Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.31 : 534

КВАЗИНОРМАЛЬНЫЕ И НОРМАЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНСЕРВАТИВНЫХ СИСТЕМАХ

М. А. Пинский

(Днепропетровск)

В консервативных многомерных системах выделяются специальные типы периодических решений в унисон — квазинормальные колебания, подобные колебаниям осциллятора. Предлагается новое определение нормальных колебаний, уточняющее известное и применимое к более широкому классу нелинейных систем. Для специальных типов нелинейных систем излагается способ приближенного отыскания квазинормальных колебаний. Приводятся примеры.

В работах [1, 2] было высказано предположение, что у класса нелинейных консервативных систем вида $x^{\cdot\cdot}_i = \partial U / \partial x_i$, $U(0) = 0$, $U(-x) = U(x)$, $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ могут существовать своеобразные аналоги собственных решений или, как часто говорят, нормальных колебаний. Постулировалось, что нормальные колебания определяются следующими характерными свойствами: частоты колебаний всех координат равны между собой, все координаты одновременно достигают максимального отклонения и одновременно обращаются в нуль, смещение координат в любой момент времени является однозначной функцией одной из них.

Основанное на физических соображениях приведенное выше определение нормальных колебаний обладает следующими недостатками: характерные свойства нормальных колебаний неинвариантны при изменении системы координат, взаимозависимы, охватывают узкий класс нелинейных систем и не позволяют сформулировать задачу отыскания нормальных колебаний.

В данной статье обобщается понятие нормальных колебаний нелинейных систем, приводится новое определение собственно нормальных колебаний и излагается алгоритм отыскания квазинормальных колебаний для практически интересного класса сильно нелинейных систем.

1. Квазинормальные колебания. Рассмотрим консервативную систему с лагранжианом $L = L(x, x^{\cdot})$, $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$, непрерывным по совокупности аргументов и обладающим непрерывными частными производными до третьего порядка включительно. Предположим, что

$$\det\left(\frac{\partial p_i}{\partial x_j^{\cdot}}\right) \neq 0 \quad (p_i = L_{x_i^{\cdot}}), \quad i, j = 1, \ldots, n \tag{1.1}$$

Дополнительные ограничения, которые удобно формулировать для гамильтониана $H = H(x, p)$, приведены ниже.

Уравнения движения

$$p_i^{\cdot} = L_{x_i} \tag{1.2}$$

являются экстремалями функционала

$$(1.3) \qquad \int\limits_{x(t_0)}^{x(t_1)} L dt$$

вариация которого состоит из двух частей: интеграла, распространенного на данный интервал, и граничного члена

$$\delta \int\limits_{x(t_0)}^{x(t_1)} L dt = \int\limits_{x(t_0)}^{x(t_1)} \sum_{i=1}^{n} (p_i^{\cdot} - L_{x_i}) h_i(t)\, dt + \sum_{i=1}^{n} p_i \delta x_i \Big|_{t_0}^{t_1}$$

В задачах теории колебаний обычно предполагается, что варьирование происходит при фиксированных граничных условиях, при этом $\delta x_i = 0$. Вместе с тем граничные условия, определяющие периодические решения, в частности нормальные колебания, априорно неизвестны. В [1] выделение нормальных колебаний в нелинейных системах основывалось на заимствовании некоторых свойств траекторий в целом, специфичных для нормальных колебаний линейных систем. Иная возможность обобщения этого понятия заключается в соответствующем выборе пределов интегрирования в (1.3).

Определение 1. Квазинормальными колебаниями назовем решения уравнений Лагранжа, удовлетворяющие естественным граничным условиям

$$p_i \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

Одновременное обращение в нуль обобщенных импульсов в два несовпадающих момента времени является математическим выражением интуитивного представления о движении в унисон. В линейных системах квазинормальные колебания совпадают с нормальными, если все собственные частоты несоизмеримы, в противном случае квазинормальные колебания образуют параметрическое семейство, включающее собственно нормальные одночастотные колебания.

Установим некоторые свойства квазинормальных колебаний.

Интеграл энергии $H(x, p) = h$ определяет поверхность m в фазовом пространстве $\Phi \ni (x, p)$. Обозначим через M поверхность в пространстве конфигураций $E \ni (x, 0)$, определяемую соотношением $H(x, 0) = h$. Предположим, что ограничиваемые поверхностями m и M множества m^* и M^* компактны и связны. Следующее утверждение, справедливость которого вытекает из простых геометрических соображений, используется ниже.

Утверждение 1. Если ортогональная проекция m^* на E принадлежит M^*, то любая траектория динамической системы принадлежит M^*.

