

**К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ФОРМЫ ТЕЛ, ОБРАЗОВАВШИХСЯ  
ПРИ ЗАСТЫВАНИИ ПОТОКА ЖИДКОЙ ФАЗЫ**

**В. А. М'ак'симов**<sup>1</sup>

(Москва)

С задачами определения формы тел, отвердевших в движущейся жидкости, и теплообмена их с жидкостью приходится встречаться в таких областях, как подземное строительство методом замораживания водонасыщенных пород, в расчетах теплообмена подземных хранилищ сжиженных газов и теплообменников на жидких металлах и т. п. В данной работе исследуется приближенное представление внешних температурных полей и в рамках этого приближения предлагаются достаточно общие методы расчета формы твердых тел, образовавшихся при застывании потока жидкой фазы.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается стационарная задача определения формы ледопородных твердых тел, образовавшихся около охлаждающих устройств, помещенных в поток идеальной жидкости. К идентичной постановке приводят задачи замораживания горных пород в условиях фильтрации. Образовавшиеся твердые тела называются равновесными; для них соблюдается условие непрерывности потоков тепла через границу.

Для дальнейшего существенно исследование связи термо- и гидродинамики в потоке снаружи тела. Уравнение температуропроводности в движущейся жидкости вне тела после применения преобразования Буссинеска [1] имеет вид

$$(1.1) \quad a^2 \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

Здесь  $a^2$  — температуропроводность жидкости,  $T(\varphi, \psi)$  — внешнее температурное поле,  $\chi$  и  $\varphi$  — гидродинамическая функция тока и потенциал ( $v = \text{grad } \varphi$ ,  $v$  — поле скоростей). Слагаемые левой части представляют кондуктивный теплоперенос соответственно вдоль и поперек линий тока жидкости, правая часть — конвективный теплоперенос вдоль линий тока.

Ясно, что при больших тепловых числах Пекле  $P = v_\infty l / a^2$  ( $v_\infty$  и  $l$  — характерные скорость потока и размер тела) вдоль линий тока определяющим будет конвективный теплоперенос, и в уравнении (1.1) членом  $T_{\varphi\varphi}$  можно пренебречь. Это было отмечено в работе [2] и там же частично иссле-

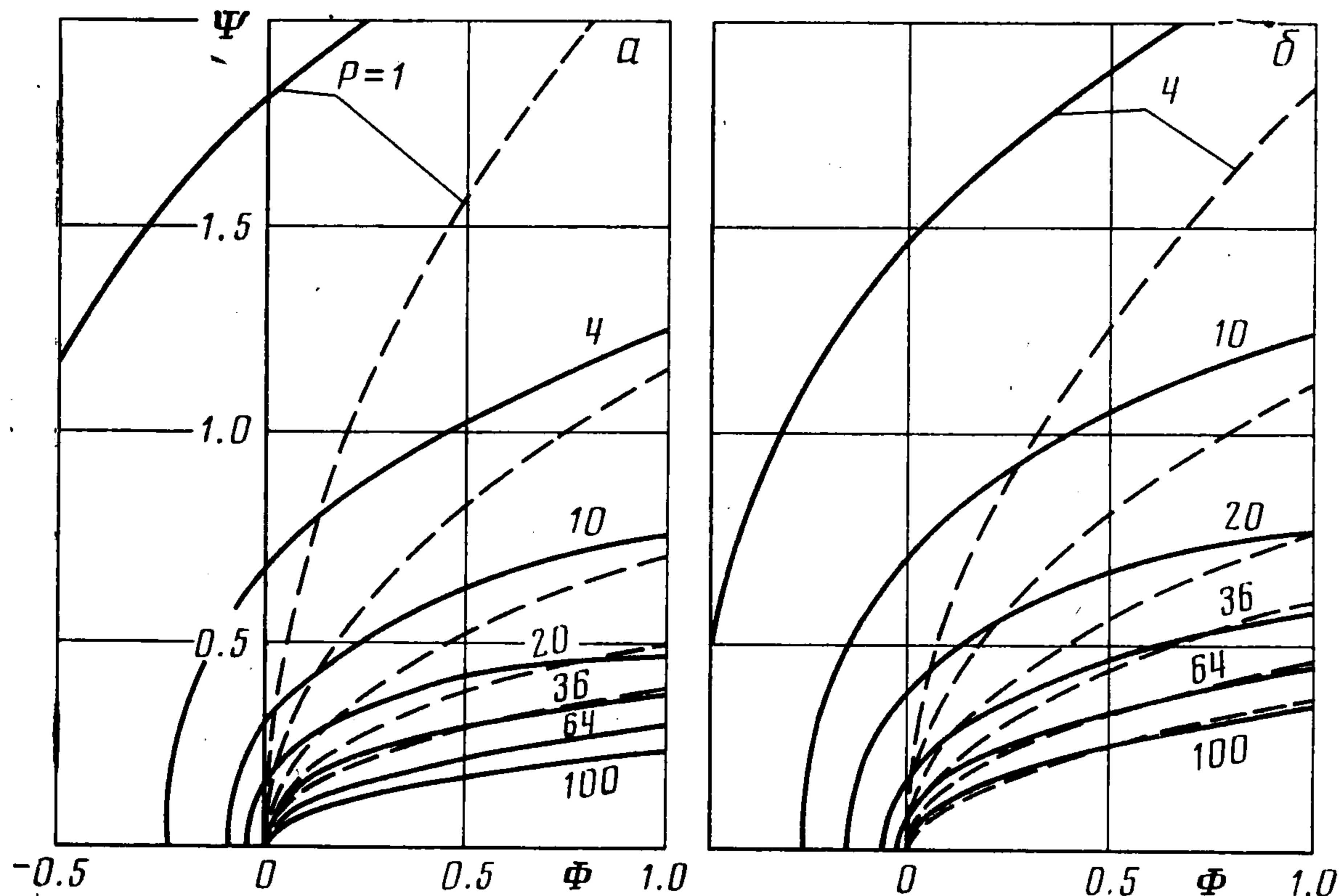
<sup>1</sup> Максимов Валерий Александрович (1929—1975), доктор технических наук, профессор, автор около 40 трудов в области теории фильтрации и теплопроводности, автор монографии и учебника.

