

О ГЛАВНОМ РЕЗОНАНСЕ В МЕХАНИКЕ СПЛОШНЫХ СРЕД

Ю. Б. Пономаренко

(Москва)

Рассматриваются резонансные колебания малой амплитуды в нелинейной системе вблизи границы ее устойчивости. Для амплитуды колебаний получено уравнение Ван дер Поля с дополнительным параметром; в автономной системе этот параметр характеризует зависимость частоты колебаний от амплитуды. На основе амплитудного уравнения исследуется эволюция стационарных движений при изменении параметров. В качестве примера рассматриваются резонансные звуковые колебания политропного газа, возбуждаемые поршнем в длинной трубе, оканчивающейся емкостью.

1. При периодическом воздействии на системы, описываемые уравнениями в частных производных, возможны резонансные явления. Общеизвестны примеры резонансов в теории упругости, акустике, электродинамике. При резонансе в самовозбуждающихся системах возможны режимы биений и захватывания частоты; примером может служить резонанс в газовом разряде, неустойчивом относительно возбуждения страт [1].

В данной работе рассматриваются резонансные колебания малой амплитуды, при которых малы отклонения зависимых переменных (плотности, скоростей, тока и т. п.) от равновесных, не зависящих от времени значений. Отклонения могут быть малы, если мала амплитуда ε периодического возмущения автономной системы.

По аналогии со случаем автономных систем [2] задача для вектора отклонений X получается разложением исходных нелинейных уравнений и граничных условий в степенной ряд по X , ε . Простейшее неавтономное уравнение линейно по ε

$$(1.1) \quad \partial X / \partial t + L_1 X + L_2 X^2 + L_3 X^3 + \dots = \varepsilon EC + \text{с. с.}, \quad E = e^{i\omega t}$$

Здесь и ниже с. с. означает выражение, комплексно-сопряженное предшествующему. Коэффициенты $L = L(D, x, \lambda)$, где λ — параметры системы, x — пространственные координаты, $D = \partial / \partial x$ — операторы дифференцирования; относительно D вещественные коэффициенты L являются полиномами.

Члены в правой части (1.1) характеризуют возмущение с комплексной амплитудой ε и формой, описываемой комплексным вектором $C = C(x)$.

Область изменения x предполагается ограниченной. Считается, что граничные условия имеют простейшую форму: если x принадлежит границе области, то $UX = 0$, где $U = U(D, x, \lambda)$ — вещественная матрица. Общий случай уравнений и граничных условий, содержащих высшие степени ε , X , $\partial / \partial t$, рассмотрен в п. 4.

В дальнейшем будут рассматриваться стационарные (или достаточно близкие к ним) состояния системы, поэтому граничная задача решается без начальных условий.]

При $\varepsilon = 0$ уравнение (1.1) является автономным. Решения линейной по X автономной задачи определяются соотношениями

$$(1.2) \quad X = X_1(x)e^{p_0 t}, \quad p_0 X_1 + L_1 X_1 = 0, \quad UX_1 = 0$$

Если X — решение задачи (1.2), то \bar{X} — также решение, поэтому ниже рассматриваются собственные значения $p_0 = \gamma_0 + i\Omega_0$ с частотами $\Omega_0 \geq 0$.

Относительно системы предполагается, что существуют критические значения параметров $\lambda = \lambda_*$, при которых одно из собственных значений (называемое ниже критическим и предполагаемое простым) становится чисто мнимым ($p_0 = i\Omega_*$), а инкременты $\gamma_0(\lambda_*)$ всех других собственных значений отрицательны и не малы.

При $\varepsilon \neq 0$ имеет место главный резонанс, если расстройка $p = p_0 - i\omega$ мала, т. е. малы (по сравнению с ω) инкремент γ_0 и вещественная расстройка $\Delta = \Omega_0 - \omega$. Амплитуду возмущения ε также необходимо считать малой для того, чтобы величина X могла быть малой при больших t . Малые параметры γ_0 , Δ , ε , очевидно, независимы; их отношения могут принимать произвольные значения.

Способ отыскания стационарных колебаний в автономных системах [2] обобщается на случай неавтономных систем аналогично тому, как это делается в теории колебаний [3,4]. Решение ищется в виде степенного ряда по малым величинам QE , εE и им комплексно-сопряженным

$$(1.3) \quad X = [E(QX_1 + Q^2\bar{Q}X_3 + \varepsilon X_4) + (EQ)^2 X_2] + \text{с.с.} + Q\bar{Q}X_0 + \dots$$

Коэффициенты ряда X_n зависят только от x ; X_1 — собственная функция задачи (1.2), соответствующая критическому p_0 (с частотой $\Omega_0 > 0$). Уравнение для амплитуды колебаний $Q(t)$ также ищется в виде ряда по величинам Q , ε и им сопряженным

$$(1.4) \quad dQ/dt = Q(p + p_2 Q\bar{Q}) + \varepsilon p_1 + \dots \quad (p = p_0 - i\omega)$$

Как и в случае автономных систем [2], коэффициенты в (1.3) определяются последовательно из линейных неоднородных граничных задач; условия ограниченности коэффициентов при $p \rightarrow 0$ определяют коэффициенты в (1.4).

