

ДИНАМИКА ГРАВИТИРУЮЩЕГО ГАЗОВОГО ЭЛЛИпсоИДА

О. И. Богоявленский

(Москва)

Рассматривается динамика адиабатических движений гравитирующего идеального газа, при которых скорости являются линейными функциями координат и газ с постоянной плотностью заполняет некоторый эллипсоид. Показано, что при показателе адиабаты $\gamma < 4/3$ сферически симметричный режим сжатия газа в точку является неустойчивым. Указана естественная аппроксимация колебательного режима движения газа в состоянии сильного сжатия при большой отрицательной энергии газа. Найден колебательный режим расширения вращающегося газового эллипсоида в вакуум, реализующийся также и при отсутствии гравитационного взаимодействия между частицами газа.

Движения сплошной среды, в которых скорости являются линейными функциями координат, изучались в большом числе работ, первыми из которых были классические работы Дирихле, Дедекинда и Римана по теории фигур равновесия идеальной несжимаемой гравитирующей жидкости (см. [1,2]). В работе Дирихле [3] изучались также нелинейные колебания жидкого эллипсоида, обобщающие малые колебания в окрестности эллипсоидов Маклорена (см. [2,4]). Подобные движения негравитирующего идеального газа в более общем случае (плотность газа в пространстве не постоянна) изучались в работах [5-8]¹, движение пылевых эллипсоидов изучалось в работах [9,10]. Общим вопросам движений сплошной среды, в которых скорости являются линейными функциями координат, и движению эллипсоида заряженной жидкости посвящена книга [11].

Движение гравитирующего газового шара в работах [12-14] рассматривалось в качестве модели пульсаций переменных звезд-цефеид. В работе [15] в явном виде найдено сферически симметричное движение гравитирующего газа с переменной плотностью, аналогичное найденному в [5] движению негравитирующего газа. Движение гравитирующих газовых эллипсоидов в работах [16,17] рассматривалось в качестве модели образования галактик и звезд из облаков первоначально холодного газа; при этом в работе [16] было отмечено, что адиабатическое движение гравитирующего газового эллипсоида при отрицательной энергии E , как и движение эллипсоида несжимаемой жидкости, исследованное Дирихле в 1860 г. (см. [2-4]), происходит в колебательном режиме.

В части данной работы, посвященной движению с $E < 0$, показано, что при определенных значениях параметров колебательный режим можно аппроксимировать последовательностью более простых движений гравитирующего пылевого эллипсоида. В п. 2, 3 содержится качественное описание колебательных режимов движения гравитирующего газового эллипсоида при $E > 0$ (расширение вращающегося газового облака в вакуум) и при $E < 0$. В п. 5 приведен вывод колебательного режима движения эллипсоида при $E < 0$, основанный на изучении (см. п. 4) особых точек и сепаратрис соответствующей динамической системы (подобный вывод колебательного режима при $E > 0$ см. в работе, цитированной ниже). Приложение содержит исследование аналогичной задачи в двумерной гидродинамике.

¹ См. также работу Богоявленского О. И., Колебательный режим расширения газового облака в вакуум. Препринт Ин-та теор. физики им. Л. Д. Ландау, 1975.

1. **Постановка задачи.** Адиабатическое движение гравитирующего идеального газа, как известно (см. [2]), определяется уравнениями

$$(1.1) \quad \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\text{grad } p - \rho \text{ grad } \Phi, \quad \frac{d\rho}{dt} = -\rho \text{ div } \mathbf{v}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\rho^\gamma}{p} \right) = 0$$

$\gamma > 1$ — показатель адиабаты, Φ — ньютоновский потенциал, созданный всей массой газа. Рассмотрим решения уравнений (1.1), удовлетворяющие следующим условиям: эйлеровы координаты r_i являются линейными функциями лагранжевых координат a_k

$$(1.2) \quad r_i = F_{ik}(t)a_k, \quad i, k = 1, 2, 3$$

(Следовательно, скорости $v_i = dr_i / dt$ — линейные функции координат r_k .) При этом плотность газа ρ и давление p при $a^2 \equiv a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 \leq 1$ определяются формулами

$$(1.3) \quad \rho = \frac{3M}{4\pi V(F)}, \quad p = \alpha \frac{3M(\gamma-1)(1-a^2)}{4\pi V^\gamma(F)}, \quad V(F) = \det \| F_{ik}(t) \|^2$$

Здесь α , M — константы, M — полная масса газа. При $a^2 > 1$ полагаем $\rho = 0$, $p = 0$.

В силу условий (1.3) газ с постоянной плотностью заполняет эллипсоид, получающийся из единичного шара $a^2 \leq 1$ при отображении $F_{ik}(t)$; давление p максимально в центре эллипсоида и равно нулю на его поверхности.