дованы рамки применимости сокращенного уравнения

$$(1.2) \quad a^2 \frac{\partial^2 T}{\partial \psi^2} = \frac{\partial T}{\partial \varphi}$$

путем сравнения с аналитическим решением полного уравнения, которое известно для второй краевой задачи.

в работе [3] аналитически решалась задача для уравнения (1.1) при продольном обтекании полубесконечной пластины постоянной температуры. Неожиданным результатом оказалось точное совпадение тепловых по-



Фиг. 1

токов на пластине для решения уравнения (1.1) и сокращенного уравнения (1.2), решение которого в данном случае известно

$$(1.3) \quad T(\varphi, \psi) = T_{\infty} \operatorname{erf} \frac{\psi}{2a \sqrt{\varphi}}$$

( $T_{\infty}$  — температура потока вдали от тела, температура границы тела равна нулю). Этот результат оправдывает предлагаемый здесь метод для обтекания полубесконечных тел (в координатах  $\varphi, \psi$  их граница — ось  $\psi = 0, \varphi \geq 0$ ).

Применимость (1.3) для конечных тел требует дополнительного исследования. Оно представляет интерес также для выяснения области теплового пограничного слоя. С этой целью уравнение (1.1) решалось численно на ЭВМ. В безразмерных координатах  $\Phi = \varphi / \Delta\varphi, \Psi = \psi / \Delta\varphi$  (где  $\Delta\varphi$  — приращение  $\varphi$  между критическими точками течения), граница тела представляет на оси  $\Phi$  отрезок  $0 \leq \Phi \leq 1$ . Безразмерная температура  $u(\Phi, \Psi)$  равна нулю на границе тела и единице — на бесконечности. Численное решение проводилось для различных чисел  $P = \Delta\varphi / a^2$  (напомним, что  $\Delta\varphi \sim \sim v_{\infty} l$ ).