Неоднородные задачи получаются после подстановки (1.3), (1.4), в (1.1) и граничное условие приравнованием членов с одинаковыми степенями E , Q , \bar{Q} , ε , $\bar{\varepsilon}$. Достаточно рассмотреть задачи, соответствующие неотрицательным степеням ν величины E . Решения этих задач ограничены при $\nu \neq 1$. В случае $\nu = 1$ решения конечны при $p \rightarrow 0$, лишь если

$$(1.5) \quad \langle \Psi, Z \rangle \equiv \int (\Psi \cdot \bar{Z}) dx = 0$$

Здесь Ψ — свободный член неоднородной задачи, Z — собственная функция задачи, сопряженной к задаче (1.2) с критическим значением p_0 ; интегрирование ведется по области изменения x . Из (1.5) находится входящий в Ψ линейно коэффициент p_n ряда (1.4) при степенях Q , \bar{Q} , ε , $\bar{\varepsilon}$, определяющих неоднородную задачу (например, p_2 находится из задачи для X_3 , p_1 — из задачи для X_4).

В дальнейшем поведение системы рассматривается на основе приближенного уравнения (1.4). Для возможности такого приближения необходимо, чтобы удержанные явно выписанные члены были наибольшими. Последнее имеет место, если величины $p_n = \gamma_n + i\Omega_n$ ($n = 1, 2$) не малы при $\lambda = \lambda_*$; эти условия предполагаются выполненными. При исследовании устойчивости стационарных колебаний приходится также предполагать (как и в случае $\varepsilon = 0$), что не мала величина γ_2 .

Для нахождения p_n необходимо в (1.3), (1.1) удержать явно выписанные члены. В используемом приближении достаточно найти величины p_n , X_{n1} при $\lambda = \lambda_*$, $\omega = \Omega_*$; величины $p_{1,2}$, $X_{3,4}$ удобно находить одновременно, полагая

$$(1.6) \quad Y = X_3 + gX_4, \quad P = p_2 + gp_1, \quad g = \varepsilon / (Q^2 \bar{Q})$$

и рассматривая частный случай $g \sim 1$ (здесь и ниже соотношение порядка $a \sim b$ эквивалентно соотношению $a = O(b)$; в этих соотношениях и неравенствах комплексные числа сравниваются по модулю).

В приложениях может оказаться удобным находить коэффициенты в (1.3), (1.4) в виде рядов по $\lambda - \lambda_*$, $\omega - \Omega_*$.

Пример вычисления величины P приведен в п. 5.

Обобщения неавтономной задачи (1.1) рассмотрены в п. 4; в частности, приведены полные ряды (1.3), (1.4).

2. Стационарным решениям (1.4) соответствуют периодические колебания системы, периодическим решениям — почти-периодические колебания (биения). Наблюдаемые колебания соответствуют устойчивым решениям. В этом разделе рассматриваются стационарные решения ($\partial / \partial t = 0$).

Из (1.4) нетрудно получить оценку $Q \sim \min(\varepsilon^{1/3}, \varepsilon / p)$. При $\varepsilon^{2/3} \ll p$ имеет место линейный резонанс, так как нелинейные эффекты несущественны при определении стационарной амплитуды; в противоположном случае несущественны эффекты расстройки.

Для нахождения точных стационарных решений удобно представить (1.4) в виде

$$(2.1) \quad \begin{aligned} dR / d\tau &= (1 + i\eta) \{ R [\alpha (1 - i\sigma) - R\bar{R}] + F + \dots \} \equiv H \\ R &= \frac{Q}{\mu} e^{i(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad \tau = t |p_2| \mu^2 \cos \varphi_2, \quad \eta = \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\Omega_2}{\gamma_2} \\ \alpha &= \frac{\cos \psi}{|\cos \psi|} = \pm 1, \quad \sigma = \operatorname{tg} \psi, \quad \mu = \left| \frac{p}{p_2} \cos \psi \right|^{1/2} > 0, \quad \psi = \varphi_2 - \varphi \\ F &= \left| \varepsilon \frac{p_1}{p_2} \right| \mu^{-3}, \quad p = |p| e^{i\varphi}, \quad p_2 = -|p_2| e^{i\varphi_2}, \quad \varepsilon p_1 = |\varepsilon p_1| e^{i\varphi_1} \end{aligned}$$

При $\eta = 0$, $\alpha = 1$, $R = x + iy = re^{i\theta}$ из (2.1) получаются уравнения Ван дер Поля, исследованные в [3, 5-7].

Уравнения, приводящиеся к (2.1), получены и исследованы в [8]. Основные результаты [8] и другие результаты качественного исследования (2.1) приведены ниже.