Под траекторией здесь и далее понимается проекция фазовой траектории на область пространства конфигураций E.

Консервативные системы, гамильтониан которых удовлетворяет указанным выше требованиям, широко распространены. В качестве возможного примера приведем систему с гамильтонианом $H = U(x) + T(x, p)$, $T > 0$ при $p \neq 0$ и $T = 0$ при $p = 0$. Динамические системы такого типа обобщают системы, рассмотренные ранее в [1].

Условие $p_i(t_0) = 0$ эквивалентно следующему условию: экстремаль функционала (1.3) в некоторый момент времени t_0 пересекает поверхность

M. Следовательно, в точке пересечения экстремали с поверхностью M должны выполняться условия трансверсальности. Сформулируем это свойство траекторий в виде утверждения.

Утверждение 2. Нормированный вектор обобщенных импульсов ортогонален к поверхности M, т. е.

$$\lim \frac{p_i}{p_1} = \lim \frac{H_{x_i}}{H_{x_1}}, \quad p_i \to 0 \tag{1.4}$$

Соотношение (1.4) можно установить, не опираясь на вариационный формализм, распространив его на системы более общего вида

$$p_i^{\cdot}(x, x^{\cdot}, t) = L_{x_i}(x, x^{\cdot}, t) + Q_i(x, x^{\cdot}, t)$$

Применяя правило Лопиталя, запишем

$$\lim \frac{p_i}{p_1} = \lim \frac{p_i^{\cdot}}{p_1^{\cdot}} = \lim \frac{L_{x_i} + Q_i}{L_{x_1} + Q_1}, \quad p_i \to 0 \tag{1.5}$$

При $Q_i = 0$ формула (1.5) приводится к формуле (1.4). Действительно, учитывая, что в силу (1.1) соотношения $p_i = L_{x_i^{\cdot}}$ однозначно разрешимы относительно $x_i^{\cdot}$ и $L = \Sigma p_i x_i^{\cdot} - H$, получим, меняя местами операции дифференцирования и предельного перехода, равенство правых частей в формулах (1.4) и (1.5).

Следствие. Траектории динамической системы не пересекаются на поверхности M.

Следствие вытекает из утверждения 2 и условий гладкости L, обусловливающих однозначность grad H.

Утверждение 3. Квазинормальные колебания являются периодическими решениями, траектории которых пересекают M в двух несовпадающих точках.

Предположим противное. Пусть t_0, t_1 $(t_0 < t_1)$ — последовательные моменты времени, в которые квазинормальная траектория, целиком принадлежащая области M^* (утверждение 1), пересекает ее границу M. В силу предположения, t_1 — точка излома квазинормальной траектории, что противоречит следствию.

По аналогии с линейными системами движения многомерной консервативной нелинейной системы по каждой квазинормальной траектории можно интерпретировать как колебания осциллятора.

Предположим для простоты, что E — евклидово, т. е. $p = x^{\cdot}$. Выбрав направление обхода, определим метрику на кривой в E как расстояние от какой-либо точки кривой (начала отсчета) до текущей точки.

Утверждение 4. Только квазинормальная траектория гомеоморфна замкнутому отрезку в топологии, индуцированной метрикой на кривой.

Гомеоморфность квазинормальной траектории отрезку очевидна. Траектория периодического неквазинормального решения (в силу того, что равенства $x_i^{\cdot} = 0$ не выполняются одновременно) должна быть замкнутой кривой в E, которая, как известно, негомеоморфна отрезку; траектория непериодического решения некомпактна и также негомеоморфна замкнутому отрезку.

Интуитивно понятно, что колебания осциллятора отличаются от других движений, например вращений, следующими свойствами: колебательное движение периодично, в амплитудных точках скорость обращается в нуль. Эти свойства эквивалентны одному условию: траектория колебательного режима гомеоморфна замкнутому отрезку. Следовательно, только квазинормальные колебания в многомерных консервативных системах можно интерпретировать как колебания осциллятора. Вместе с тем в нелинейных системах преобразованием координат не удается отделить одно или несколько уравнений (соответствующих движению по квазинормальным траекториям), несвязанных с остальными.