Пусть d_1, d_2, d_3 — полуоси эллипсоида; как известно (см. [2]), ньютоновский потенциал Φ в точке (x_1, x_2, x_3) внутри эллипсоида имеет вид (G — гравитационная постоянная)

$$(1.4) \quad \Phi(x_1, x_2, x_3) = \frac{3}{4} GM \int_0^\infty \left(\frac{x_1^2}{d_1^2+s} + \frac{x_2^2}{d_2^2+s} + \frac{x_3^2}{d_3^2+s} \right) \times \\ \times [(d_1^2+s)(d_2^2+s)(d_3^2+s)]^{-1/2} ds$$

Следуя методу работ [6, 7] и используя формулы (1.2) — (1.4), можно показать, что для рассматриваемых движений газа уравнения (1.1) эквивалентны следующей лагранжевой системе, определенной в пространстве матриц:

$$(1.5) \quad \frac{d^2 F_{ik}(t)}{dt^2} = -\alpha \frac{\partial V^{1-\gamma}(F)}{\partial F_{ik}} + \frac{3}{8} GM \frac{\partial U(F)}{\partial F_{ik}} \\ U(F) = \int_0^\infty [(d_1^2+s)(d_2^2+s)(d_3^2+s)]^{-1/2} ds$$

Таким образом, изучение описанных выше движений гравитирующего идеального газа эквивалентно изучению движения материальной точки в девятимерном пространстве матриц F_{ik} в поле с потенциалом, определенным (1.5). Отметим, что система (1.5) зависит от одного характерного, неустранимого заменой времени, параметра $\beta = 8\alpha / (3GM)$.

Замечание. Поскольку d_1^2, d_2^2, d_3^2 — собственные числа матрицы $F \cdot F^t$, подынтегральная функция в (1.5) следующим образом выражается через компоненты матри-

цы F_{ik} :

$$(d_1^2 + s)(d_2^2 + s)(d_3^2 + s) = \det(F \cdot F^t) + \frac{1}{2}s[(\text{Tr}(F \cdot F^t))^2 - \text{Tr}(FF^tFF^t)] + s^2 \text{Tr}(F \cdot F^t) + s^3$$

Здесь F^t — транспонированная матрица, $\text{Tr}(X)$ — след матрицы X .

2. Колебательный режим расширения в вакуум вращающегося газового эллипсоида. Рассмотрим движение сильно расширившегося гравитирующего газового эллипсоида с полной энергией $E > 0$ и $\gamma > 1$. Пусть

$$d_1, d_2, d_3 \gg \frac{GM^2}{K} + \left(\frac{\alpha M}{K}\right)^{1/(3\gamma-3)}, \quad K = \frac{M}{2} \sum_{i,k=1}^3 \left(\frac{dF_{ik}}{dt}\right)^2$$

Здесь K — кинетическая энергия газа. Тогда, согласно (1.5), коэффициенты $F_{ik}(t)$ в первом приближении изменяются по линейному закону

$$(2.1) \quad F_{ik}(t) = A_{ik}t + B_{ik}$$

При подходящем выборе констант A_{ik} , B_{ik} прямая (2.1) при некотором $t = t_0$, пересекает поверхность $L: V(F) = 0$, т. е. эллипсоид при $t \rightarrow t_0$ сжимается в диск вдоль некоторого направления. Однако при этом давление, препятствующее сжатию, растет неограниченно, а скорости газа и гравитационные силы остаются конечными, поэтому сжатие сменяется расширением. Такая смена происходит как упругое отражение прямой (2.1) от поверхности L в точке пересечения при $t = t_0$. Затем коэффициенты $F_{ik}(t)$ снова изменяются по прямой вида (2.1) с новыми константами A_{ik}^1 , B_{ik}^1 . Эта прямая снова может пересекаться с поверхностью L , что означает новое сжатие эллипсоида, и т. д. Таким образом, изменение коэффициентов $F_{ik}(t)$ на всей оси времени t в первом приближении происходит по ломаным линиям, которые упруго отражаются от поверхности L в точках пересечения.

Используя тот факт, что L — сильно изогнутая поверхность, можно направить первоначальную прямую (2.1) так, чтобы построенная по ней ломаная имела сколь угодно большое (но конечное) число пересечений с этой поверхностью.

При изменении $F_{ik}(t)$ вдоль любого отрезка ломаной объем эллипсоида ($V(F)$) достигает максимума, а затем убывает, т. е. газ находится в колебательном режиме. При этом амплитуда колебаний объема эллипсоида и плотности газа $\rho(t)$ (1.3) может быть сколь угодно большой, а время τ каждого колебания при большой энергии E становится сколь угодно малым: $\tau \sim E^{-1/2}$. Очевидно, проведенные рассуждения справедливы и при $G = 0$, поэтому колебательный режим реализуется и при отсутствии гравитационного взаимодействия между частицами газа.

Из уравнения состояния идеального газа $p = \rho RT$ и (1.3) получаем выражение для температуры

$$(2.2) \quad T = \alpha(\gamma - 1)R^{-1}(1 - a^2)V^{1-\gamma}(F)$$

где R — газовая постоянная. Очевидно, пульсации объема газа сопровождаются колебаниями его температуры, а также и других физических параметров газа.

Колебательный режим обрывается, когда очередной отрезок ломаной при неограниченном продолжении не пересекается с поверхностью L ; в этом случае происходит бесконечное свободное расширение газа.

Для реализации колебательного режима необходимо наличие вращения газа, так как при отсутствии вращения (матрица $\| F_{ik}(t) \|$ диагональна) поверхность L вырождается в три координатные плоскости, и ломаная имеет только три отражения, которым соответствуют три последовательных сжатия и расширения эллипсоида по ортогональным осям.

Найденный колебательный режим может служить моделью движения вращающейся газовой туманности, образовавшейся в результате взрыва вращающейся сверхновой звезды.