Сначала рассматривается случай $\gamma_2 < 0$, $\eta \geq 0$.

Для стационарных решений из (2.1) получается

$$(2.2) \quad \rho [(\alpha - p)^2 + \sigma^2] = f, \quad \rho = R\bar{R}, \quad f = F^2$$

Если в (2.2) при $\alpha = -1$ изменить знаки ρ , f , то получится уравнение (2.2) при $\alpha = 1$. Удобно вместо двух уравнений (2.2) для $\rho \geq 0$ рассматривать только уравнение с $\alpha = 1$ в области $(-\infty < \rho < \infty)$, используя отрицательные ρ , f при $\alpha = -1$.

Амплитудные кривые $f(\sigma, \rho) = \text{const}$ построены в [5]; на фиг. 1 тонкими сплошными линиями показаны кривые $f = (-8, -4, 0, 2, 4, 8) / 27$. Жирным пунктиром показан эллипс $\partial f / \partial \rho \equiv (1 - \rho)(1 - 3\rho) + \sigma^2 = 0$; в точках эллипса амплитудные кривые вертикальны.

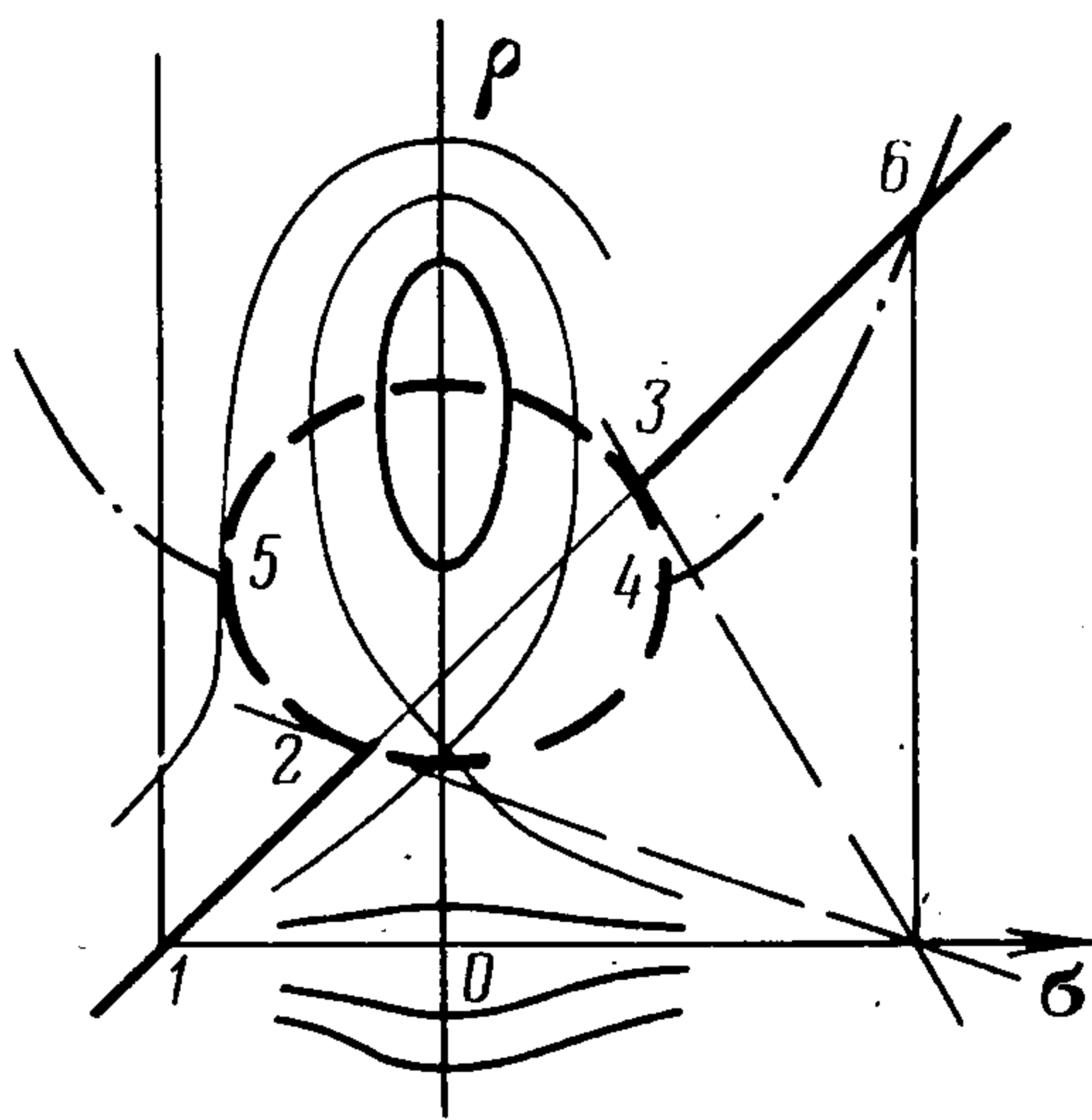
Малые отклонения от равновесия пропорциональны $\exp(\kappa t)$. Из (2.1) получаются

$$(2.3) \quad \kappa = a \pm (a^2 - b^2)^{1/2}, \quad a \equiv \text{Re}(\partial H / \partial R) = \alpha(1 + \sigma\eta - 2\rho)$$

