

МИНИМАКСНАЯ ИМПУЛЬСНАЯ КОРРЕКЦИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДЕМПФИРОВАННОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

В. К. Горбунов

(Ташкент)

В минимаксной постановке решена задача синтеза импульсной коррекции нулевого положения линейного демпфированного осциллятора, подверженного непрерывно-действующему возмущению. Для импульсов коррекции получены аналитические выражения, для моментов времени их подачи — система трансцендентных уравнений. Анализируется зависимость рассматриваемых процессов от динамических свойств осциллятора, основанная на численных результатах.

1. Постановка задачи. На данном отрезке $[t_0, T]$ временной оси рассматривается импульсно-управляемый осциллятор с неотрицательным трением, подверженный непрерывно-действующему возмущению

$$(1.1) \quad x'' + 2\alpha x' + k^2 x = \sum_{k=1}^n u_k \delta(t - t_k) + v(t)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = y_0$$

На управление-коррекцию наложены ограничения по числу импульсов n и их суммарной величине (ресурсу коррекции)

$$(1.2) \quad \sum_{k=1}^n |u_k| \leq Q$$

Возмущение $v(t)$ может быть произвольной измеримой функцией, ограниченной по величине известной непрерывной положительной функцией $p(t)$

$$(1.3) \quad |v(t)| \leq p(t), \quad t_0 \leq t \leq T$$

Ставится задача синтеза управления $\{u_k, t_k\}$, стесненного ограничениями (1.2) и $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T$, гарантирующего наименьшее значение конечного отклонения положения осциллятора от нуля, т. е. функционала

$$(1.4) \quad J = |x(T)|$$

Предполагается, что фазовое состояние (x, x') осциллятора известно в каждый момент времени. Моменты времени подачи импульсов t_1, \dots, t_n выбираются до начала процесса. Этот выбор производится из расчета на наихудшее возмущение и в ходе процесса должен пересматриваться в соответствии с действительной реализацией возмущения.

Поставленная задача является дифференциально-импульсной игрой [1]. Случай $\alpha = k = 0$ рассмотрен в работе [2].

Анализ задачи удобно проводить при замене переменных

$$z(t) = e^{A(T-t)} y(t)$$

где $y = (x, x')$ — вектор фазового состояния системы (1.1), e^{At} — фундаментальная матрица решений соответствующей нормальной однородной системы. Из вида функционала (1.4) следует, что достаточно рассматривать лишь первую координату вектора z , совпадающую в конце процесса со значением $x(T)$. Эта координата в дальнейшем обозначается буквой z без индекса.

Итак, в случае действительных характеристических чисел $\lambda_{1,2} = -\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - k^2}$ рассматривается переменная

$$(1.5) \quad z(t) = \frac{\lambda_2 e^{\lambda_1(T-t)} - \lambda_1 e^{\lambda_2(T-t)}}{\lambda_2 - \lambda_1} x(t) - \frac{e^{\lambda_1(T-t)} - e^{\lambda_2(T-t)}}{\lambda_2 - \lambda_1} x'(t), \quad |k| < \alpha$$

$$(1.6) \quad z(t) = [(1 + \alpha(T-t))x(t) + (T-t)x'(t)] e^{-\alpha(T-t)}, \quad |k| = \alpha$$

В случае комплексных чисел $\lambda_{1,2} = -\alpha \mp i\beta$, где $\beta = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$, переменная

$$(1.7) \quad z(t) = [(\alpha \sin \beta(T-t) + \beta \cos \beta(T-t))x(t) + x'(t) \sin \beta(T-t)] e^{-\alpha(T-t)} / \beta$$

Переменная $z(t)$ в силу (1.1) и (1.2) описывается уравнениями

$$(1.8) \quad z' = \varphi(t) v, \quad z(t_k^+) = z(t_k^-) + \varphi(t_k) u_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \frac{e^{\lambda_2(T-t)} - e^{\lambda_1(T-t)}}{\lambda_2 - \lambda_1}, & |k| < \alpha \\ (T-t)e^{-\alpha(T-t)}, & |k| = \alpha \\ e^{-\alpha(T-t)} \sin \beta(T-t) / \beta, & |k| > \alpha \end{cases}$$

Начальное условие для этой переменной определяется одним из соотношений (1.5) — (1.7) при $t = t_0$, $x = x_0$, $x' = y_0$.