3. Колебательный режим движения с $E < 0$. Допустим, что полная энергия газа $E < 0$ и $\gamma < 4/3$, тогда, как легко показать, во все моменты времени полуоси эллипсоида $d_1, d_2, d_3 < C$. Покажем, что движение гравитирующего газового эллипсоида в состоянии сильного сжатия происходит в колебательном режиме. Действительно, пусть полуоси d_1, d_2, d_3 имеют одинаковый порядок величины: $d_i \sim d \ll (GM/\alpha)^{1/(4-3\gamma)}$. Тогда при $\gamma < 4/3$ получаем (см. (1.5))

$$(3.1) \quad GM \frac{\partial U(F)}{\partial F_{ik}} \sim GMd^{-2} \gg \alpha \frac{\partial V^{1-\gamma}(F)}{\partial F_{ik}} \sim \alpha d^{3(1-\gamma)-1}$$

Поэтому движение эллипсоида определяется гравитационными силами и, следовательно, аппроксимируется движением гравитирующего пылевого эллипсоида. Согласно [10], под действием гравитационных сил пылевой эллипсоид в общем случае сжимается в диск (т. е. $d_1 \rightarrow 0, d_2 \rightarrow C_2 > 0, d_3 \rightarrow C_3 > 0$ и $V(F) = d_1 d_2 d_3 \rightarrow 0$). Однако при наличии давления неограниченное сжатие эллипсоида в диск невозможно, так как скорости газа и гравитационные силы при таком сжатии остаются конечными, а давление, препятствующее сжатию, растет неограниченно. Поэтому сжатие в диск сменится расширением (такая смена происходит как упругое отражение вектора скорости dF_{ik}/dt от поверхности L), в результате которого полуоси d_1, d_2, d_3 вновь станут сравнимы одна с другой, движение вновь будет определяться гравитационными силами и будет аппроксимироваться движением пылевого эллипсоида. Это приведет к новому сжатию эллипсоида в диск (возможно, вдоль другого направления), которое после упругого отражения вектора скорости от поверхности L снова сменится расширением, и так далее, до бесконечности.

Для справедливости описанной аппроксимации колебательного режима не обязательно сильное сжатие эллипсоида; достаточно, чтобы $\beta = 8\alpha / (3GM) \ll 1$ (согласно (2.2) это неравенство выполнено при низкой начальной температуре газа).

Приведенная аппроксимация колебательного режима является точной при сильном сжатии эллипсоида ($E \rightarrow -\infty$) или при $\beta \rightarrow 0$.

При этих значениях параметров единственными решениями системы (1.5), не обнаруживающими колебаний, являются решения со сферически симметричным режимом сжатия [15]. Однако такой режим сжатия неустой-

чив. Поэтому, если на некотором отрезке времени движение эллипсоида близко к сферически симметричному; то при дальнейшем движении эллипсоид уходит от этого режима и вновь начинаются колебания. Эти колебания также сопровождаются колебаниями температуры T (2.2) и других физических параметров газа.

4. Исследование динамической системы. 1°. Лагранжеву систему (1.5) стандартным образом преобразуем в гамильтонову систему в фазовых координатах $q_i = F_{jk}$, $P_i = F_{jk}^*$ ($i = 1, \dots, 9$; $j, k = 1, 2, 3$). Энергия E (гамильтониан) в этих координатах имеет вид ($n = 9$)

$$(4.1) \quad E = 1/2 (P_1^2 + \dots + P_n^2) + \alpha V^{1-\gamma}(q_i) - 3/8 GMU(q_i)$$

Введем в фазовом пространстве новые координаты

$$(4.2) \quad \begin{aligned} p_i &= P_i (\alpha V^{1-\gamma}(q) + 3/8 GMU(q))^{-1/2}, \quad u = U(q) (\beta V^{1-\gamma}(q) + \\ &+ U(q))^{-1} \\ y_i &= q_i Q^{-1/2}, \quad Q = q_1^2 + \dots + q_n^2, \quad \beta = 8\alpha / (3GM) \end{aligned}$$

Координаты y_i пробегают единичную сферу S^{n-1} : $y_1^2 + \dots + y_n^2 = 1$, координаты p_i пробегают все евклидово пространство E^n , а координата u пробегает интервал $0 < u < 1$. Отметим, что координаты u, y_i при $\gamma = 4/3$ становятся зависимыми; ниже полагаем $\gamma < 4/3$.

Лагранжева система (1.5) в координатах (4.2) и времени τ_1

$$(4.3) \quad \frac{d\tau_1}{dt} = \left(\alpha V^{1-\gamma}(q) + \frac{3}{8} GMU(q) \right)^{1/2} Q^{-1/2} V(y_i)^{-1}$$

имеет следующий вид:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} p_i^* &= (1 - \gamma)(1 - u) \left(-\frac{\partial V}{\partial y_i} - \frac{1}{2} p_i W \right) + \\ &+ u \frac{V(y)}{U(y)} \left(\frac{\partial U}{\partial y_i} - \frac{1}{2} p_i W_1 \right) \\ y_i^* &= V(y) (p_i - y_i (p_k y_k)) \\ u^* &= u(1 - u) \left(\frac{V(y)}{U(y)} W_1 - (1 - \gamma) W \right) \\ W &= \frac{\partial V}{\partial y_k} p_k, \quad W_1 = \frac{\partial U}{\partial y_k} p_k \end{aligned}$$

(по повторяющимся индексам k производится суммирование). Ниже рассмотрим систему (4.4) при $E \leq 0$. Энергия E в координатах (4.2) имеет вид

$$(4.5) \quad \begin{aligned} E &= 3/8 GM \beta^m V(y)^{(1-\gamma)m} (U(y)/u)^{3(1-\gamma)m} (1-u)^{-m} (P + 1 - 2u) \\ m &= 1 / (4 - 3\gamma), \quad P = 1/2 (p_1^2 + \dots + p_n^2) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что область $E \leq 0$ (или $P + 1 - 2u \leq 0$) является ограниченным множеством.