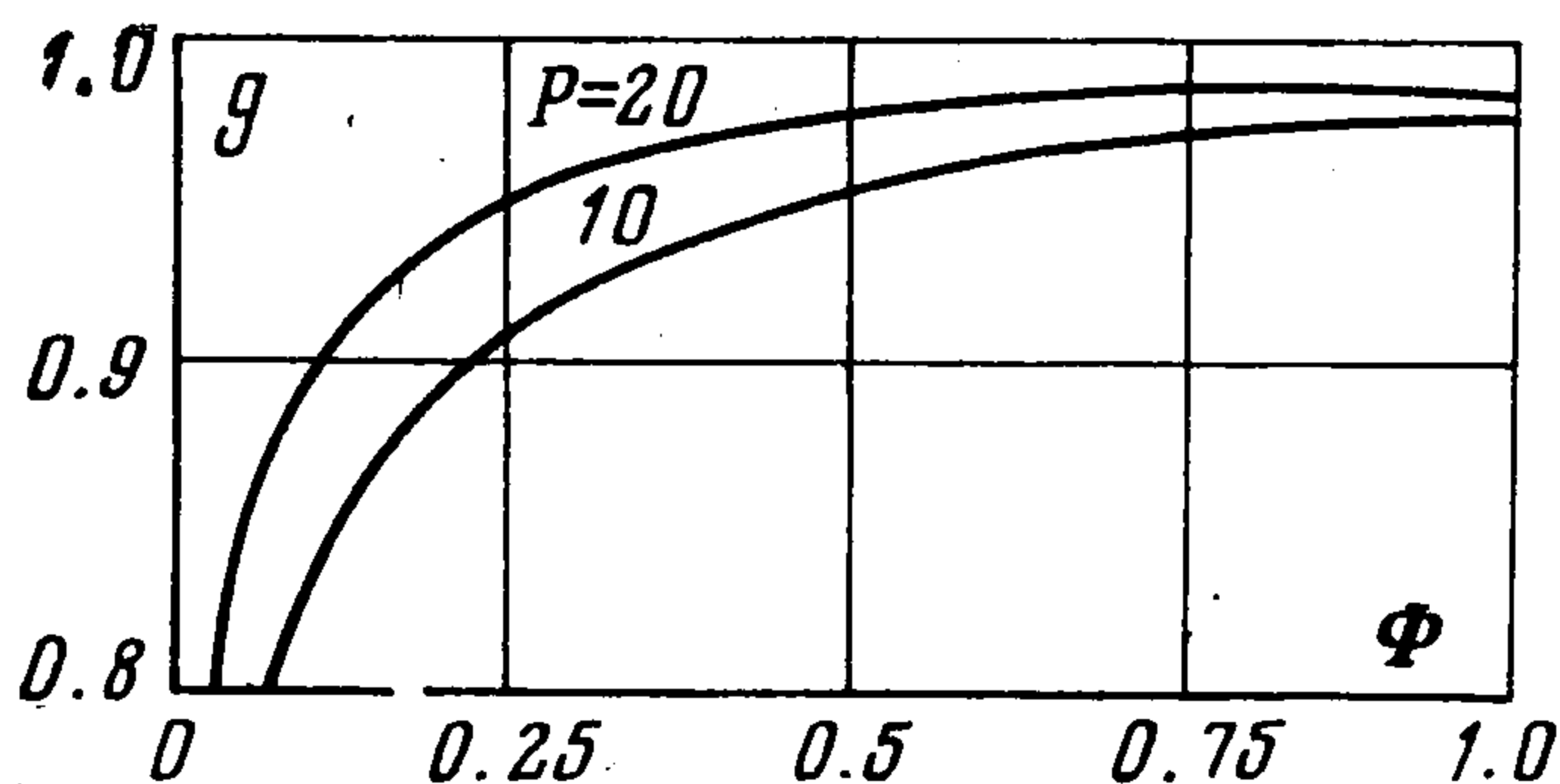
На фиг. 1 сплошными линиями представлены результаты численного решения (на фиг. 1, а изображены изотермы  $u = 0.01$ , на фиг. 1, б —

изотермы  $u = 0.1$ ). Для сравнения приведены пунктиром соответствующие изотермы приближенного решения (1.3). Как видно, точное и приближенное решения практически совпадают при  $P \geq 50$ .

Выражение

$$(1.4) \quad g(\Phi) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{P}} \frac{1}{\sqrt{\Phi}} \int_0^{\Phi} \frac{\partial u}{\partial \Psi} \Big|_{\Psi=0} d\Phi$$

в котором интегрирование ведется по результатам численного решения, представляет отношение суммарных тепловых потоков к границе тела для численного решения и решения (1.3), подсчитанных от передней критической точки до текущего значения  $\Phi$ . На фиг. 2 представлены кривые  $g(\Phi)$ . Как видно, для расчетов полного притока тепла к телу можно пользоваться приближенным решением уже при  $P \geq 10$  (с ошибкой, не превышающей 2%).



Фиг. 2

Ниже рассматривается задача определения формы тела на основе решения (1.3).

2. Форма конечного тела. Обозначим через  $\Gamma$  контур твердого тела, а через  $\Gamma_0$  — контур охлаждающих устройств. Контур  $\Gamma_0$  и  $\Gamma$  считаются симметричными относительно некоторой прямой, совпадающей по направлению с потоком жидкости. Физическая плоскость  $z = x + iy$  вводится так, что ось  $Ox$  совпадает с этой прямой, а начало координат находится в точке схода потока (фиг. 3, а). Комплексный потенциал течения  $w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$  удовлетворяет граничным условиям

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \psi = 0, \quad z \in \Gamma, \quad -\infty < x \leq x_A, \quad 0 \leq x < \infty \\ \frac{dw_1}{dz} \rightarrow v_\infty, \quad z_1 \rightarrow \infty; \quad w(z_A) = 0 \end{aligned}$$

( $A$  — передняя критическая точка тела,  $v_\infty$  — скорость течения на бесконечности).

Распределение температуры  $T_1(x, y)$  внутри тела задается действительной частью комплексного теплового потенциала  $w_1(z)$ , т. е.  $\overline{T_1} = \text{Re } w_1(z)$ .

Отсчет температур ведется от точки плавления, т. е. от температуры на границе тела

$$(2.2) \quad \text{Re } w_1(z) = 0, \quad z \in \Gamma$$

Искомыми являются функции  $w(z)$ ,  $w_1(z)$  и контур  $\Gamma$ .