Проиллюстрируем утверждение 4 простым примером, полученные формулы будут использованы ниже. Нетрудно убедиться, что если отношения собственных частот линейной системы $\omega_i / \omega_1 = l_i$ — целые числа, то траектория движения определяется формулой

$$x_j = a_j \left[T_{l_j}\left(\frac{x_1}{a_1}\right)\cos\varphi_j + \sqrt{1 - T_{l_j}^2\left(\frac{x_1}{a_1}\right)}\sin\varphi_j\right], \qquad j = 2, 3, \ldots, n \tag{1.6}$$

Здесь T_{l_j} — полином Чебышева первого рода, a_j — амплитуды, φ_j — фазы i-го нормального колебания. Подставляя (1.6) в интеграл энергии

$$\sum_{j=1}^{n} (x_j'^2 + l_j^2\omega_1^2 x_j^2) = 2h$$

получим

$$x_1'^2 \left\{1 + \sum_{j=2}^{n}\left[T'_{l_j}\cos\varphi_j + (T_{l_j}T'_{l_j}\sin\varphi_j)/\sqrt{1 - T_{l_j}^2}\right]^2\right\}\frac{a_j^2}{a_1^2} + Q(x_1) = 2h \tag{1.7}$$

Соотношение (1.7) можно рассматривать как интеграл энергии эквивалентного нелинейного осциллятора с переменной массой. При $x_1 \to a_1$ «масса» эквивалентного осциллятора остается ограниченной лишь для квазинормального колебания (т. е. если $\varphi_i = \pm k\pi$, $k = 1, 2, \ldots$).

Для упрощения уравнений движения и отыскания квазинормальных колебаний можно использовать методы теории групп. Важную роль при этом играют многообразия, инвариантные относительно конечных и непрерывных групп, допускаемых уравнениями движения.

Пусть задана конечная группа преобразований $G \supset g_i$. Обозначим через S_{g_i} представление G в E ($S_{g_i}(x) = x^*$, $x, x^* \in E$). Инвариантное многообразие группы G в E определяется уравнениями

$$\operatorname{inv} E_G\colon\ S_{g_i}(x) = x, \qquad g_i \subset G$$

Утверждение 5. Если L инвариантна относительно конечной группы преобразований координат, то инвариантное многообразие группы является интегральным многообразием системы (1.2).

Доказательство. Предположим для простоты, что функции S_{g_i} непрерывно дифференцируемы и инвариантное многообразие имеет общий ранг, равный N.

Покажем, что размерность системы уравнений Лагранжа, спроектированной на $\operatorname{inv} E_G$, равна N. Выполним невырожденное преобразование координат $\{x_1, \ldots, x_n\} \to \{U_1, \ldots, U_N, V_{N+1}, \ldots, V_n\}$ так, чтобы координатные кривые U_i принадлежали inv E_G, а V_i пересекали inv E_G не более чем в одной точке. Невырожденные преобразования S_{g_i} в новых координатах запишутся так:

$$S_{g_i}^{(1)}(U) = U^*, \quad S_{g_i}^{(2)}(U, V) = V^*, \quad U, V, U^*, V^* \in E \tag{1.8}$$

Дифференцируя эти равенства, получаем формулы преобразования производных

$$\sum_{j=1}^{N} \frac{\partial S_{g_i}^{(1)}}{\partial U_j} U_j^{\cdot} = U^{\cdot *}, \quad \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial S_{g_i}^{(2)}}{\partial U_j} U_j^{\cdot} + \sum_{j=N+1}^{n} \frac{\partial S_{g_i}^{(2)}}{\partial V_j} V_j^{\cdot} = V^{\cdot *} \tag{1.9}$$

Из определения инвариантного многообразия группы следует

$$S_{g_i^{(2)}}(U, 0) \equiv 0 \tag{1.10}$$

Условие инвариантности имеет вид

$$L(U, V, U^{\cdot}, V^{\cdot}) = L(U^*, V^*, U^{\cdot *}, V^{\cdot *})$$

Вычислив производные из обеих частей этого тождества

$$\frac{\partial L}{\partial V} = \frac{\partial L}{\partial V^*}\frac{\partial V^*}{\partial V} + \frac{\partial L}{\partial V^{\cdot *}}\frac{\partial V^{\cdot *}}{\partial V}, \qquad \frac{\partial L}{\partial V^{\cdot}} = \frac{\partial L}{\partial V^{\cdot *}}\frac{\partial V^{\cdot *}}{\partial V^{\cdot}}$$

получим в соответствии с формулами (1.8) — (1.10), что $\partial L / \partial V = 0$, $\partial L / \partial V^{\cdot} = 0$ при $V = 0$ и $V^{\cdot} = 0$.

Утверждение 5 — аналог теоремы Нетер для конечных групп — остается справедливым, если инвариантное многообразие вырождается в точку, что имеет место, например, при инверсии координат.

Для отыскания возможно более полного набора интегральных многообразий следует определить многообразия, инвариантные относительно всех подгрупп группы G.

Утверждение 6. Если L инвариантна относительно группы G, то множество квазинормальных колебаний также инвариантно относительно G.