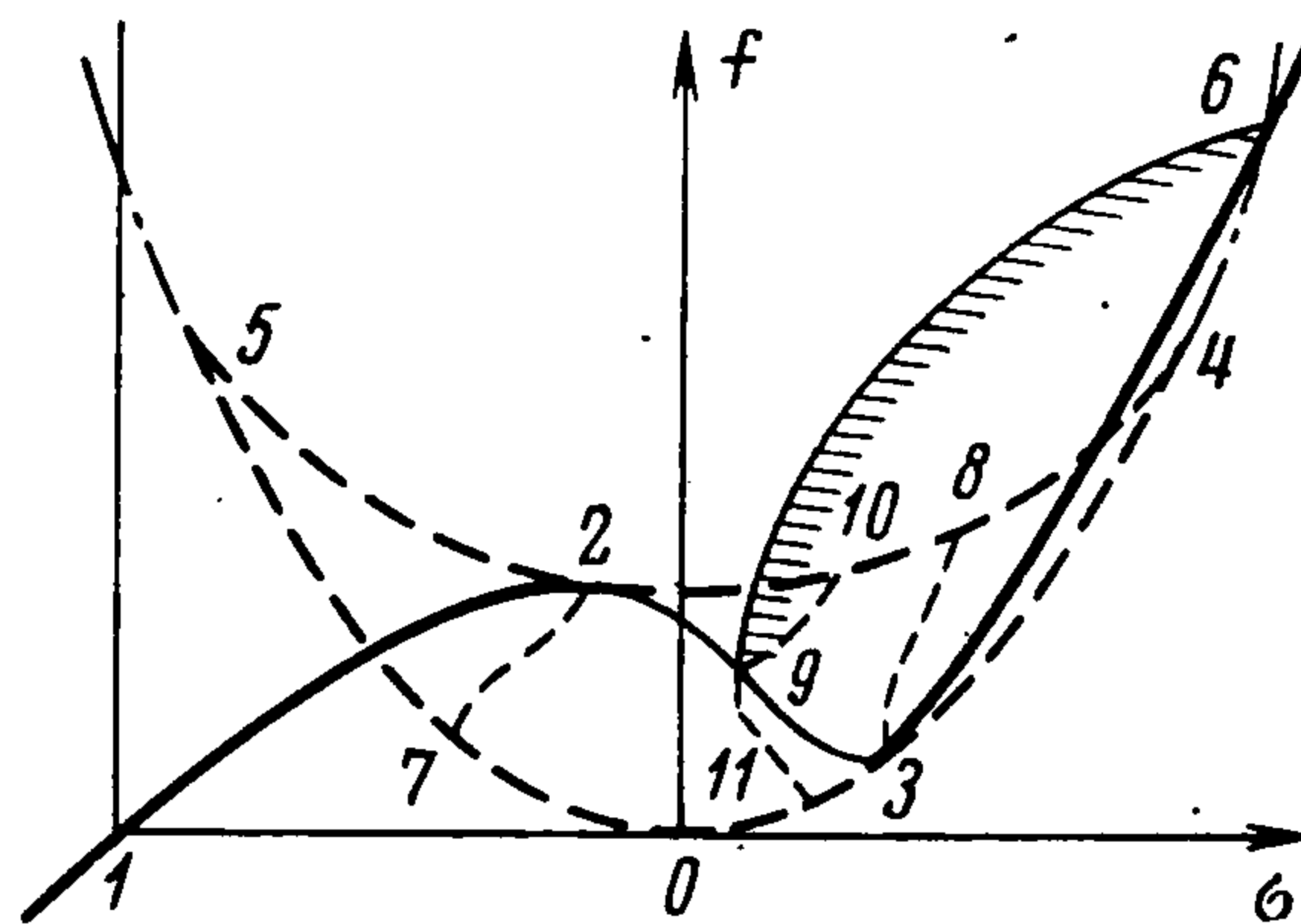
$$b \equiv |\partial H / \partial R|^2 - |\partial H / \partial \bar{R}|^2 = (1 + \eta^2) \partial f / \partial \rho$$

Здесь производные берутся в точке равновесия. Из (2.3) следует, что внутри эллипса расположены седла.