Условие непрерывности потока тепла при переходе через контур  $\Gamma$  имеет вид

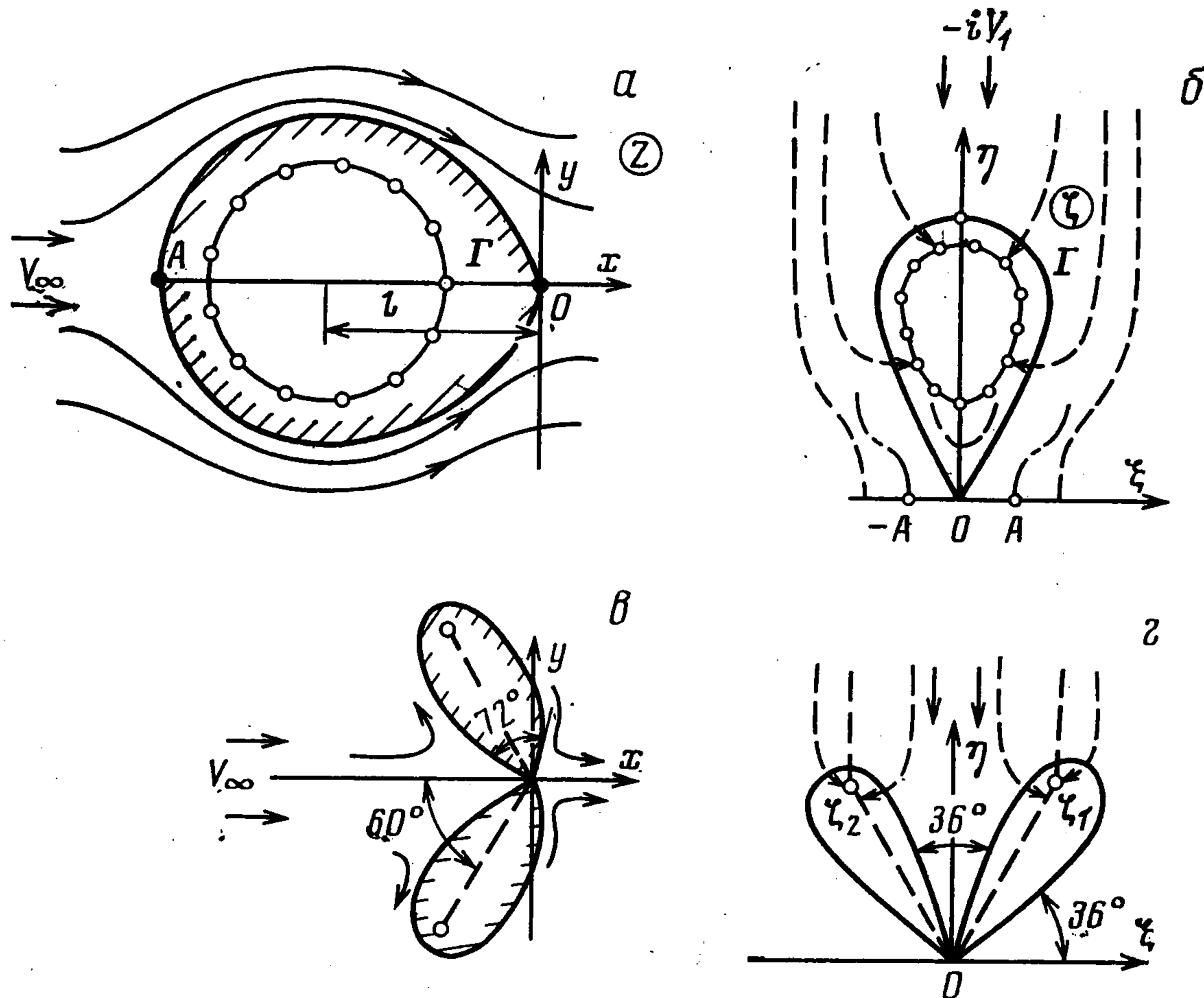
$$(2.3) \quad k_1 \frac{\partial T_1}{\partial n} = k \frac{\partial T}{\partial n}$$

где  $k$  и  $k_1$  — теплопроводность жидкой и твердой фаз соответственно,  $n$  — нормаль к  $\Gamma$ .

