, что

$$|J_n(z)| \leqslant \begin{cases} \dfrac{|z|}{n}, & n \geqslant 1 \\ \dfrac{4}{3}\dfrac{z^2}{n^2}, & n \geqslant 2 \end{cases} \tag{3.4}$$

Рассмотрим ряд ($\nu > 0$)

$$b_{mn} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_m(p_k)}{\mu_k^{5/8+\nu}} \frac{J_n(p_k)}{\mu_k^{3/8-\nu}}$$

Применяя к нему неравенство Коши, найдем

$$b_{mn}^2 \leqslant \Sigma_1\Sigma_2 \tag{3.5}$$

$$\Sigma_1 = \sum_{k=1}^{\infty} J_m{}^2(p_k)\,\mu_k^{-5/4-2\nu}, \quad \Sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty} J_n{}^2(p_k)\,\mu_k^{-3/4+2\nu}$$

Для рядов, стоящих справа в формуле (3.5), получаем с помощью неравенств (3.4) оценки

$$\Sigma_1 \leqslant \frac{16}{9m^4}\sum_{k=1}^{\infty} p_k{}^4\mu_k^{-5/4-2\nu} = \frac{C_1{}^2(\lambda,\nu)}{m^4}$$

$$\Sigma_2 \leqslant \frac{1}{4n^2}\sum_{k=1}^{\infty}[J_{n+1}(p_k)+J_{n-1}(p_k)]^2\, p_k{}^2\mu_k^{-3/4+2\nu} \leqslant \frac{C_2{}^2(\lambda,\nu)}{n^2}$$

причем величины $C_1{}^2(\lambda, \nu)$ и $C_2{}^2(\lambda, \nu)$ убывают при увеличении параметра λ. Доказательство сходимости последнего ряда следует из справедливого при больших k неравенства

$$J_n{}^2\left(k\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} J_0(k\pi\sin t)\cos 2nt\,dt \leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}|J_0(k\pi\sin t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{k}} + K_0\int_{1/\sqrt{k}}^{\pi/2}\frac{dt}{\sqrt{k\pi\sin t}}\right) \leqslant \frac{K_1}{\sqrt{k}} \qquad (K_0, K_1 = \mathrm{const})$$

Итак, из (3.5) следует неравенство

$$|b_{mn}| \leqslant \frac{C_1C_2}{m^2n} \qquad (n \geqslant 1)$$

из которого вытекает справедливость утверждения (3.2).

Неравенства (3.2) позволяют установить равномерную и абсолютную сходимость ряда (3.1). В самом деле, если $m > n$, то из первого неравенства (3.2) следует второе неравенство (3.2). Таким образом, можно считать, что

$$|a_{mn}| \leqslant C / m^2n \quad \text{при} \quad m > n$$

$$|a_{mn}| \leqslant C/n^2m \quad \text{при} \quad n > m$$

Далее имеем с учетом неравенств (3.2) (C — постоянная Эйлера)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}T_i(x)T_j(\xi)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}| \leqslant 2\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{i}\frac{C}{i^2j} =$$

$$= 2C\sum_{i=1}^{\infty}\left[C + \ln i + O\left(\frac{1}{i}\right)\right]i^{-2} < \infty$$

После этих предварительных результатов можно приступить к упрощению матричных коэффициентов и свободных членов системы уравнений (2.4).

Подстановка разложения (3.1) в первые две формулы (2.5) приводит к формулам

$$T_k^{(m)} = k_1 \frac{\mathrm{Fek}_m'(0, -q)}{\mathrm{Fek}_m(0, -q)} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \pi_i \pi_j C_i^{(k)} C_j^{(m)} a_{ij}$$

$$K_k^{(m)} = -\lambda^4 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \pi_i C_i^{(k)} D_j^{(m)} a_{ij}$$

$$D_j^{(m)} = \sum_{r=0}^{\infty}{}' C_r^{(m)} (-1)^{j+r} \left[\frac{1}{1-(j+r)^2} + \frac{1}{1-(j-r)^2} \right]$$

$$C_{2r}^{(2m)} = (-1)^{r+m} A_{2r}^{(2m)}, \quad C_{2r+1}^{(2m+1)} = (-1)^{m+r} B_{2r+1}^{(2m+1)}$$

Штрих в сумме означает, что в ней пропущены слагаемые, знаменатели которых обращаются в нуль. $A_r^{(m)}$, $B_r^{(m)}$ — коэффициенты разложения периодических функций Матье в ряды Фурье по тригонометрической системе функций [11].

Свободные члены бесконечной системы (2.4) вычисляем по формулам

(3.6)
$$\alpha_{2k} = k_0 \pi (-1)^k \sum_{l=0}^{\infty} \frac{a_l}{\mu_{2l+1}} \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}^{(2k)} J_{2r} \left(l\pi + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\alpha_{2k+1} = k_0 \pi (-1)^k \sum_{l=1}^{\infty} \frac{b_l}{\mu_{2l}} \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}^{(2k+1)} J_{2r+1}(l\pi)$$

(3.7)
$$a_l = \int_{-1}^{1} g^*(\xi, \lambda) \cos \frac{\pi}{2} (2l+1) \xi d\xi$$

$$b_l = \int_{-1}^{1} g^*(\ ,\lambda) \sin(l\pi\xi)\, d\xi$$

4. Перейдем к исследованию бесконечной системы (2.4). Запишем ее в форме операторного уравнения

(4.1)
$$x = Ax + a$$

$$x = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_m, \ldots)^T, \quad a = \pi_k^{-1} (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m, \ldots)^T$$

$$A = \pi_k^{-1} [(T_k^{(m)}) + (K_k^{(m)})]$$

где $(a_k^{(m)})$ — символ матрицы бесконечного порядка, соответствующей системе уравнений (2.4), T — знак транспонирования.