Действительно, из инвариантности L следует инвариантность уравнений движения и граничных условий ($p_i = 0$), определяющих квазинормальные колебания.

Следствие. Если L инвариантна относительно инверсии координат, то семейство квазинормальных колебаний также инвариантно относительно инверсии.

Тем не менее, отдельная квазинормальная и, как отмечено ниже, нормальная траектория могут быть неинвариантны относительно инверсии и не проходить через центр инверсии. Соответствующий пример приведен в п. 3. Если квазинормальная траектория не проходит через центр инверсии, то найдется еще одна квазинормальная траектория, сопряженная с первой относительно центра инверсии и имеющая, следовательно, такую же длину.

Приведенное определение квазинормальных колебаний позволяет использовать для отыскания этих режимов численные методы решения нелинейных краевых задач. В качестве начального приближения можно взять точные решения, которые удается получить для систем, допускающих достаточно широкую группу преобразований — конечную или непрерывную.

2. Нормальные колебания. Для нелинейных систем, так же как и для линейных, выделение собственно нормальных колебаний из квазинормальных целесообразно, если последние образуют параметрическое семейство По аналогии с линейными прямолинейность траектории можно принять в качестве характерного признака для нормальных колебаний нелинейных систем.

При движении изображающей точки по прямолинейной траектории условие (1.5) должно выполняться во всех точках траектории. Этот факт можно использовать для отыскания прямолинейных нормальных траекторий. Подставляя соотношения $x_i = \alpha_i x_1 + \beta_i$ и $x_i^{\bullet} = \alpha_i x_1^{\bullet}$ в (1.5), получаем систему уравнений относительно α_i и β_i, которая должна удовлетворяться тождественно по x_1 и $x_1^{\bullet}$. Если L аналитична по совокупности аргументов, то функции x_1 и $x_1^{\bullet}$ могут быть исключены обращением в нуль коэффициентов при всех степенях x_1 и $x_1^{\bullet}$. Составленная таким образом система уравнений оказывается совместной лишь при весьма специальных L и Q. Вместе с тем в некоторых задачах, представляющих интерес для изучения, нормальные траектории прямолинейны и модальные константы α_i и β_i удается определить таким способом.

Поскольку применение признака прямолинейности траектории ограничено, для выделения нормальных решений необходимо использовать более глубокие свойства. Можно убедиться, что нормальные траектории линейных систем имеют локальный минимум длины в семействе траекторий, пересекающих M. Аналогичное свойство используем для определения нормальных колебаний в нелинейных системах.

Определение 2. Нормальной назовем траекторию, имеющую локальный минимум длины в семействе траекторий, пересекающих поверхность M.

Дифференциал длины дуги траектории примем в виде $ds = \sqrt{\Sigma p_i x_i^{\bullet}} dt$. Определенные таким образом нормальные колебания являются подклассом квазинормальных. Действительно, среди решений, пересекающих H, только квазинормальные траектории имеют конечную длину, следовательно, нормальная траектория совпадает с одной из квазинормальных.

Предполагая E евклидовым, покажем, что прямолинейные траектории (если они существуют) являются нормальными. С этой целью рассмотрим функционал

$$(2.1) \qquad s = \int \sqrt{\sum x_i^{\bullet 2}}\, dt$$

на множестве непрерывных кривых с кусочно-непрерывной производной, концы которых лежат на поверхности M. Экстремали этого функционала — прямые линии, ортогонально пересекающие поверхность M. Среди этих прямых содержатся и прямолинейные траектории, ортогональные к M. Таким образом, решения с прямолинейными траекториями доставляют экстремум функционалу (2.1) в множестве кривых, содержащих семейство квазинормальных траекторий, следовательно, они доставляют экстремум функционалу (2.1) и в семействе квазинормальных траекторий. Очевидно, этот экстремум является минимумом.

Поскольку квазинормальные и нормальные колебания были определены неявным образом, покажем, что соответствующие решения существуют. Доказательство основано на теореме о минимуме полунепрерывного снизу функционала.

Поскольку все траектории принадлежат компактной области M^*, рассмотрим функционал (1.3) на множестве непрерывных с кусочно-непрерывной производной спрямляемых кривых, принадлежащих M^*, концы которых лежат на M. Достаточно показать, что функционал (1.3) в описанном множестве кривых достигает абсолютного минимума. Последнее, как известно [3–5], имеет место, если L неотрицателен и $\det |\partial p_i / \partial x_j^{\cdot}| > 0$ на кривых определения функционала (1.3). В обычных задачах механики L — разность двух ограниченных величин кинетической и потенциальной энергии — является ограниченной величиной. Уравнения движения не изменяются от прибавления к L постоянной величины, поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что $L > 0$.