2. Решение задачи для произвольных t_1, \dots, t_n . Задача синтеза оптимальной коррекции (стратегии управляющей стороны) при произвольных значениях t_1, \dots, t_n решается методом динамического программирования. Гарантированное значение функционала $J = |z(T)|$ для $n - k + 1$ шагового процесса, начинающегося в момент времени t_k до воздействия импульса u_k , определяется состоянием $z(t_k^-) = z_k^-$, остаточным ресурсом коррекции

$$q_k = \begin{cases} Q, & k = 1 \\ Q - \sum_{i=1}^{k-1} |u_i|, & k = 2, \dots, n \end{cases}$$

и значениями t_k, \dots, t_n . Эта величина обозначается через $S_{n-k+1}(z_k^-, q_k, t_k, \dots, t_n)$. Значением поставленной игры при этом будет функция

$$(2.1) \quad \omega_n(z_0, Q, t_1, \dots, t_n) = \max_{v[t_0, t_1]} S_n(z_1^-, Q, t_1, \dots, t_n)$$

Из принципа оптимальности следуют рекуррентные уравнения (2.2) и конечное условие (2.3)

$$(2.2) \quad S_{n-k+1}(z_k^-, q_k, t_k, \dots, t_n) = \\ = \min_{u_k} \max_{v[t_k, t_{k+1}]} S_{n-k}(z_{k+1}^-, q_{k+1}, t_{k+1}, \dots, t_n), \quad k = 1, \dots, n-1$$

$$(2.3) \quad S_1(z_n^-, q_n, t_n) = \min_{u_n} \max_{v[t_n, T]} |z(T)|$$

Вычисления экстремумов в (2.1) — (2.3) обусловлены ограничениями $|u_k| \leq q_k$, (1.3) и связями (1.8).

Из условия (2.3) получается равенство

$$S_1(z_n^-, q_n, t_n) = \max \{0, |z_n^-| - q_n \varphi(t_n)\} + \int_{t_n}^T p(t) |\varphi(t)| dt$$

которое показывает, что функция S_1 не убывает с ростом $|z_n^-|$, и решение уравнения (2.2) для $k = n - 1$ сводится к вычислению величины

$$\min_{u_{n-1}} \max_{v[t_{n-1}, t_n]} |z_n^-|$$

Решение этой задачи аналогично вычислению экстремумов в (2.3) и показывает, что функция S_2 также не убывает с ростом $|z_n^-|$ и т. д. Таким образом, все уравнения (2.2) и (2.1) имеют аналогичное решение, при этом наилучшая помеха имеет вид

$$(2.4) \quad v(t) = p(t) \operatorname{sign} z(t_j^+), \quad t_j \leq t < t_{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

а импульсы оптимальной коррекции описываются равенствами

$$(2.5) \quad u_k = -\operatorname{sign} z_k^- \min \{q_k, |z_k^-| / |\varphi(t_k)|\}, \quad k = 1, \dots, n$$

Импульс u_k называется компенсирующим, если рассматриваемая система при отсутствии возмущений на промежутке (t_k, T) приходит в момент времени T в состояние $x(T) = 0$. Это эквивалентно, очевидно, равенству $z(t_k^+) = 0$.

Из соотношений (2.5) непосредственно следует, что все импульсы, быть может кроме последнего, компенсирующие. Таким образом, если оптимальная коррекция состоит из m ненулевых импульсов ($m \leq n$), то

$$(2.6) \quad |u_k| = |z_k^-| / |\varphi(t_k)|, \quad k = 1, \dots, m-1, \quad |u_m| \leq q_m$$