Имеет место теорема: система уравнений (4.1) имеет единственное решение $x \in l^2$.

Покажем вначале, что оператор A вполне непрерывен в гильбертовом пространстве l^2. Для этого достаточно доказать сходимость рядов

(4.2)
$$\sum_{m,\,k=0}^{\infty} |T_k^{(m)}|^2, \quad \sum_{m,\,k=0}^{\infty} |K_k^{(m)}|^2$$

Используя асимптотические формулы для коэффициентов $A_r^{(n)}$, $B_r^{(n)}$

$$\left.\begin{matrix} A_{n-2r}^{(n)} \\ B_{n-2r}^{(n)} \end{matrix}\right\} \sim \frac{(n-r-1)!}{r!\,(n-1)!}\left(\frac{q}{4}\right)^r, \quad 0 \leqslant 2r \leqslant n$$

$$\left.\begin{matrix} A_{n+2r}^{(n)} \\ B_{n+2r}^{(n)} \end{matrix}\right\} \sim \frac{(-1)^r\, n!}{r!\,(n+r)!}\left(\frac{q}{4}\right)^r, \quad r \geqslant 0$$

а также неравенства (3.2), находим

$$\left|\sum_{i+j=0}^{\infty} \pi_i \pi_j C_i^{(k)} C_j^{(m)} a_{ij}\right| \leqslant \frac{\mathrm{const}_1}{m^2 k}, \quad (m, k) \to \infty \tag{4.3}$$

Из теории разложений модифицированных функций Матье Fek_m $(x, -q)$ можно получить, что при $m \to \infty$ справедлива асимптотическая формула

$$\left|\frac{\mathrm{Fek}_m'(0, -q)}{\mathrm{Fek}_m(0, -q)}\right| \leqslant \delta m$$

где δ — некоторая постоянная, не зависящая от m.

Неравенство (4.3) вместе с последним неравенством позволяют установить, что

$$|T_k^{(m)}| \leqslant \frac{\mathrm{const}_2}{mk}, \quad (m, k) \to \infty \tag{4.4}$$

Из (4.4) немедленно следует сходимость первого ряда (4.2). Для членов второго ряда имеем

$$|K_k^{(m)}| \leqslant \lambda^4 \frac{\mathrm{const}_3}{k^2}\left|\sum_{j=0}^{\infty}{}' \left[\frac{1}{1-(j+m)^2} + \frac{1}{1-(j-m)^2}\right](1+j)^{-1}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda^4 \frac{\mathrm{const}_4}{m^2 k^2}$$

Следовательно, второй ряд (4.2) также сходится. Из факта сходимости рядов (4.2) следует, что оператор A, порожденный системой (2.4), является вполне непрерывным в числовом пространстве l^2. Кроме того, из (3.6) при $k \to \infty$ находим, что

$$|\alpha_k| \leqslant \mathrm{const}_5 / k^2$$

Для системы (4.1) с вполне непрерывным в l^2 оператором A и свободными членами, принадлежащими l^2, справедлива альтернатива Гильберта [12], из которой, опираясь на однозначную разрешимость исходной краевой задачи, легко доказать однозначную разрешимость бесконечной системы. Такую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений можно решать методом редукции (урезания). При этом решения урезанных систем при увеличении их порядка стремятся к точному решению бесконечной системы.

В заключение отметим, что предлагаемый метод решения задачи о полосовой пластинке можно распространить на задачи для комбинированного основания И. Я. Штаермана, а также для упругого полупространства в случае системы полосовых пластин.

Поступила 28 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горбунов-Посадов М. И.* Расчет конструкций на упругом основании. М., Госстройиздат, 1953.
2. *Клубин П. И.* Расчет балочных и круглых плит на упругом основании. Инж. сб., 1952, т. 12.
3. *Ишкова А. Г.* Об изгибе круглой пластинки и бесконечной полосы, лежащих на упругом полупространстве. Изв. АН СССР. ОТН, 1958, № 10.
4. *Ишкова А. Г., Тулайков А. Н.* Некоторые задачи об изгибе пластин, лежащих на упругом полупространстве. Инж. сб., 1956, т. 23.
5. *Александров В. М., Ворович И. И., Солодовник М. Д.* Эффективное решение задачи о цилиндрическом изгибе пластинки конечной ширины на упругом полупространстве. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
6. *Александров В. М., Солодовник М. Д.* Асимптотическое решение задачи о цилиндрическом изгибе пластинки конечной ширины на упругом полупространстве. Прикл. механ., 1974, т. 10, вып. 7.
7. *Александров В. М., Шацких Л. С.* Универсальная программа расчета изгиба балочных плит на линейно-деформируемом основании. Тр. VII Всес. конференции по теории оболочек и пластин. М., «Наука», 1970.
8. *Шацких Л. С.* К расчету изгиба плиты на упругом слое. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 2.
9. *Наумов Ю. А., Шевляков Ю. А.* Изгиб балочной плиты на многослойном основании. В сб.: Гидроаэромеханика, 1 966, вып. 3.
10. *Рвачев В. Л.* Давление на упругое полупространство штампа, имеющего в плане форму полосы. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
11. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложения функций Матье. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
12. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.—Л., Физматгиз, 1962.