Утверждение 7. Если p_i непрерывны и дважды непрерывно дифференцируемы, $L > 0$, $\det |\partial p_i / \partial x_j^{\cdot}| > 0$, то функционал (1.3) в описанном множестве кривых достигает абсолютного минимума на квазинормальной траектории.

Допустим, что квазинормальные решения образуют параметрическое семейство, функция

$$\sqrt{\sum p_i x_i^{\cdot}} = Q$$

неотрицательна и $\det |\partial^2 Q / \partial x_i^{\cdot} \partial x_j^{\cdot}| > 0$, тогда среди квазинормальных существует по крайней мере одна нормальная траектория, имеющая минимальную длину в семействе квазинормальных.

3. Системы с малым параметром. Опишем асимптотический алгоритм отыскания нормальных колебаний класса нелинейных систем, уравнения движения которых запишем в виде

$$Q(x^{\cdot\cdot}, x^{\cdot}, x) + \varepsilon q(x^{\cdot\cdot}, x^{\cdot}, x, y^{\cdot\cdot}, y^{\cdot}, y, \varepsilon) = 0 \tag{3.1}$$
$$F(x^{\cdot\cdot}, x^{\cdot}, x, y^{\cdot\cdot}, y^{\cdot}, y, \varepsilon) = 0$$

Здесь

$$Q = \{Q_1, \ldots, Q_n\}, \quad q = \{q_1, \ldots, q_n\}, \quad x = \{x_1, \ldots, x_n\}, \quad x^{\cdot} = \{x_1^{\cdot}, \ldots, x_n^{\cdot}\}$$
$$F = \{F_1, \ldots, F_m\}, \quad y = \{y_1, \ldots, y_m\}, \quad y^{\cdot} = \{y_1^{\cdot}, \ldots, y_m^{\cdot}\}$$

Предположим, что при $\varepsilon = 0$, $y = 0$, $F = 0$ и уравнения

$$Q(x^{\cdot\cdot}, x^{\cdot}, x) = 0 \tag{3.2}$$

имеют семейство квазинормальных решений, зависящее от произвольных постоянных

$$x_i^{(0)} = x_i^{(0)}(t, c), \quad y = 0, \quad c = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

Необходимо определить значения постоянных c, при которых квазинормальные колебания исходных (3.1) и упрощенных уравнений (3.2) асимптотически близки.

Метод малого параметра сводит аналогичную задачу к громоздким условиям периодичности решений уравнений с периодическими коэффициентами и периодической правой частью [6]. Для квазинормальных колебаний сформулируем более простой способ определения постоянных c, основанный на утверждении 2.

Учитывая, что в искомом решении y, $y^{\cdot} = O(\varepsilon)$ и в порождающие уравнения (3.2) y, $y^{\cdot}$ не входят, заключаем, что пренебрежение функциями y, $y^{\cdot}$ в (3.1) влечет ошибку порядка ε^2. Исходя из этого, подберем c таким образом, чтобы граничное условие (1.4) или (1.5) для квазинормальных решений нулевого приближения удовлетворялось с точностью до членов порядка ε^2

$$\lim p_i / p_1 = \lim H_{x_i}{}^* / H_{x_1}{}^*, \quad p_i \to 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, n) \tag{3.3}$$

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + \ldots, \quad H^* = H_0 + \varepsilon H_1$$

В функции H^* положен равным нулю вектор y, имеющий порядок ε^2. Условие (3.3) позволяет образовать замкнутую систему трансцендентных уравнений, связывающих постоянные c.

Утверждение 8. Условие (3.3) достаточно для асимптотической близости квазинормальных траекторий на конечном интервале времени.

Действительно, условие (3.3) гарантирует асимптотическую близость квазинормальных траекторий уравнений (3.1) и (3.2) в точке, расположенной на поверхности M. В компактной области M^* системы (3.1) и (3.2) являются δ-близкими в смысле [7]. Следовательно [7], из асимптотической близости траекторий в начальной точке вытекает асимптотическая близость траекторий на конечном интервале времени, содержащем эту точку, т. е. (3.3) — достаточное условие асимптотической близости квазинормальных траекторий исходной и упрощенной систем на конечном интервале времени.

Для ряда задач порождающее решение является семейством прямых линий: $x_i = c_i x_1$. В этом частном случае соотношение (3.3) позволяет получить точное решение.