и в экстремальном процессе, т. е. процессе с помехой (2.4) и импульсами (2.5), выполняются равенства

$$(2.7) \quad |z_1^-| = |z_0| + F(t_0, t_1), \quad |z_j^-| = F(t_{j-1}, t_j), \quad j = 2, \dots, m$$

$$F(t', t'') = \int_{t'}^{t''} p(t) |\varphi(t)| dt$$

При этом гарантированное значение функционала (1.4) выражается равенством

$$(2.8) \quad J = \begin{cases} F(t_m, T), & q_m \geq |z_m^-| / |\varphi(t_m)| \\ |z_{m-1}^+| + F(t_{m-1}, T) - q_m |\varphi(t_m)|, & q_m < \frac{|z_m^-|}{|\varphi(t_m)|} \end{cases}$$

Из компенсирующего свойства импульсов u_1, \dots, u_{m-1} следует, что $z_{m-1}^+ = 0$ при $m \geq 2$.

Выражение (2.8), очевидно, представляет также функции $S_k, k = 1, \dots, \dots, m$, соответствующие экстремальному процессу, и значение игры $\omega_m(z_0, Q, t_1, \dots, t_m)$.

3. Оптимизация моментов времени подачи импульсов. Решение уравнений (2.1) — (2.3) дает синтез наилучшей помехи (2.4) и оптимальной коррекции (2.6), соответствующий произвольным временам t_k подачи импульсов u_k . Для определения оптимальных значений t_1, \dots, t_m следует минимизировать функцию $\omega_m(z_0, Q, t_1, \dots, t_m)$ по искомым переменным.

Как видно из (1.8) и (2.6), эффективность времени коррекции t_k определяется значением функции $|\varphi(t)|$ в этой точке. В аperiodическом случае ($|k| \leq \alpha$) функция $\varphi(t)$ положительна и монотонно убывает на промежутке $[t_0, T]$. В колебательном случае ($|k| > \alpha$) она обладает этими свойствами на промежутке $[\tau, T)$, где точка

$$\tau = T - \frac{1}{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}$$

является точкой абсолютного максимума функции $|\varphi(t)|$ на промежутке $(-\infty, T]$. В обоих случаях $\varphi(T) = 0$.

Отмеченные свойства функции $\varphi(t)$ позволяют утверждать, что оптимальную коррекцию следует проводить на промежутке $[\theta, T)$ где

$$\theta = \begin{cases} t_0, & |k| \leq \alpha \\ \max\{t_0, \tau\}, & |k| > \alpha \end{cases}$$

Сделанное утверждение тривиально при $\theta = t_0$. Пусть $\theta > t_0$ (в колебательном случае) и $t_0 \leq t_l < \tau \leq t_{l+1}$ ($1 \leq l \leq m$). Из соотношений (2.4), (2.6) следует, что $|z(\tau^-)| = |z_{l-1}^+| + F(t_{l-1}, \tau) - |u_l \varphi(t_l)|$. Если импульс $|u_l|$ перенести в момент времени $t_l' = \tau$, то в силу неравенства $|\varphi(t_l)| < \varphi(\tau)$ в случае $\tau < t_{l+1}$ величина $|z(\tau^+)|$ будет снижена без дополнительного расхода ресурса коррекции, и в случае $\tau = t_{l+1}$ одинаковое значение $|z(\tau^+)|$ будет гарантировано при экономии ресурса. Такой же эффект достигается перенесением всех импульсов, предшествующих моменту времени τ , на промежуток $[\tau, T)$, что доказывает утверждение.

Оптимальное значение t_m должно минимизировать функцию (2.8) на промежутке $[t_{m-1}, T]$. Легко видеть, что эта функция унимодальна относительно t_m и в случае $m > 1$ имеет минимум в точке, определяемой уравнением

$$q_m \varphi(t) = F(t_{m-1}, t), \quad t_{m-1} \leq t \leq T$$

При этом последняя коррекция является компенсирующей, использует весь оставшийся ресурс q_m , и величина (2.8) принимает значение

$$(3.1) \quad J = F(t_m, T)$$

Проведение двух и более оптимальных импульсов в наилучшем случае (2.4) возможно, если ресурс Q превосходит величину, необходимую для проведения компенсирующей коррекции в наиболее эффективный момент

времени θ , т. е. при

$$(3.2) \quad Q > [|z_0| + F(t_0, \theta)] / \varphi(\theta)$$

В противном случае следует проводить одну коррекцию в момент времени θ с использованием всего ресурса Q . Это гарантирует конечное отклонение, не превышающее величины

$$J = |z_0| + F(t_0, T) - Q\varphi(\theta)$$

Далее рассматривается случай, когда условие (3.2) выполнено.