С учетом (2.1) — (2.3), (1.3) и того, что на границе  $T = T_1 = 0$ , можно найти [4,5]

$$(2.4) \quad \left| \frac{dw_1}{dz} \right| = \lambda \left| \frac{d\sqrt{w}}{dz} \right|, \quad z \in \Gamma; \quad \lambda = \frac{2T_\infty k}{k_1 a \sqrt{f_1}}$$

Введем комплексную переменную  $\zeta = \sqrt{z/l_0}$  (где  $l_0$  — характерный размер контура  $\Gamma_0$ ) и функцию  $\omega(\zeta) = i\lambda \sqrt{w}$  (здесь и в дальнейшем зна-



Фиг. 3

чения  $\zeta$  берутся в верхней полуплоскости, см. фиг. 3, б). Функция  $\omega(\zeta)$  аналитична в верхней полуплоскости вне преобразованного контура  $\Gamma$ , а  $w_1(\zeta) = w_1[\omega(\zeta)]$  — аналитическая функция внутри  $\Gamma$  и вне  $\Gamma_0$ . Условия (2.1), (2.2), (2.4) принимают вид

$$(2.5) \quad \frac{d\bar{\omega}}{d\zeta} \rightarrow -iv_1, \quad \zeta \rightarrow \infty; \quad v_1 = \lambda \sqrt{l_0 v_\infty}$$

$$(2.6) \quad \text{Im } \omega(\zeta) = 0, \quad \zeta = 0, \quad \eta \geq \eta^*; \quad \eta^* = \sqrt{|x_A|/l_0}$$

$$(2.7) \quad \text{Re } w_1(\zeta) = \text{Re } \omega(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \Gamma, \quad \eta = 0$$

$$(2.8) \quad |w_1'(\zeta)| = |\omega'(\zeta)|, \quad \zeta \in \Gamma, \quad (\zeta = \xi + i\eta)$$

Условия (2.7), (2.8) показывают, что функции  $w_1(\zeta)$  и  $\omega(\zeta)$  являются одна для другой аналитическими продолжениями через контур  $\Gamma$ .

Таким образом, задача свелась к определению аналитической в верхней полуплоскости и вне  $\Gamma_0$  функции, удовлетворяющей условиям (2.5), (2.7) и граничному условию на известном преобразованном контуре  $\Gamma_0$  (условие (2.6) вытекает из симметрии и написано для наглядности).

Рассмотрим для примера твердое тело, образовавшееся при застывании жидкости около круговой батареи из  $n$  равномерно расположенных точечных хладоисточников мощности  $q$  каждый. Источники расположены в точках  $z_j$  по окружности радиуса  $R_0$  с центром в точке  $(-l, 0)$  (см. фиг. 3, а). Условия на батарее  $\Gamma_0$  сводятся к тому, что функция  $\omega(\zeta)$  должна иметь логарифмические особенности одинаковой мощности в точках  $\zeta_j$ .

В рассматриваемом случае на основании (2.5) — (2.7) функцию  $\omega(\zeta)$  можно трактовать как комплексный потенциал воображаемого потока, набегающего вдоль мнимой оси со скоростью  $-v_1$  на источники мощности  $q$ , расположенные в точках  $\zeta_j$ . Действительная ось  $\xi$  должна быть изолинией нулевого потенциала  $\operatorname{Re} \omega = 0$ .

Явное выражение потенциала получится, если продолжить течение на нижнюю полуплоскость и поместить в точках  $\bar{\zeta}_j$  источники противоположной мощности  $-q$

$$(2.9) \quad \omega(\zeta) = \frac{q}{2\pi} \left( \beta i \zeta - \sum_j \ln \frac{\zeta - \zeta_j}{\zeta - \bar{\zeta}_j} \right), \quad \beta = \frac{2\pi v_1}{q}$$

Потенциалы в физической плоскости  $z$  получаются отсюда согласно формулам

$$w_2(z) = \omega(\sqrt{z/R_0}), \quad w(z) = \frac{1}{\beta^2} \omega^2(\sqrt{z/R_0})$$

Эти функции пока определены неполностью, так как не известно расстояние  $l$ , определяющее положение начала координат в плоскости  $z$ .

Дальнейшее исследование удобно вести в плоскости  $\zeta$ . По условию задачи контур  $\Gamma$  должен изображаться единой замкнутой кривой и такой, чтобы она имела единственную общую точку с осью  $\xi$ , а именно точку  $\zeta = 0$ . Условие, что кривая, изображающая  $\Gamma$ , выходит из точки  $\zeta = 0$ , означает требование, чтобы уравнение  $\operatorname{Re} \omega = 0$  имело в этой точке корень выше первой кратности. Это требование приводит к следующей формуле:

$$(2.10) \quad \beta = 2 \sum_j \frac{\eta_j}{\xi_j^2 + \eta_j^2} \quad (\zeta_j = \xi_j + i\eta_j)$$

Величина  $l$  определяется отсюда, если учесть зависимости

$$(2.11) \quad \zeta_j = \left[ \exp\left(i \frac{2\pi}{n} j\right) - \frac{l}{R_0} \right]^{1/2}, \quad \beta = \frac{4T_\infty k}{qa} \sqrt{\pi v_\infty R_0}$$

вытекающие из (2.4), (2.5) и (2.9). Уравнение контура твердого тела  $\Gamma$  определяется условием  $\operatorname{Re} \omega(z) = 0$ . Конкретные примеры можно найти в статье [6].