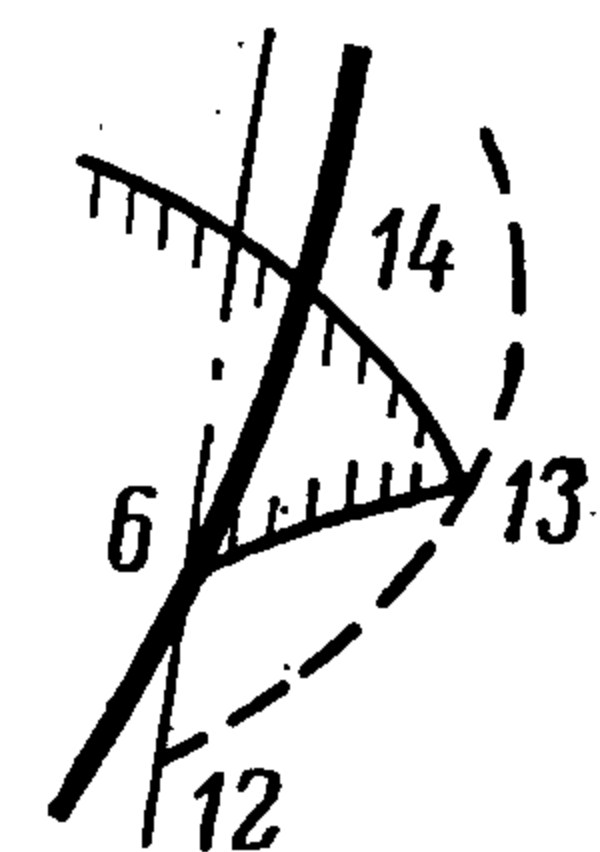
Прямая $a = 0$ пересекает ось σ в точке $\sigma_1 = -1/\eta$ и эллипс в точках 2, 3. Фиг. 1 соответствует значению $\eta > 1/\sqrt{3} = \eta_*$, когда точка 4 расположена под прямой.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Тонкие пунктирные прямые на фиг. 1 касаются эллипса в точках 2, 3 и пересекают ось σ в точке $\sigma = \eta$; узлы расположены между этими прямыми. Точки эллипса — седлоузлы (исключением являются вырожденные (угловые) точки 2, 3 и узлы 4, 5). Остальные особые точки — фокусы.

Узлы и фокусы неустойчивы, если они расположены между прямой $a = 0$ и осью σ в первом и третьем квадрантах, образованных осью σ и прямой $\sigma = \sigma_1$. Эта прямая соответствует границе устойчивости $\gamma_0 = 0$; второй и четвертый квадранты соответствуют значениям $\gamma_0 < 0$. При непрерывном изменении параметров переход из верхней полуплоскости фиг. 1 в нижнюю (и обратно) происходит только через бесконечно удаленную точку в противоположный квадрант.

Используя методы [2,9], можно показать, что при $\delta \neq \eta$, $a = 0$ сложные фокусы — первой кратности; неустойчивы сложные фокусы, расположенные над эллипсом или параболой $2\rho = 1 + \sigma^2$ (штрихпунктирная линия на фиг. 1). Передельный цикл $R(t)$ вокруг фокуса R с малым a есть

$$R(t) = R + (R / |R|) (x + iy)$$

$$(x, y) = 1/2 S e^{i\Omega t} [ib^{1/2} - \alpha\rho, \alpha d] + c.c. + O(S^2)$$

$$d = \eta - \sigma - 3\eta\rho, \quad \Omega^2 = b + O(S^2), \quad |S|^2 = \frac{a}{d} \frac{\rho}{f} \frac{b}{(1 + \eta^2)(\eta - \sigma)}$$

Здесь a, b определены в (2.3). Неустойчивый цикл существует при $a < 0, \sigma < \eta, d < 0$, устойчивый — при $a > 0, d(\sigma - \eta) < 0$.

Исследование сложного фокуса b на параболе затруднительно из-за громоздкости соответствующих вычислений. Естественно допустить, что этот фокус — второй кратности при любых η , за исключением возможных критических значений, при переходе через которые фокус меняет устойчивость.

3. Зная природу особых точек, можно установить структуру фазовой плоскости уравнения (2.1) при различных значениях параметров σ , f .

Ниже рассматривается характер разбиения плоскости параметров (фиг. 2) на области с неизменной (или мало меняющейся) структурой. Если такое разбиение известно, то поведение системы при изменении параметров определяется элементарно.

Кривым (точкам) на фиг. 1 соответствуют одинаково нарисованные (обозначенные) кривые (точки) на фиг. 2 (обратное соответствие неоднозначно из-за наличия нескольких особых точек).

Ось δ и прямая $\delta = \delta_1$ делят плоскость фиг. 2 на четыре квадранта. Во втором и четвертом квадранте $a = \alpha(1 + \sigma\eta) - 2R\bar{R} \leq 0$ при любых R , поэтому в них, согласно критерию Бендиксона, предельные циклы отсутствуют. Интегральные кривые идут из неустойчивой бесконечно удаленной точки в одну из устойчивых точек (таких точек может быть две лишь во втором квадранте при $\eta > \sqrt{3}$, когда $\sigma_6 < \delta_1$). Такая же структура соответствует части третьего квадранта, где фокус устойчив; в случае неустойчивого фокуса имеется устойчивый предельный цикл, рождающийся из сложного фокуса при потере устойчивости.