Область S_1 , в которой определена система (4.4), в координатах (4.2) задается условиями $0 < u < 1$, $E \leq 0$, $V(y_i) > 0$ (точкам поверхности $V(q_i) = 0$, согласно (1.3), отвечает физическая особенность решения). Добавим к области S_1 границу Γ , состоящую из четырех компонент, которые определяются следующими условиями: Γ_0 : $u = 0$; Γ_1 : $u = 1$; Γ_2 :

$V(y_i) = 0$; $\Gamma_3: E = 0$. Обозначим через S многообразие, полученное в результате такого добавления границы (на S имеем $0 \leq u \leq 1$, $E \leq 0$, $V(y_i) \geq 0$). Очевидно, что система (4.4) непрерывно продолжается на компоненты границы Γ_0 , Γ_1 , Γ_3 . Используя простые свойства потенциала $U(q_i)$ (см. [2]), можно показать, что при $V(y_i) = \det \|Y_{jk}\| \rightarrow 0$ выражения $(V(y) / U(y)) \partial U(y) / \partial y_i \rightarrow 0$, поэтому на компоненте границы Γ_2 доопределяем эти выражения нулем — их предельным значением. В результате такого доопределения система (4.4) непрерывно продолжается на компоненту границы Γ_2 .

Можно проверить, что все компоненты границы Γ и их пересечения — инвариантные подмногообразия динамической системы (4.4) в S , т. е. траектория, начинающаяся на некоторой компоненте границы Γ , остается на ней все время. Система, определенная таким образом на компоненте границы Γ_0 ($u = 0$), тождественна системе, описывающей движение газового негравитирующего эллипсоида, а система, определенная на компоненте границы Γ_1 ($u = 1$), тождественна системе, описывающей движение пылевого гравитирующего эллипсоида. Таким образом, динамическая система (4.4) на многообразии S , описывающая движение гравитирующего газового эллипсоида, содержит в себе также и всю информацию об этих двух предельных видах движения.

2°. Все особые точки системы (4.4) на многообразии S при $E \leq 0$ и $\gamma < 4/3$ лежат на границе Γ и образуют четыре множества: L , Φ_+ , Φ_- , M .

1) Особые точки L ($u = 1$, $V(y_i) = 0$) — пересечение инвариантных подмногообразий Γ_1 ($u = 1$) и Γ_2 ($V(y_i) = 0$). Эти особые точки являются невырожденными (при $W \neq 0$) и неустойчивыми и имеют два ненулевых собственных числа (в скобках указаны направления соответствующих собственных векторов)

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \lambda_1 &= (1 - \gamma)W \quad (\text{переменная } u) \\ \lambda_2 &= W \quad (\text{переменные } y_i) \end{aligned}$$

Остальные $2n - 2$ нулевые собственные числа соответствуют направлениям, касающимся многообразия L . Знаки собственных чисел λ_1 и λ_2 ввиду $\gamma > 1$ противоположны, т. е. особые точки L — седловые.

Удобно разбить множество L на две части: L_+ ($W \geq 0$) и L_- ($W \leq 0$). Каждая особая точка L_+ имеет одну входящую сепаратрису, идущую по многообразию Γ_2 , и одну выходящую сепаратрису, идущую по многообразию Γ_1 , а точки L_- — наоборот.

2) Особые точки Φ_ε : ($u = 1$, $p_i = \varepsilon 2^{1/2} y_i$, $\varepsilon = \pm 1$, $y_i = Y_{jk} = 3^{-1/2} Q_{jk}$, Q_{jk} — ортогональная матрица). Вычисление собственных чисел системы (4.4) в особых точках Φ_ε показывает, что эти особые точки являются невырожденными и неустойчивыми. При этом каждая точка трехмерного множества Φ_- имеет четырехмерную входящую сепаратрису, образованную диагональными решениями со сферически симметричным характером сжатия, обобщающими точные сферически симметричные решения, и одиннадцатимерную выходящую сепаратрису (лежащую на границе Γ_1 на нулевом уровне энергии). Ввиду этого сферически симметричное сжатие является неустойчивым. Свойства особых точек Φ_+ тождественно

венны свойствам особых точек Φ_- при противоположном направлении времени.

3) Вырожденные особые точки M : $V(y_i) = 0$, $\partial V / \partial y_i = 0$; p_i , u произвольны. В этих особых точках матрица $\|Y_{jk}\|$ двукратно вырождена.

Таким образом, у системы (4.4) при $E \leq 0$, $\gamma < 4/3$ нет устойчивых особых точек; это одна из причин существования колебательного режима.

3°. Как отмечалось выше, сепаратрисы особых точек L_+ , L_- лежат на инвариантных многообразиях Γ_1 и Γ_2 . Рассмотрим систему (4.4) на этих многообразиях.