Приведем примеры, иллюстрирующие эффективность описанного приема и характерные свойства квазинормальных колебаний нелинейных систем. Уравнения движения запишем в виде

$$x_i^{\cdot\cdot} + \omega_i^2 x_i + \varepsilon f_i(x) = 0, \qquad x_k^{\cdot\cdot} + \omega_k^2 x_k + \varepsilon f_k(x) = 0 \tag{3.4}$$
$$x = \{x_1, \ldots, x_n\}, \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \qquad k = m+1, \ldots, n$$

Предположим, что отношения $\omega_i / \omega_1 = l_i$ — целые числа, а ω и ω_k несоизмеримы. Определим квазинормальные траектории системы (3.4), асимптотически близкие к квазинормальным траекториям $x_i = a_i T_{l_i}(x_1 / a_1)$ линеаризованной системы. Учитывая, что $x_i^{\cdot} / x_1^{\cdot} = dx_i / dx_1$, представим (3.3) в виде (U — потенциальная функция)

$$a_i T'_{l_i}\left(\frac{a_i}{a_1}\right) = \frac{\omega_i^2 a_i + \varepsilon f_i(a)}{\omega_1^2 a_1 + \varepsilon f_1(a)} \qquad \text{при } U = h \tag{3.5}$$

Пример 1. Уравнения движения запишем в виде

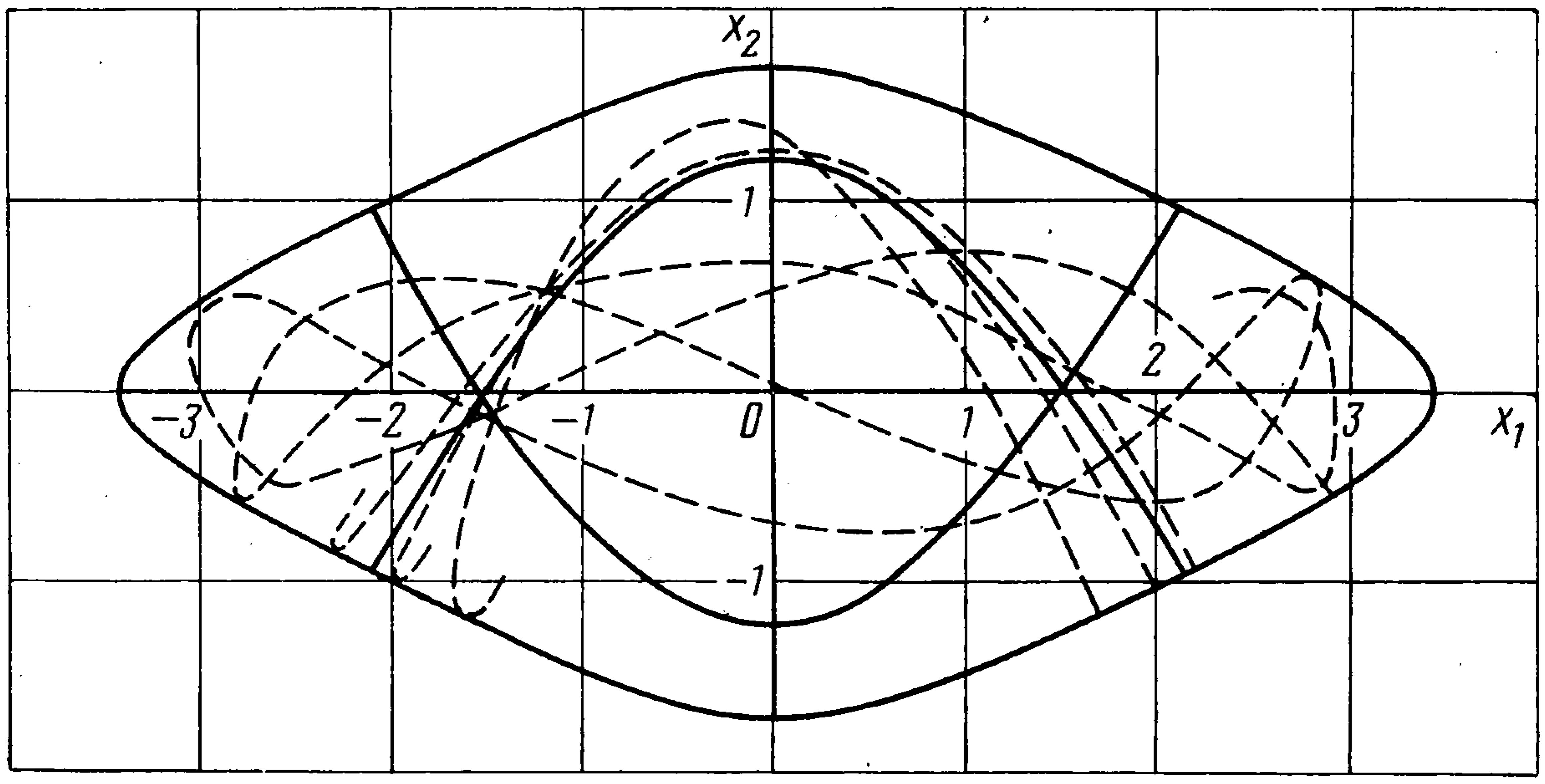
$$x_1^{\cdot\cdot} + \omega^2 x_1 + \varepsilon x_1 x_2^2 = 0, \qquad x_2^{\cdot\cdot} + 4\omega^2 x_2 + \varepsilon x_1^2 x_2 = 0$$