Заменяя  $q$  на  $q/n$  и полагая  $R_0 \rightarrow 0$ , получим один источник мощности  $q$ . Расстояние  $l$  от источника до начала координат получается равным [5]

$$(2.12) \quad l = \frac{q^2 a^2}{4\pi T_\infty^2 k^2 v_\infty}$$

Отметим еще, что в данной задаче теплопроводность тела не входит в окончательные формулы. В задачах с источниками так и должно быть, так как тепловой потенциал можно вводить не для  $T_1$ , а для  $k_1 T_1$ .

Данный метод решения задачи не годится для многосвязного контура  $\Gamma$ . С другой стороны, на практике зачастую наиболее интересно определение порядка связности контура  $\Gamma$ : в одних случаях решающим является требование смыкания тел от отдельных хладоисточников, в других случаях — недопущение смыкания. Этот вопрос нетрудно исследовать для малого числа источников.

Рассмотрим пример. Пусть два хладоисточника расположены на линии, перпендикулярной потоку (фиг. 3, *е*). Условие (2.10) считается выполненным, т. е. ветви контура  $\Gamma$  выходят из точки  $O$ . Для малых значений  $\beta$  область отрицательных потенциалов охватывает оба источника в плоскости  $\zeta$  и контур  $\Gamma$  представляется единой кривой. При увеличении  $\beta$  настанет момент деления  $\Gamma$  на два контура. Это означает, что в окрестности точки  $\zeta = 0$  в разложении  $\omega(\zeta)$  должны исчезнуть члены, содержащие  $\zeta^2$  и  $\zeta^3$ .

Расчет [6] приводит к предельному значению  $\beta^* = 2^{1/2} \cdot 3^{3/4}$ , откуда с учетом второго соотношения (2.11) находится условие односвязности контура  $\Gamma$

$$\frac{2\sqrt{2\pi}}{3^{3/4}} \frac{T_{\infty} k}{qa} \sqrt{v_{\infty} R_0} < 1$$

Решения краевой задачи для многосвязного контура  $\Gamma$  не имеется. Ввиду этого применяют приближенный метод [4], заменяя неизвестный контур  $\Gamma$  тела подходящей кривой и удовлетворяя равенству тепловых потоков в среднем.

Рассмотрим, к какому результату приведет приближенное решение в случае тела, затвердевшего около одного точечного хладоисточника. В работе [5] с соблюдением точного условия (2.3) найдена форма границы тела. Продольный размер тела оказался равным  $1.44 l$ , поперечный —  $1.04 l$ , где  $l$  вычисляется по формуле (2.12). Контур тела будем теперь считать приближенно окружностью радиуса  $R$ . Используя (2.4), получим

$$q = \frac{4T_{\infty} k}{a\sqrt{\pi}} \Delta\sqrt{w}$$

где  $\Delta\sqrt{w}$  — приращение  $\sqrt{w}$  между критическими точками. Течение описывается потенциалом Жуковского. В результате для радиуса тела имеет место следующая формула:

$$R = \frac{\pi q^2 a^2}{64 T_{\infty}^2 k^2 v_{\infty}}$$

Сравнение с точным решением дает отношение  $2R/D = 0.995$ , если в качестве среднего размера тела  $D$  в точном решении взять  $D = 1.24 l$ .

3. Твердые тела, образовавшиеся около продольно обтекаемых полубесконечных стенок. Сечение  $\Gamma_0$  охлаждающей стенки с температурой  $-T_0$  представлено двумя (вообще говоря, не симметричными) ветвями кривой, направленными вдоль положительной оси  $x$ . Будем считать, что поперечные размеры контура  $\Gamma_0$  на бесконечности растут не быстрее, чем  $\sqrt{x}$ . Гидродинамический потенциал  $w(z)$ , вводим, как и прежде, так, чтобы в передней критической точке  $A$  контура  $\Gamma$  затвердевшего тела было  $w_A = 0$ . Пусть функция  $z = f(\zeta)$  отображает внешность  $\Gamma_0$  на верхнюю полуплоскость переменной  $\zeta = \xi + i\eta$  с соответствием бесконечно удаленных точек. При сделанном предположении относительно контура  $\Gamma_0$  функция

$f(\zeta)$  на бесконечности имеет порядок  $\zeta^2$ . Для функции  $\omega(\zeta) = \sqrt{w}$  и теплового потенциала  $w_1(\zeta)$  имеем условия (2.2), (2.4), а также следующее условие:

$$(3.1) \quad \operatorname{Im} \omega(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \Gamma; \quad \operatorname{Re} w_1 = -T_0, \quad \eta = 0$$

Последнее условие принимает вид

$$(3.2) \quad \frac{dw}{dz} = \frac{2\omega}{f'(\zeta)} \frac{d\omega}{d\zeta} \rightarrow v_\infty, \quad \zeta \rightarrow \infty$$