1) Система (4.4) на многообразии Γ_1 ($u = 1$) описывает движение пылевого гравитирующего эллипсоида. Этот вид движения изучался в работе [10], где, в частности, показано, что вдоль каждого решения с отрицательной энергией E объем эллипсоида $V(F)$ дважды обращается в нуль, т. е. расширение из сжатого состояния сменяется сжатием. При этом для почти всех решений эллипсоид в начальном и конечном состоянии сжат в диск, т. е. $d_1 = 0$, $d_2 \neq 0$, $d_3 \neq 0$. В координатах (4.2) этот результат означает, что почти все траектории системы (4.4) на многообразии Γ_1 при $E < 0$ имеют начало и конец на многообразии особых точек L ($V(y_i) = 0$, $u = 1$) или для почти каждой особой точки L_+ выходящая из нее сепаратриса идет в некоторую особую точку L_- .

2) Систему (4.4) на многообразии Γ_2 ($V(y_i) = 0$) можно проинтегрировать явно. Траектории этой системы во времени τ , определенном выражением $d\tau = 2^{1/2}(\gamma - 1)(1 - u) |\text{grad } V(y_i^\circ)| d\tau_1$, даются формулами

$$(4.7) \quad \begin{aligned} y_i &= y_i^\circ, \quad p_i = (2^{1/2}s_i (\sin \tau - \sin \tau_0) + p_i^\circ \cos \tau_0) / \cos \tau \\ u &= \cos^2 \tau_0 / \cos^2 \tau \\ s_i &= \text{grad } V(y_i^\circ) / |\text{grad } V(y_i^\circ)|; \quad y_i^\circ, \tau_0, p_i^\circ = \text{const}, \\ V(y_i^\circ) &= 0 \\ \sum_{k=1}^n p_k^\circ s_k &= 2^{1/2} \text{tg } \tau_0 < 0, \quad |\tau_0| < \frac{\pi}{2}, \quad \sum_{k=1}^n p_k s_k = 2^{1/2} \text{tg } \tau \end{aligned}$$

Траектория (4.7) определена при $\tau_0 < \tau < -\tau_0$ и идет из особой точки $(p_i^\circ, y_i^\circ, u = 1)$, принадлежащей L_- , в особую точку $(p_i^1 = p_i(-\tau_0), y_i^\circ, u = 1)$, принадлежащую L_+ (следовательно, все траектории (4.7) — сепаратрисы особых точек L_- и L_+). Легко видеть, что конечная точка траектории (4.7) ($p_i^1 = p_i(-\tau_0)$) получается из начальной точки (p_i°) путем отражения ее в плоскости, касательной к поверхности $V(y_i) = 0$ в точке (y_i°) .

Полученные результаты приводят к следующей сепаратрисной диаграмме:

$$(4.8) \quad \dots \xrightarrow{\text{II}} L_+ \xrightarrow{\text{I}} L_- \xrightarrow{\text{II}} L_+ \xrightarrow{\text{I}} \dots$$

Здесь показанные стрелками отображения означают переход по сепаратрисе из ее начальной точки в конечную. Отображения I и II осуществляются сепаратрисами, идущими по многообразиям Γ_1 и Γ_2 соответственно.

Сепаратрисные переходы между множествами L_+ , L_- и Φ_ϵ , M не показаны в диаграмме (4.8) ввиду того, что для почти всех особых точек L_+ , L_- вся бесконечная последовательность отображений (4.8) не выводит за пределы множеств L_+ , L_- .

5. Вывод колебательного режима движения эллипсоида при $E < 0$. Бесконечная последовательность сепаратрис, определенная диаграммой (4.8), является аппроксимацией траекторий системы (4.4) при большой отрицательной энергии E , а также при $\beta = 8\alpha / (3GM) \rightarrow 0$. Действительно, функция E (см. (4.5)) ограничена снизу на многообразии S везде, кроме компонент границы Γ_1 ($u = 1$) и Γ_2 ($V(y_i) = 0$), где $E \rightarrow -\infty$. Поэтому траектории системы (4.4) с большой отрицательной энергией E все время остаются в малой окрестности многообразий Γ_1 и Γ_2 (это же верно и при любых $E < 0$, но $\beta \rightarrow 0$, см. (4.2), определение координаты u). Следовательно, эти траектории движутся вдоль траекторий системы (4.4) на многообразиях Γ_1 и Γ_2 , т. е. общая траектория системы (4.4) движется вдоль последовательности сепаратрис особых точек L_+ , L_- .

Полученная аппроксимация траекторий системы (4.4) последовательностью сепаратрис (4.8) доказывает, что общее движение гравитирующего газового эллипсоида с большой отрицательной энергией E или с малым параметром β имеет пульсирующий, колебательный характер. Действительно, согласно аппроксимации (4.8), траектория периодически оказывается в окрестности особых точек L_+ , L_- , где $\det Y_{jk} = V(y_i) = 0$, т. е. эллипсоид периодически оказывается сжатым в диск. Кроме этого, из уравнения

$$(5.1) \quad dV(q_i) / d\tau_1 = V(q_i)W$$

следует, что объем эллипсоида $V(q_i)$ при движении траектории системы (4.4) вдоль сепаратрисного перехода I достигает максимума, а при движении траектории вдоль сепаратрисного перехода II (см. (4.8)) достигает минимума. Следовательно, изменение плотности $\rho(t)$ (1.3) газа, заполняющего эллипсоид, также имеет колебательный характер. Период каждой пульсации эллипсоида в силу соотношения (см. (4.3), (4.5))

$$dt = d\tau_1 |E|^{-3/2} \beta^{-1} \alpha^l U(y)V(y)u^{-1} |P + 1 - 2u|^{3/2}, \quad l = (2 - \gamma)/(1 - \gamma)$$

при $E \rightarrow -\infty$ становится сколь угодно малым.