Если допустим единственный импульс коррекции ($n = 1$), то оптимальное значение t_1 , минимизирующее величину (2.8) на промежутке $[\theta, T]$, является решением уравнения

$$Q\varphi(t) = |z_0| + F(t_0, t)$$

Такая коррекция также будет компенсирующей, и гарантируемое значение функционала описывается равенством (3.1), где $m = 1$.

Пусть ресурс q_m последней коррекции распределен на два компенсирующих импульса u_m' и u_{m+1} , так что $|u_m'| = \mu q_m$ и $|u_{m+1}| = (1 - \mu) q_m$, где $0 \leq \mu \leq 1$. Моменты времени t_m' и t_{m+1} определяются как функции параметра μ уравнениями

$$F(t_{m-1}, t_m') = \mu q_m \varphi(t_m'), \quad F(t_m', t_{m+1}) = (1 - \mu) q_m \varphi(t_{m+1})$$

Из этих уравнений следует, что $t_m'(0) = t_{m-1}$, $t_m'(1) = t_{m+1}(0) = t_{m+1}(1) = t_m$, и производные функций $t_m'(\mu)$ и $t_{m+1}(\mu)$ имеют вид

$$\begin{aligned} dt_m'(\mu) / d\mu &= \Phi(t_m', \mu) \\ \frac{dt_{m+1}(\mu)}{d\mu} &= \left[\frac{p(t_m') \varphi(t_m')}{q_m \varphi(t_{m+1})} \Phi(t_m', \mu) - 1 \right] \Phi(t_{m+1}, 1 - \mu) \\ \Phi(t, \mu) &= q_m \varphi(t) / [p(t) \varphi(t) - \mu q_m d\varphi / dt] \end{aligned}$$

Видно, что

$$(3.3) \quad \left. \frac{dt_{m+1}}{d\mu} \right|_{\mu=0} = \left[\frac{\Phi(t_{m-1})}{\varphi(t_m)} - 1 \right] \Phi(t_m, 1)$$

Функция $\varphi(t)$ на отрезке $[t_{m+1}, T]$ строго убывает, а значение $\Phi(t_m, 1)$ равняется производной функции $t_m'(\mu)$ в точке $\mu = 1$. Эта производная, очевидно, положительна при всех $\mu \in [0, 1]$, следовательно, выражение (3.3) положительно, и функция $t_{m+1}(\mu)$ имеет на интервале $(0, 1)$ максимум, превышающий значение t_m .

Проведенный анализ показывает, что число импульсов следует увеличивать до максимального, т. е. в оптимальной коррекции $m = n$.

Итак, оптимальная коррекция состоит из n компенсирующих импульсов, использующих весь ресурс Q и расположенных на промежутке $[\theta, T]$. При действии наихудшей помехи (2.4) это в силу равенств из (2.6), выполненных для $k = 1, \dots, n$, и соотношений (2.7) выражается условием (3.4) и неравенствами (3.5)

$$(3.4) \quad |z_0| / \varphi(t_1) + \sum_{k=1}^n F(t_{k-1}, t_k) / \varphi(t_k) = \varrho$$

$$(3.5) \quad \theta \leq t_1 < \dots < t_n < T$$

Таким образом, задача выбора оптимальных моментов времени подачи импульсов коррекции сводится к минимизации функции $F(t_n, T)$ при условиях (3.4) и $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T$. Решение этой задачи обладает свойствами (3.5).