Покажем, что контур  $\Gamma$  в плоскости  $\zeta$  представляется прямой  $\zeta = \xi + i\sqrt{a_0}$ , параллельной действительной оси, а функции  $w_1$  и  $\omega$  имеют вид

$$(3.3) \quad w_1(\zeta) = -\frac{T_0}{\sqrt{a_0}} (i\zeta + \sqrt{a_0}), \quad \omega(\zeta) = \frac{T_0}{\lambda \sqrt{a_0}} (\zeta - i\sqrt{a_0})$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что условия (2.2), (2.4), (3.1) удовлетворяются. Условию (3.2) можно удовлетворить ввиду того, что  $\omega(\zeta)$  линейна, а  $f'(\zeta)$  на бесконечности имеет порядок  $\zeta$ . Это условие свяжет  $\sqrt{a_0}$  с  $v_\infty$  и параметрами преобразования  $f(\zeta)$ . После этого уравнение контура получается в параметрическом виде. Таким образом, для решения задачи достаточно знать функцию, отображающую внешность известного контура  $\Gamma_0$  на верхнюю полуплоскость.

Рассмотрим примеры.

Пусть  $\Gamma_0$  — парабола  $y^2 = 4b(x+b)$ . Отображение внешности  $\Gamma_0$  на верхнюю полуплоскость осуществляется функцией  $z = f(\zeta) = (\zeta + i\sqrt{b})^2$ . Подставляя выражение  $\omega(\zeta)$  из (3.3) в (3.2), получим для  $a_0$  выражение

$$(3.4) \quad a_0 = \frac{\pi T_0^2 k_1^2 a^2}{4T_\infty^2 k^2 v_\infty}$$

Контур  $\Gamma$  представляется также параболой

$$(3.5) \quad y^2 = 4(\sqrt{a_0} + \sqrt{b})^2 [x + (\sqrt{a_0} + \sqrt{b})^2]$$

софокусной  $\Gamma_0$ . Толщина затвердевшего тела в лобовой части равна  $a_0 + 2\sqrt{a_0 b}$ .

Частный случай, когда  $\Gamma_0$  — полубесконечная стенка  $x \geq 0$ , получается при  $b = 0$ . Выражение (3.4) для  $a_0$  сохраняет силу, а потенциалы принимают вид

$$(3.6) \quad w_1 = -\frac{T_0}{\sqrt{a_0}} (i\sqrt{z} + \sqrt{a_0}), \quad w = v_\infty (\sqrt{z} - i\sqrt{a_0})^2$$

Рассчитаем теплопритоки  $Q(x)$  к стенке на длине  $x$ . Учитывая (3.4), (3.6), получим

$$\begin{aligned} Q(x) &= 2k_1 \int_0^x \frac{\partial T_1}{\partial n} \Big|_{y=0} dx = 2k_1 \int_0^x \left| \frac{dw_1}{dz} \right|_{z=x} dx = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{T_\infty k \sqrt{v_\infty}}{a} \sqrt{x} \end{aligned}$$

Отметим, что в полученное выражение входят только параметры внешнего потока, т. е. при одинаковых внешних условиях теплообмен

для любых тел будет одинаковым. Внутренние же параметры  $T_0$  и  $k_1$  определяют величину таких тел.

Пусть теперь контур  $\Gamma_0$  представляет собой полуполосу шириной  $2h$  (вершины полуполосы в точках  $z = \pm ih$ ). Отображающая функция имеет вид

$$z = f(\zeta) = -i \frac{2h}{\pi} (\zeta \sqrt{1 - \zeta^2} + \arcsin \zeta)$$

Из условия (3.2) находим в данном случае

$$a_0 = \frac{\pi^2 T_0^2 k_1^2 a^2}{8 T_\infty^2 h k^2 v_\infty}$$

Эта безразмерная величина определяет форму контура  $\Gamma$ , параметрическое уравнение которого имеет вид

$$x + iy = -i \frac{2h}{\pi} [(\xi - i \sqrt{a_0}) \sqrt{1 - (\xi + i \sqrt{a_0})^2} + \arcsin(\xi + i \sqrt{a_0})]$$

Толщина тела при  $\xi = 0$  равна

$$AO = \frac{2h}{\pi} [\sqrt{a_0(a_0 + 1)} - \ln(\sqrt{a_0 + 1} - \sqrt{a_0})]$$

Предлагаемый метод может пригодиться для расчетов лобовой и боковой частей конечных тел, если конечное охлаждающее устройство продолжить вниз по потоку, например полубесконечной стенкой. Действительно, в рамках принятой физической постановки задачи тепловые возмущения от кормовой части тела почти не распространяются вверх по потоку. Конечно, кормовая часть оказывает влияние на лобовую, однако это влияние тем меньше, чем больше тепловое число Пекле.