В первом квадранте устойчивый цикл существует между осью σ и кривой 1, 2, 7, 0, 11, 9, 6, ∞ . При пересечении кривых 1, 2 и 6, ∞ цикл исчезает, стягиваясь в фокус. При пересечении 2, 7 (9, 11) цикл исчезает, сливаясь с сепаратрисой седла, расположенного вне (внутри) цикла. При пересечении 7, 0, 11 цикл исчезает из-за возникновения на нем седло-узла. При пересечении 9, 6 цикл исчезает, сливаясь с внутренним неустойчивым циклом.

Неустойчивый цикл существует в области 3, 8, 10, 9, 6, 3. При пересечении 3, 6 он стягивается в точку. При пересечении 3, 8 (9, 10) он сливается с сепаратрисой седла вне (внутри) цикла. При пересечении 8, 10 на цикле возникает седло-узел.

Точка 9 расположена на кривой 2, 3 (на фиг. 1 ей соответствует седло на прямой 2, 3).

При уменьшении η до значения η_* область существования неустойчивого цикла исчезает, стягиваясь к точке 4. При $\sigma > 0$, $\eta_* > \eta > 0$ области с неизменной структурой такие же, как на фиг. 2 при $\sigma < 0$. При $\eta = 0$ фиг. 2 симметрична относительно оси f , причем $f_7 > f_2$ согласно [7].

Изменение η вызывает поворот поля направлений уравнения (2.1) на постоянный угол. Из результатов [9] следует, что в этом случае при увеличении η двукратный цикл распадается на два, т. е. кривая 6, 9 удаляется от точки 4. Отсюда и из отсутствия циклов во втором квадранте следует, что кривая 6, 9 лежит в области $\sigma > 0$.

Показанное на фиг. 2 разбиение найдено в [8]; оно соответствует устойчивому фокусу 6. При переходе η через некоторые значения возможна смена устойчивости фокуса. Пусть η_{12} — одно из таких значений, причем фокус 6 неустойчив при $\eta > \eta_{12}$ и устойчив при $\eta \leq \eta_{12}$; тогда окрестность фокуса выглядит, как на фиг. 3. В области 6, 13, 14 существуют три цикла, на кривой 6, 13, 14 один из циклов — двукратный, в точке 13 имеется трехкратный цикл. При увеличении η кривая 6, 13 удаляется от точки 4.

Выше рассмотрен случай $\gamma_2 < 0$, $\eta \geq 0$. Случай $\gamma_2 < 0$, $\eta \leq 0$ не нуждается в пояснениях. Случай $\gamma_2 = 0$ обсуждается ниже. Случай $\gamma_2 > 0$ отличается от рассмотренного направлением траекторий уравнения (2.1).

Отметим связь между характером резонансных колебаний и показателями устойчивости автономной системы. При $\gamma_2 < 0$ колебания периодические, если $\gamma_0 \leq 0$; если $\gamma_0 > 0$, то возможны также биения. При $\gamma_2 > 0$, $\gamma_0 \geq 0$ колебания малой амплитуды невозможны; если $\gamma_0 < 0$, то малые колебания (периодические или биения) возможны.

4. В этом разделе рассмотрены обобщения задачи (1.1), а также случаи нарушения некоторых вводимых выше ограничений.

Выше предполагалось, что γ_2 не мало. Если это не так, то стационарное решение Q (по-прежнему определяемое из (2.1), (2.2)) устойчиво, если $\gamma_0 < \gamma_* < 0$, где $\gamma_* \sim Q\epsilon$. Эти условия связаны с влиянием на устойчивость членов $\sim Q^2\epsilon$, Q^5 в (1.4).

Если в (1.4) величины p_n малы, то необходимо удерживать опущенные члены рядов

(1.3), (1.4). Эти ряды имеют вид

$$(4.1) \quad X = \sum_{v=-\infty}^{\infty} X_v E^v$$

$$\bar{X}_{-v} = X_v = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n+v} \sum_{s=0}^n Q^{v+n-r} \bar{Q}^{n-s} \varepsilon^r \bar{\varepsilon}^s X_{vnrs} \quad (v \geq 0)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{r=0}^{n+1} \sum_{s=0}^n Q^{1+n-r} \bar{Q}^{n-s} \varepsilon^r \bar{\varepsilon}^s p_{nrs}$$

Коэффициенты p определяются условием ограниченности коэффициентов в X_i при малых расстройках. В случае больших вещественных расстройек уравнение (4.1) применимо, но неэффективно, так как нуждается в дополнительных преобразованиях.