4. Реализация коррекции. Для обобщения процедуры решения задачи коррекции конкретных объектов и учета реализации возмущений удобно сводить описание объекта к безразмерным величинам и нулевому начальному условию. Если объект в момент времени t находится в состоянии $z(t)$, то можно считать, что движение началось в момент времени t^* из нулевого состояния и проходило под действием наихудшей помехи. Такое значение t^* определяется, очевидно, уравнением $F(t^*, t) = |z(t)|$. При этом функция $p(t)$ доопределяется для $t < t_0$ значением $p(t_0)$. Переход к безразмерным величинам $t', z', \alpha', k', Q', v', u_k'$ осуществляется по формулам

$$(4.1) \quad \begin{aligned} t &= (T - t^*)t' + t^*, & z &= F(t^*, T)z' \\ v &= p^*v', & u_k &= p^*u_k', & Q &= p^*Q' \\ \alpha &= \alpha' / (T - t^*), & k &= k' / (T - T^*), & p^* &= F(t^*, T) / \int_{t^*}^T |\varphi(t)| dt \end{aligned}$$

Можно проверить, что приведенное преобразование сводит исходную задачу к единичному временному промежутку, нулевым начальным условиям и, в случае $p(t) = \text{const}$, к единичной интенсивности возмущений. Функции $\varphi(t)$, $p(t)$, $F(t, T)$ переходят в функции $\varphi'(t')$, $p'(t')$, $F'(t', 1)$ с сохранением всех использованных выше свойств, и к новой задаче применимы полученные результаты. Оптимальный набор времен подачи импульсов является внутренней точкой ограничивающего множества $0 \leq t_1' \leq \dots \leq t_n' \leq 1$, следовательно, задачу минимизации функции $F'(t', 1)$ на этом множестве при условии

$$(4.2) \quad \sum_{k=1}^n F'(t_{k-1}', t_k') / \varphi'(t_k') = Q'$$

можно решать методом Лагранжа. Получаемые таким образом необходимые условия экстремума для искомым переменных состоят из уравнения (4.2) и системы

$$(4.3) \quad \varphi'(t_{k+1}') = A(t_{k-1}', t_k') \varphi'(t_k'), \quad k = 1, \dots, n-1$$

где

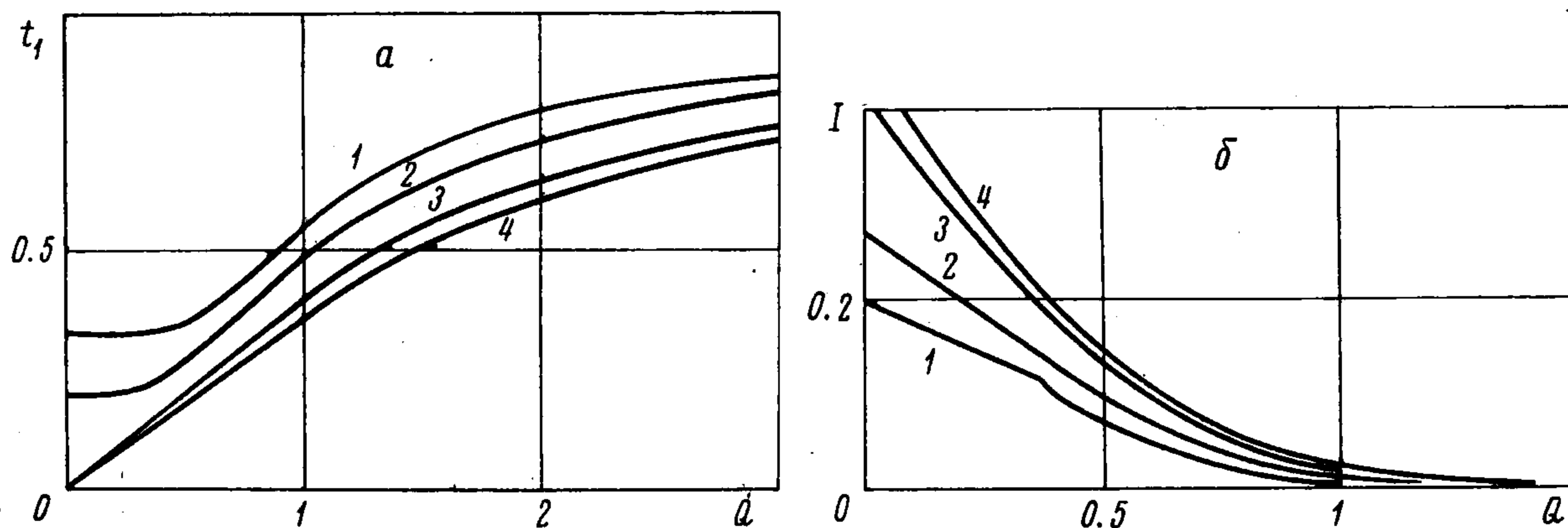
$$A(t_{k-1}', t_k') = \frac{p'(t_k') [\varphi'(t_k')]^2}{p'(t') [\varphi'(t_k')]^2 - F(t_{k-1}', t_k') d\varphi'(t_k') / dt'}$$