Описанное пульсирующее движение эллипсоида при $E \rightarrow -\infty$ происходит в состоянии сильного сжатия, поскольку величина (см. (4.2))

$$(5.2) \quad d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = Q = \beta^{-2m} (U(y)(1-u)/u)^{2m} V(y)^{2m(\gamma-1)}$$

стремится к нулю при $E \rightarrow -\infty$ (т. е. или $V(y) \rightarrow 0$, или $u \rightarrow 1$). Отметим, однако, что при наличии вращения газа эллипсоид не может сжаться меньше определенного размера. Как известно [7], лагранжевы системы типа (1.5) имеют первые интегралы J и K (связанные с полным моментом количества движения газа и вихрем)

$$(5.3) \quad J = \underline{F} \cdot \underline{F}^t - \underline{F}^* \cdot \underline{F}^t, \quad K = \underline{F}^t \cdot \underline{F}^* - \underline{F}^{*t} \cdot \underline{F}$$

Можно показать, что при $E \leq 0$, $C \neq 0$, $C = \max \{ |J|, |K| \}$ справедливы неравенства

$$A^2 B^s / \ln B < d_i < (\beta (\gamma - 1))^{-m}$$

$$A = \frac{2}{3} C ((\gamma - 1) / GM)^{1/2}, \quad B = D / 2 \ln D$$

$$D = A (\beta (\gamma - 1))^{m/2}, \quad m = 1 / (4 - 3\gamma), \quad s = 2 / (\gamma - 1)$$

Сепаратрисная аппроксимация (4.8) означает, что движение траекторий системы (4.4) в координатах y_i асимптотически при $E \rightarrow -\infty$ или при $\beta \rightarrow 0$ происходит следующим образом:

1) В области $V(y_i) > 0$ движение происходит по траекториям, соответствующим пылевому гравитирующему эллипсоиду. Такая траектория в общем случае пересекается с поверхностью $V(y_i) = 0$ в некоторой точке y_i° (переход I).

2) В точке пересечения траектория упруго отражается от поверхности $V(y_i) = 0$ (переход II, см. (4.8)).

3) Затем движение снова происходит по траектории, соответствующей пылевому гравитирующему эллипсоиду до следующего пересечения с поверхностью $V(y_i) = 0$ и т. д.

Таким образом, можно сказать, что моделью колебательного режима движения гравитирующего газового эллипсоида является многомерный бильярд в области $\det \| Y_{jk} \| = V(y_i) \geq 0$ на восьмимерной сфере S^8 ($\text{Tr}(Y_0 Y^0) = y_1^2 + \dots + y_8^2 = 1$) с упруго отражающей границей $\det \| Y_{jk} \| = 0$. Причем между соударениями с границей точка движется по траекториям, описывающим движение пылевого гравитирующего эллипсоида. Наличие гидродинамического давления проявляется в свойстве упругого отражения траектории от границы $\det \| Y_{jk} \| = 0$.

Замечание. В силу того, что система (4.4) на многообразиях Γ_1 и Γ_2 не зависит от γ , при $\gamma > 4/3$ также существует колебательный режим движения эллипсоида, аппроксимируемый сепаратрисной диаграммой (4.8). Однако физическое содержание этого колебательного режима совершенно другое. Действительно, функция E при $\gamma > 4/3$ в окрестности многообразий Γ_1 и Γ_2 , согласно (4.5), близка к нулю, а величина $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2$, в силу (5.2), неограниченно велика. Поэтому в колебательном режиме при $E < 0$, $\gamma > 4/3$ эллипсоид обладает малой энергией и газ находится в сильно разреженном состоянии, при этом период каждого колебания при $E \rightarrow 0$ становится сколь угодно большим.

6. *Приложение.* Аналогом задачи о расширении газового эллипсоида в вакуум в двумерной гидродинамике является задача о растекании вращающегося жидкого эллипса в теории мелкой воды (в этом случае $\gamma = 2$). Эта задача проинтегрирована в квадратурах в работе [8]. Покажем, что в этой задаче также реализуется колебательный режим, аналогичный описанному в п. 2.

В пространстве двумерных матриц F_{ij} введем координаты $r, \varphi, \varphi_1, \varphi_2$

$$\begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} r \cos \varphi & 0 \\ 0 & r \sin \varphi \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \\ \sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 \end{vmatrix}$$

Лагранжева система, аналогичная системе (1.5), в двумерной задаче имеет лагранжиан ($\sigma = +1$)

$$(6.1) \quad L = 1/2 (r^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 + (\varphi_1^2 + \varphi_2^2) r^2 + 2\varphi_1 \varphi_2 r^2 \sin 2\varphi) - 2\sigma (r^2 \sin 2\varphi)^{-1}$$

Циклическим координатам φ_1, φ_2 отвечают сохраняющиеся импульсы $p_{\varphi_1} = \partial L / \partial \dot{\varphi}_1 = J$ и $p_{\varphi_2} = \partial L / \partial \dot{\varphi}_2 = K$, совпадающие с интегралами (5.3).