Приведем результаты такого расчета для охлаждающей трубы радиуса  $R_0$  (другие варианты решения представлены в работах [4,5]). За  $\Gamma_0$  взята окружность радиуса  $R_0$  с центром в начале координат и выходящая из нее часть полуоси  $x > 0$ . Имеем

$$z = f(\zeta) = \frac{R_0}{4} (\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4})^2$$

$$x + iy = \frac{R_0}{4} [\xi + i \sqrt{a_0} + \sqrt{(\xi + i \sqrt{a_0})^2 - 4}]^2 \quad (x, y \in \Gamma)$$

$$d = \frac{R_0}{2} [a_0 + \sqrt{a_0(a_0 + 4)}], \quad Q = \frac{8}{\sqrt{\pi}} \frac{T_\infty^2 k \sqrt{R_0 v_\infty}}{a}$$

$$a_0 = \pi T_0^2 k_1^2 a^2 / (4 T_\infty^2 R_0 k^2 v_\infty)$$

Здесь  $d$  — толщина передней кромки тела,  $Q$  — поток тепла на единицу длины трубы.

**4. Пространственные осесимметричные задачи.** Для пространственных задач не имеется точных решений. Однако на основе результатов решений плоских задач можно ожидать, что при удачном приближении искомой формы тела некоторой, заранее выбранной, и удовлетворении граничному условию в среднем будет получаться результат, близкий к истинному.

Для осесимметричного течения введем следующие ортогональные криволинейные координаты  $q_1, q_2$  и  $q_3$ :  $q_1 = \varphi(x, y, z)$  — потенциал течения ( $v = \text{grad } \varphi$ ),  $q_2 = \psi(x, y, z)$  — функция тока, введенная так, что расход через кольцевой слой равен  $2\pi \Delta \psi$ ,  $q_3$  — круговая относительно оси симметрии координата. Для единственной

компоненты скорости  $v_\varphi$  вдоль линии тока имеем [7]  $v_\varphi = 1 / H_1 = 1 / (H_2 H_3)$ , где  $H_1$ ,  $H_2$  и  $H_3 = \rho$  — коэффициенты Ляме,  $\rho$  — расстояние от оси симметрии. Уравнение теплопроводности в потоке жидкости приводится к виду

$$(4.1) \quad a^2 \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \rho^2 \frac{\partial T}{\partial \psi} \right) \right] = \frac{\partial T}{\partial \varphi} \quad (h_1 = \rho h_2)$$

Для больших чисел Пекле  $P$  заменим в (4.1) функцию  $\rho^2(\varphi, \psi)$  ее значением на границе тела  $\rho^2(\varphi, 0)$  и, как и выше, опустим член  $\partial^2 T / \partial \varphi^2$ .

Для рассматриваемой задачи решение получившегося уравнения имеет вид

$$(4.2) \quad T(\varphi, \psi) = T_\infty \operatorname{erf} \frac{\psi}{2 \sqrt{\chi(\varphi)}}, \quad x(\varphi) = a^2 \int_{\varphi_A}^{\varphi} \rho(\varphi, 0) d\varphi$$

Известные свойства решений уравнения (4.1) без члена  $\partial^2 T / \partial \varphi^2$  позволяют ожидать не слишком большого отклонения в решениях при замене  $\rho(\varphi, \psi)$  на  $\rho(\varphi, 0)$ . Была проведена численная проверка этого допущения в работе [8], где было найдено точное решение полного уравнения (4.1) для случая обтекания сферы при  $P = 180$ . Сравнение изолиний и тепловых потоков точного численного и приближенного аналитического решения (4.2) показало, что они практически совпадают (в рамках погрешности численного решения).

Поступила 25 VII 1974

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Boussinesq M. J.* Calcul du pouvoir refroidissant des courants fluids. J. Math., 1905, vol. 1, No. 825.
2. *Grosh R. J., Cess R. D.* Heat transfer to fluids with low Prandtl numbers for flow across. Plates and cylinders of various cross section. Paper. Amer. Soc. Mech. Engrs, 1957, NF-29.
3. *Van Wijngaarden L.* Asymptotic solution of a diffusion problem with mixed boundary conditions. Proc. Koninkl. nederl. akad. wet. B, 1966, vol. 69, No. 2.
4. *Проскураков Б. В.* Тепловой расчет замораживающей скважины в фильтрующем грунте. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехн., 1961, т. 45.
5. *Максимов В. А.* О равновесной форме тел, отвердевших вокруг хладоисточника, обтекаемого жидкостью. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 4.
6. *Максимов В. А.* Форма сомкнувшихся ледопорных тел, образуемых батареей замораживающих скважин, обтекаемой подземными водами. В сб.: Некоторые вопросы механики горных пород. М., Моск. горн. ин-т, 1968.
7. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа. М.—Л., Гостехиздат, 1950.
8. *Максимов В. А.* Вычисление размера ледопородного тела, устанавливающегося вокруг подземного хранилища сжиженных газов, обтекаемого потоком подземных вод. В сб.: Вопросы механики горных пород. М., «Недра», 1971.