В случае задачи (1.1) с начальным условием $X(0) = X_+$ (где величина X_+ мала) можно ожидать, что уравнение (4.1) описывает поведение системы, начиная с $t \sim 1/\gamma_*$ (γ_* — минимальный декремент не критических собственных значений задачи (1.2)), когда согласно линейной теории в системе существуют лишь колебания, характеризуемые критическим значением p_0 . Поэтому в качестве начального условия для (4.1) можно принять $Q(0) = Q_+ = \langle X_+ \cdot Z \rangle / \langle X_1 \cdot Z \rangle$, где обозначения те же, что и в (1.5).

Разложения (4.1) применимы к граничным задачам с нелинейными неавтономными граничными условиями. В эти условия и в уравнения могут входить производные по t высокого порядка и зависящие от X неавтономные члены; последние могут быть нелинейными по ε и негармоническими по явному t . Для применимости приближения (1.4) необходимо, чтобы в уравнении и граничном условии свободный член $\sim \varepsilon$ был гармоническим; если он периодический с медленно убывающими гармониками, то (1.4) применимо при $\varepsilon \ll Q^2$ из-за влияния гармоник с частотами $\omega = 0, 2\Omega_0$.

Выше предполагалось, что задача (1.2) имеет только одно критическое значение p_0 . Пусть p_3 — другое такое значение (γ_3 мало); тогда существуют взаимно простые числа m, n , для которых $p_3 \approx (n/m) p_0$, т. е. имеет место внутренний резонанс. Из совместного рассмотрения уравнений для Q, Q_3 можно найти, что приближение (1.4) для Q применимо, если $m+n > 4, \gamma_3 < \gamma_* < 0$, где $\gamma_* \sim Q^2 \sim \varepsilon^{2/3}$; если возмущение негармоническое, то требуется также отсутствие главного резонанса на частоте Ω_3 .

В заключение отметим, что все сказанное выше применимо и к системам, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями.

5. В качестве примера рассмотрим задачу для $X = (\xi, w)$

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \xi' + w' &= 0, \quad w' + \varepsilon' + \Phi' + \lambda w = 0 \\ \Phi &= w^2 / \rho - \rho + \rho^\beta / \beta = w^2 (1 - \xi) + \xi^2 (h + h_* \xi) + \dots \\ h &= 1/2 (\beta - 1), \quad h_* = 1/3 h (\beta = 2); \quad 0 \leq x \leq l = 1 + 2 (\varepsilon / \omega) \sin \omega t \\ (a\xi' + w)_0 &= 0 \quad (w)_1 = 2 (\rho)_1 \varepsilon \cos \omega t \end{aligned}$$

Задача (5.1) описывает колебания газа в трубе с емкостью, возбуждаемые жестким непроницаемым поршнем, движущимся на противоположном конце трубы со скоростью $2\varepsilon \cos \omega t$. Задача записана в безразмерном виде (таком, что при $\varepsilon = 0$ длина трубы, скорость звука и плотность равновесного газа равны единице); $\xi = \rho - 1$ — отклонение плотности, $w = \rho v$ (где v — скорость), λw — сила трения о стенки; величина λ пропорциональна безразмерному коэффициенту кинематической вязкости, деленному на квадрат радиуса трубы; a — отношение объемов емкости и трубы; давление газа равно ρ^β . Точка означает дифференцирование по t , штрих — по x ; в граничных условиях индексы 0,1 после скобки относятся к значениям $x = 0, l$. Первое условие соответствует случаю, когда размер емкости мал по сравнению с $1/\omega$ и поэтому зависимость давления в емкости от координат не существенна.

В дальнейшем используется условие сохранения полной массы газа

$$(5.2) \quad \int_0^l \xi dx + \alpha (\xi)_0 = 0$$

Это условие получается интегрированием уравнения непрерывности от $x = 0$ до $x = l + 0$ с учетом граничных условий и равенств $\rho = w = 0$ при $x > l$.

Решение линейной автономной задачи (5.1) определяется соотношениями

$$(5.3) \quad p_0 = ik, \quad k = 1/2 i\lambda + (\kappa^2 - 1/4 \lambda^2)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \kappa = -a\kappa \\ X_1 = \left(\cos \theta, -i \frac{k}{\kappa} \sin \theta \right), \quad \theta = \kappa(x-1), \quad \kappa \geq 0, \quad 0 \leq x \leq 1$$

Собственная функция Z сопряженной задачи получается из X_1 заменой $k \rightarrow \bar{k}$; ниже используются значения собственных функций при $\lambda = 0$, когда $Z = X_1$, $\langle X_1 \cdot Z \rangle = 1$.

В дальнейшем частота ω считается близкой к первому корню $\kappa = \kappa_1$ уравнения (5.3). Значение a берется таким, что внутренние резонансы не нарушают приближения (1.4); такие значения существуют (например, $|m\kappa_s - n\kappa| > 1/3$, если $m + n < 10$, $a = 0.81$, $s > 1$). Число $k = \kappa = 0$ и функции $X_1 = Z = (1, 0)$ (описывающие только изменения плотности) также являются собственными; это не приводит к затруднениям, так как изменения плотности удовлетворяют условию (5.2).