Лагранжева система с лагранжианом (6.1) в фазовых координатах $p_r = \partial L / \partial \dot{r}$, $p_\varphi = \partial L / \partial \dot{\varphi}$, r, φ переходит в гамильтонову систему с гамильтонианом

$$(6.2) \quad H = 1/2 p_r^2 + (1/2 p_\varphi^2 + U(\varphi)) / r^2$$

$$U(\varphi) = \frac{1/2 J^2 + K^2 + 2JK \sin 2\varphi}{2 \cos^2 2\varphi} + \frac{2\sigma}{\sin 2\varphi}$$

Эта система после замены координат $r = 1/x$ и замены времени $dt = r^2 d\tau$ распадается на две гамильтоновы системы с гамильтонианами

$$(6.3) \quad H = -1/2 p_r^2 - x^2 H_0, \quad H_0 = 1/2 p_\varphi^2 + U(\varphi)$$

Из (6.2) следует, что (при $\sigma = +1$ и $J \neq -K$) $U(\varphi) \rightarrow \infty$ при $\varphi \rightarrow 0, \pi/4$. Таким образом, угол φ колеблется в потенциальной яме, определенной потенциалом $U(\varphi)$ (показан на фигуре сплошной линией). Колебания угла φ обуславливают изменение соотношения полуосей эллипса $d_1 = r \cos \varphi, d_2 = r \sin \varphi$ и являются отражением общего колебательного режима, рассмотренного п. 2.

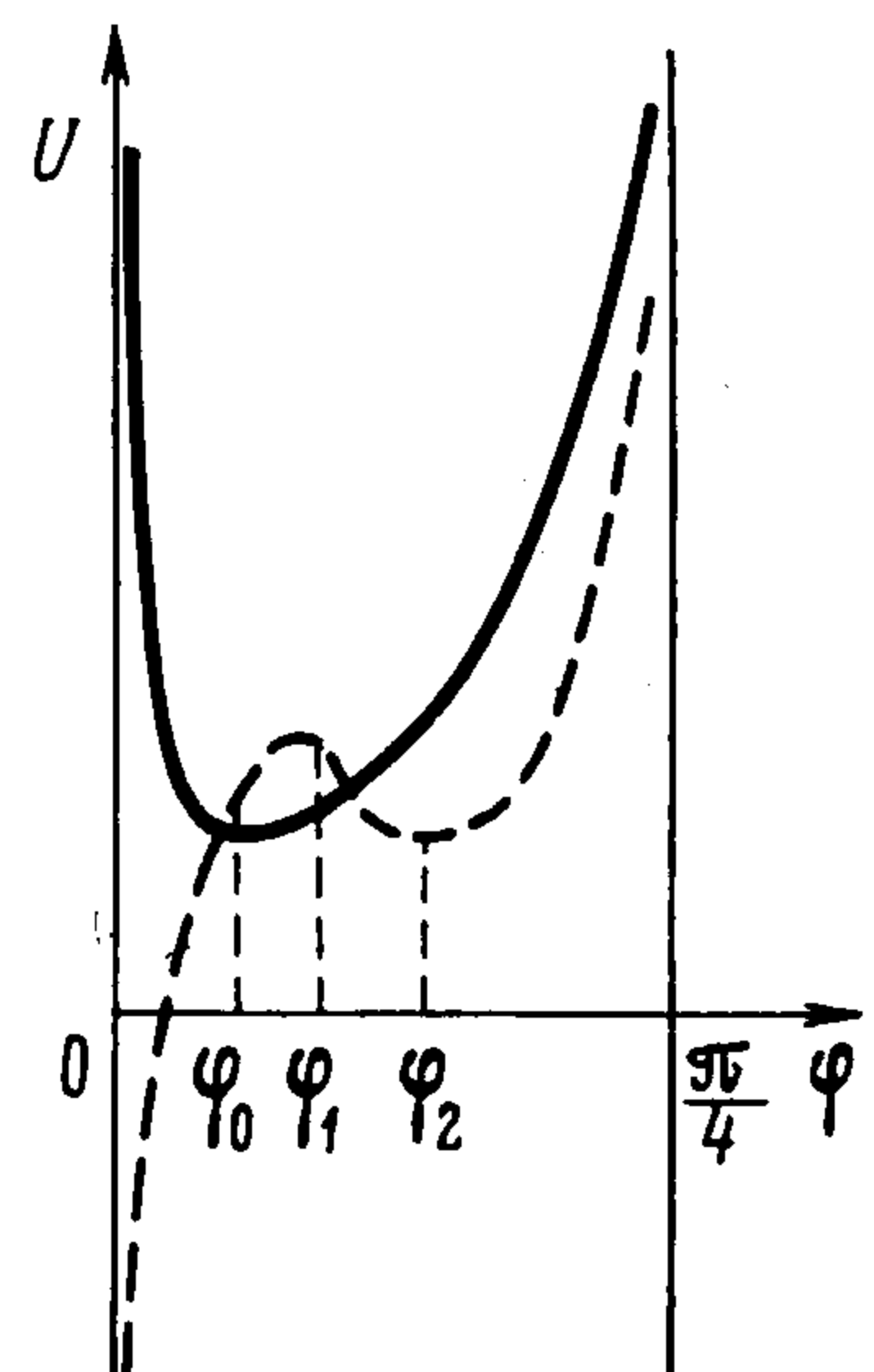
Оценим число малых колебаний угла φ вблизи положения равновесия φ_0 ($\partial U / \partial \varphi(\varphi_0) = 0$) за все время T существования решения. За время T координата x изменяется от нуля ($r^2 = d_1^2 + d_2^2 = \infty$) до максимума $x_* = |H|^{1/2} |H_0|^{-1/2}$ и снова до нуля. Отсюда время $T = \pi (2H_0)^{-1/2}$. Период T_φ малых колебаний угла φ , как известно, равен $T_\varphi \approx 2\pi (U''(\varphi_0))^{-1/2}$. Вычисления показывают, что при $J \approx \approx K \gg 1$ корень уравнения $\partial U / \partial \varphi = 0$ равен $\varphi_0 \approx (2JK)^{-1/2}$. В этой точке