Уравнение] (3.5) в данном случае имеет четыре решения

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0; \qquad x_1 = 2x_2, \qquad x_1 = -2x_2,$$

которые с точностью до членов порядка ε^2 совпадают с геометрическими местами точек схода квазинормальных траекторий. Первая пара ортогональных прямых совпадает с квазинормальными траекториями, а вторая — приближенно определяет начальные условия двух других квазинормальных траекторий, близких при не слишком больших h к параболическим траекториям линеаризованной системы.

На фиг. 1 показаны результаты численного анализа при $\varepsilon = 1$ $\omega = 1$, $h = 8$, проведенного на ЭЦВМ с использованием алгоритма Рунге — Кутта. Сплошными ли-



Фиг. 1

ниями показаны траектории квазинормальных колебаний, пунктирными — траектории непериодических решений, пересекающих эквипотенциальную кривую.

Траектория, исходящая из произвольной точки эквипотенциали

$$^1/_2\,(x_1^2 + 4x_2^2) + {}^1/_2\,x_1^2 x_2^2 = 6$$

является непериодической кривой. Среди непериодических решений, траектории которых весьма сложны, отчетливо выделяются траектории квазинормальных колебаний.

Погрешность аналитических формул, определяющих начальные условия для криволинейных квазинормальных траекторий, составляет примерно 0.7% при $h = 0.6$ и 4% при $h = 6$.

Как показывает численный анализ, у рассматриваемой колебательной системы множество квазинормальных колебаний дискретно. Для такой системы (см. п. 2) квазинормальные колебания совпадают с нормальными. Таким образом, у системы с лагранжианом, инвариантным относительно инверсии координат, определены четыре нормальные траектории, две из которых прямолинейные, а две другие криволинейные и не проходят через центр инверсии.

Увеличение числа нормальных траекторий по сравнению с числом степеней свободы типично для некоторых классов нелинейных систем, потенциал которых — однородная функция координат [1]. Однако для рассматриваемых систем, потенциал которых не является однородной функцией координат и содержит квадратичную составляющую, это явление отмечается, по-видимому, впервые.

Описанное явление может иметь место, если все нормальные траектории прямолинейны.

Пример 2. Уравнения движения запишем так:

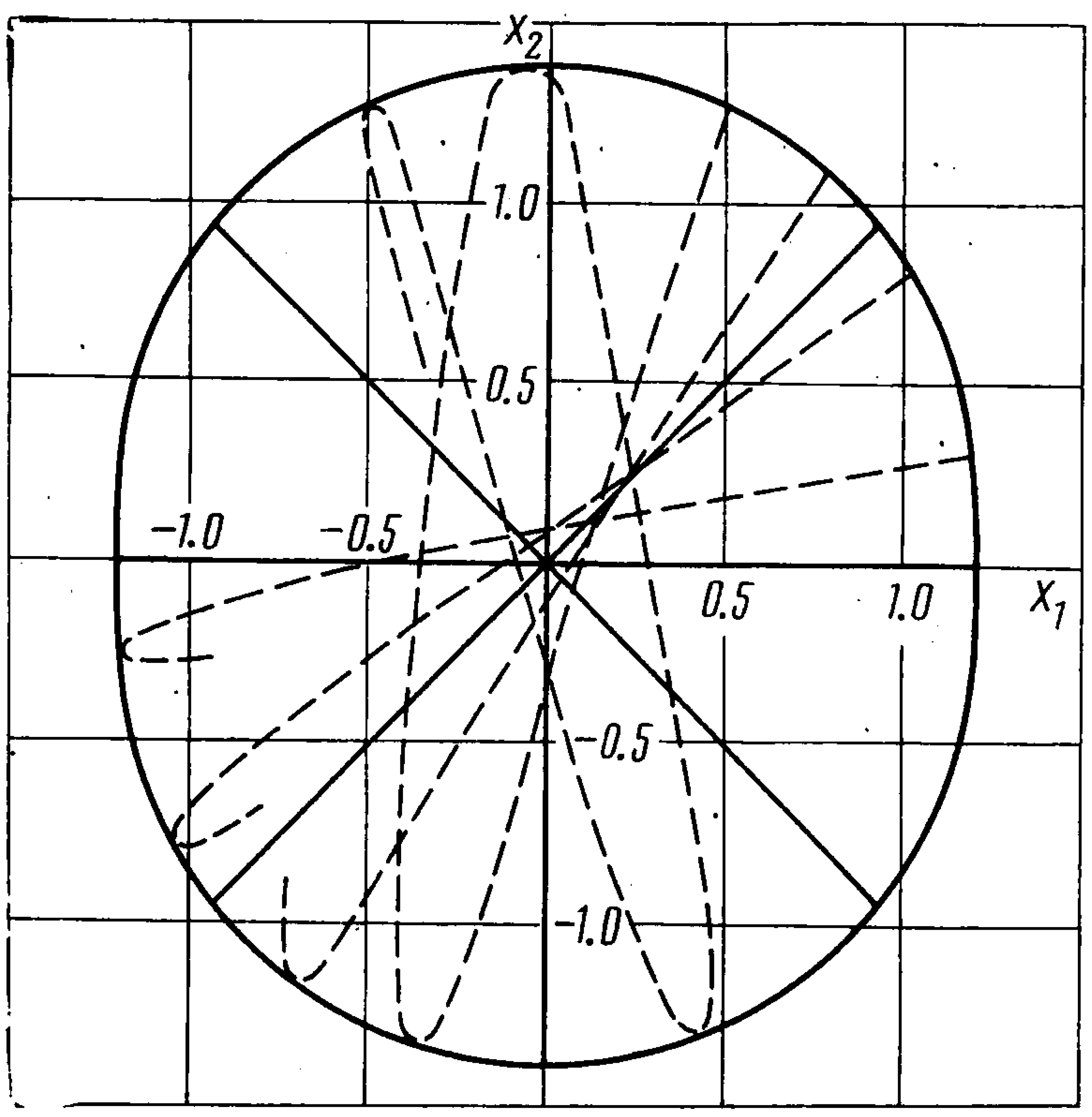
$$x_1^{\cdot\cdot} = -\omega^2 x_1 - b x_1 x_2^2 - e x_1^3, \qquad x_2^{\cdot\cdot} = -\omega^2 x_2 - b x_1^2 x_2 - d x_2^3$$

Из (3.5) получим уравнение для четырех нормальных траекторий

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = \pm \lambda x_2, \quad \lambda = \sqrt{b - e} \,/\, \sqrt{b - d}$$

На фиг. 2 для $\omega = \sqrt{2}$, $b = 4$, $d = e = 8$ сплошными прямыми линиями показаны траектории нормальных колебаний, пунктирными — траектории непериодических решений, пересекающих эквипотенциальную кривую.

Рассмотренный пример допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Эквипотенциальные кривые линеаризованной системы образуют семейство концентрических окружностей, любой диаметр которой совпадает с нормальной траекторией. Наложение сколь угодно малого возмущения разрушает круговую симметрию и приводит к выделению нескольких преимущественных направлений, совпадающих с на-



Фиг. 2

правлениями нормальных траекторий. Условие (3.5) позволяет определить эти решения в замкнутом виде.

Соотношение (3.5) позволяет выделить основную составляющую в приближенном представлении квазинормальных траекторий. Уточнить решение можно различными способами. Для уточнения формы колебаний целесообразно использовать процесс Галеркина. Координатные функции удобно выбрать в виде полиномов от пространственных координат. Эффективность процесса Галеркина объясняется тем, что в нулевом приближении форма колебаний обычно определяется достаточно точно. При этом неизвестные весовые множители при координатных функциях оказываются малыми величинами, что позволяет в первом приближении линеаризовать связывающую их систему трансцендентных уравнений.

Поступила 2 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rozenberg R. M., Hsu C. S.* On the geometrization of normal vibrations of nonlinear systems having many degrees of freedom. Тр. международного симпозиума по нелинейным колебаниям, т. 1. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
2. *Rozenberg R. M.* On non-linear vibrations of systems with many degrees of freedom. In: Advances Applied Mechanics, vol. 9. New-York — London. Acad. Press, 1966.
3. *Ахиезер Н. И.* Лекции по вариационному исчислению. М., Гостехиздат, 1955.
4. *Михлин С. Г.* Численная реализация вариационных методов. М., «Наука», 1966.
5. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. М., «Мир», 1974.
6. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
7. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон П. П., Майер А. Г.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости. М., «Наука», 1967.