В приближении (1.4) не учитываются члены $\sim Q\varepsilon$. С точностью до этих членов во втором граничном условии (5.1) можно принять $(\rho)_1 = 1$; с той же точностью $l = 1$ (в этом нетрудно убедиться, введя новую координату $y = x/l$).

При $\lambda = 0$, $\omega = \kappa$ для X_n в (1.3) получается из (5.1)

$$i\kappa\xi + w' = 0, \quad i\kappa w + \xi' + \Phi_n' = 0 \\ (i\kappa\xi + w)_0 = 0 \quad (w)_1 = 0 \quad (n = 0, 2) \\ \Phi_2 = w_1^2 + h\xi_1^2, \quad \Phi_0 = 2(|w_1|^2 + h|\xi_1'|^2)$$

Решения этих задач

$$(5.4) \quad w_0 = 0, \quad \xi_0 = (h-1)(c_0 + \cos 2\theta), \quad c_0 = (\sin^2 \kappa) / (1 + 1/a) \\ w_2 = 1/4 i (1+h)(2\theta \cos 2\theta + c_2 \sin 2\theta), \quad \xi_2 = 1/4 (1+h) \times \\ \times [2\theta \sin 2\theta - (1+c_2) \cos 2\theta], \quad c_2 = (1 + 1/a) (a\kappa)^{-2} + 3/a - 1$$

Здесь постоянная c_0 найдена из условия (5.2) для ξ_0 . Равенство $w_0 = 0$ означает, что в процессе установления колебаний распределение ξ_0 создается средним потоком $w_0 = o(Q^2)$.

Для Y в (1.6) получается

$$(5.5) \quad i\kappa\xi + w' + P\xi_1 = 0, \quad i\kappa w + \xi' + Pw_1 + \Phi_3' = 0 \\ a(i\kappa\xi + P\xi_1)_0 + (w_0) = 0, \quad (w)_1 = g \\ \Phi_3 = 2w_1\bar{w}_1 - w_1^2\bar{\xi}_1 - 2|w_1|^2 \xi_1 + 2h(\xi_0\xi_1 + \xi_2\bar{\xi}_1) + 3h_*\xi_1^2\bar{\xi}_1$$

Подстановка

$$Y = Y_* + A / (i\kappa), \quad A = (-g/a - P \cos, i\kappa g)$$

сводит (5.5) к задаче для Y_* с однородными условиями и свободным членом $\psi = A + (0, \Phi_3') + PX_1$. Решение этой задачи существует, если $\langle \psi \cdot Z \rangle = 0$; отсюда получается

$$(5.6) \quad P = -(g + iJ)(1 + a \cos^2 \kappa)^{-1}, \quad J = \int_0^1 \Phi_3' \sin \theta dx$$

Из (5.3) — (5.6) видно, что J вещественно, поэтому $\gamma_2 = 0$. При $\beta = 1$

$$8J = (c_2 + 1) (\kappa - 2 \sin 2\kappa + 3/4 \sin 4\kappa) + 2\kappa (1 - 2 \cos 2\kappa + 3/4 \cos 4\kappa + \\ + (16\kappa)^{-1} \sin 4\kappa) > 0$$

так как при $\kappa \leq 3/4 \pi$ каждый множитель положителен, а при $\kappa \geq 3/4 \pi$ с учетом возрастания $c_2(\kappa)$ имеем

$$8J > (c_2 + 1) (\kappa - 3/4) - (7/2 \kappa + 1/8) = f(\kappa) \geq f(3/4 \pi) > 0$$

При $J \neq 0$, $\lambda > 0$ уравнение (1.4) может иметь одно устойчивое стационарное решение Q или два устойчивых (с большим и малым значением $|Q|$) и одно неустойчивое.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зайцев А. А. Автоколебательные режимы и бегущие слои в разряде. Докл. АН СССР, 1952, т. 84, № 1.
 2. Пономаренко Ю. Б. О жестком возникновении стационарных движений в гидродинамике. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
 3. Van der Pol B., Forced oscillations in a circuit with non-linear resistance. Philos. Mag. Ser. 7, 1927, vol. 3, No. 13.
 4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
 5. Андронов А. А., Витт А. А., К теории захватывания Ван дер Поля. В кн.: Андронов А. А. Собр. тр. М., Изд-во АН СССР, 1956.
 6. Gartwright M. L. Forced oscillations in nearly sinusoidal systems. J. Inst. Electr. Engrs, 1948, vol. 95, pt. 1, No. 89, p. 223.
 7. Gillies A. W. On the transformations of singularities and limit cycles of the variational equations of van der Pol. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1954, vol. 7, pt. 2.
 8. Gillies A. W. The singularities and limit cycles of an autonomous system of differential equations of the second order associated with non-linear oscillations. Тр. Международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
 9. Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г. Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.
-