$$H_0 \approx U(\varphi_0) \approx 1/2 (J^2 + K^2), \quad U''(\varphi_0) \approx 4 (2JK)^{3/2}$$

Отсюда $T = \pi (J^2 + K^2)^{-1/2}$, $T_\varphi = \pi (2JK)^{-3/4}$. Число колебаний $N = T / T_\varphi$, следовательно, при $J \approx K \rightarrow \infty$ число колебаний N становится сколь угодно большим и растет как $J^{1/2}$. Нетрудно показать, что малые колебания угла φ с амплитудой $\sim \varphi_0^{3/2} \ll \varphi_0$ обуславливают колебания величины $\sin 2\varphi / 2x^2 = V(F)$.

Рассмотрим кратко двумерную задачу, аналогичную задаче о сжатии [капли под давлением [18]]. Лагранжиан L для этой задачи имеет вид (6.1), где $\sigma = -1$. Потенциал $U(\varphi) \rightarrow -\infty$ при $\varphi \rightarrow 0$ и $U(\varphi) \rightarrow \infty$ при $\varphi \rightarrow \pi/4$ (см. фигуру, пунктир). При $J \approx -K \gg 1, J \neq -K$ потенциал $U(\varphi)$ при $0 < \varphi < \pi/4$ имеет два экстремума: максимум φ_1 и минимум φ_2 , при этом $U(\varphi_2) > 0$. Решения, в которых угол φ колеблется в окрестности минимума φ_2 , не имеют физических особенностей — в них сжатие из разреженного состояния сменяется расширением. Аналогичных решений трехмерной задачи [18], по-видимому, не существует.

Отметим, что бесконечно высокий барьер потенциала $U(\varphi)$ при $\varphi = \pi/4$ имеет следующее чисто геометрическое происхождение. В четырехмерном пространстве матриц F_{ij} множество матриц с $d_1 = d_2$ имеет размерность два. Поэтому для почти всех траекторий лагранжевой системы (6.1) во все моменты времени $d_1 \neq d_2$, следовательно, почти все траектории гамильтоновой системы (6.3) не пересекают поверхность $\varphi = \pi/4$, а это возможно лишь при наличии бесконечного потенциального барьера. По тем же причинам в трехмерной задаче отношение порядка между полуосями эллипсоида $d_1 < d_2 < d_3$ сохраняется для почти всех движений газа во все моменты времени.



ЛИТЕРАТУРА

1. Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. М., «Мир», 1973.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л., Гостехиздат, 1947.
3. Dirichlet G. L. Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik. J. reine und angew. Math., 1860, vol. 58. No. 1, p. 181—216.
4. Rossner L. F. The finite-amplitude oscillation of the Maclaurin Spheroids. Astrophys. J. 1967, vol. 149, No. 1, p. 145—169.
5. Седов Л. И. Об интегрировании уравнений одномерного движения газа. Докл. АН СССР, 1953, т. 40, № 5.
6. Овсянников Л. В. Новое решение уравнений гидродинамики. Докл. АН СССР 1957, т. 3, № 1.
7. Dyson J. F. Dynamics of spinning gas cloud. J. Math. Mech., 1968, vol. 18, No. 1, p. 91—101.
8. Анисимов С. И., Лысков Ю. И. О расширении газового облака в вакуум. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
9. Lynden-Bell D. On the gravitational collapse of a cold rotating gas cloud. Proc. Cambridge Phys. Soc., 1962, vol. 58; No. 4, p. 709—711.
10. Зельдович Я. Б. Ньютоновское и эйнштейновское движение однородного вещества. Астрон. ж., 1964, т. 41, № 5.
11. Невзглядов В. Г. Теория тела однородной деформации и ее применение к атомному ядру. Владивосток, Изд-во ДГУ, 1970.
12. Станюкович К. П. Автомодельные движения газа в поле тяжести. Докл. АН СССР, 1949, т. 64, № 4.
13. Росселанд С. Теория пульсаций переменных звезд. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
14. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1958.
15. Лидов М. Л. Точные решения уравнений одномерных неустановившихся движений газа с учетом сил ньютоновского тяготения. Докл. АН СССР, 1954, т. 97, № 3.
16. Fujimoto M. Gravitational collapse of rotating gaseous ellipsoids. Astrophys. J., 1968, vol. 152, No. 2, p. 523—537.
17. Hara T., Matsuda T., Nakazawa K. Dynamical contraction of rotating gaseous spheroids. Progr. Theoret. Phys., 1973, vol. 49, No. 2, p. 460—479.
18. Анисимов С. И., Иногамов Н. А. Развитие неустойчивости и потеря симметрии при изэнтропическом сжатии сферической капли. Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, № 3.