Как показано в п.3 (неравенства (3.5)), оптимальные значения времен подачи импульсов расположены на промежутке $[\theta', 1)$. На этом промежутке функция $\varphi'(t')$ положительна и монотонно убывает, поэтому $0 < A(t_{k-1}', t_k') \leq 1$ при $\theta' \leq t_k' < 1$, причем $A(t_{k-1}', t_k') = 1$ лишь при $t_k' = \theta'$. Из этого следует, что для каждого значения $t_1' = s \in [\theta', 1)$ система (4.3) имеет единственное решение $t_k'(s)$, $k = 2, \dots, n$, причем $t_k'(\theta') = \theta'$, $k = 1, \dots, n$ и если $\theta' < s < 1$, то $s = t_1' < t_2' < \dots < t_n' < 1$.

Рассмотрим левую часть равенства (4.2) как функцию $q(s)$, получаемую при $t_k' = t_k'(s)$. Значения этой функции нетрудно вычислять, решая последовательно уравнения (4.3). Для определения параметра s , порождающего оптимальный набор $\{t_k'(s)\}$, следует решить уравнение

$$(4.4) \quad q(s) = Q', \quad \theta' < s < 1$$

Если это уравнение имеет множество решений, то оптимальным из соответствующего множества наборов $t_1'(s), \dots, t_n'(s)$, очевидно, является набор с наибольшим значением $t_n'(s)$.



При введении фиктивного начала процесса (в случае ненулевого начального условия) может случиться, что описанная процедура даст значение t_1 , меньшее начального времени t_0 . В этом случае имеется две возможности: если все корни уравнения (4.4), совпадающие с подозрительными на оптимальность значениями t_1' , лежат левее t_0' , то первую коррекцию следует проводить в начале процесса, т. е. $t_1 = t_0$. В противном случае следует сравнить наилучший корень уравнения (4.4) из лежащих на промежутке $[t_0', 1)$ со значением $t_1' = t_0'$. Для вычисления значений t_2', \dots, t_n' при $t_1' = t_0'$ (или $t_1 = t_0$) достаточно перейти к задаче с нулевым начальным условием, числом импульсов $n - 1$ и ресурсом $Q_1 = Q - |z_0| / |\varphi(t_0)|$.

Описанная процедура численного определения оптимальных значений моментов времени t_1', \dots, t_n' реализована для случая $p(t) = \text{const}$ и различных α', k', Q', n . Зависимости $t_2'(s), \dots, t_n'(s)$ оказались при этом монотонно возрастающими и, следовательно, решения системы (4.2), (4.3) — единственными.

Установленные зависимости $t_1'(Q')$ и $J(Q')$ для каждой пары параметров (α', k') аналогичны соответствующим зависимостям, приведенным в [2] для случая $\alpha' = k' = 0$. Существенное отличие имеется лишь в колебательном случае, когда $\theta > 0$. При этом, как указано в п. 3, для значений ресурса коррекции из промежутка $[0, F(0, \theta) / \varphi(\theta)]$ проводится единственный импульс коррекции в момент времени θ , и зависимость $J(Q')$ линейна.

Кривые, приведенные на фигуре, соответствуют трехимпульсной коррекции и следующим параметрам: для кривых 1, 2 и 3 $k' = 1.5$ и α' равно соответственно 1.49, 0.75 и 0, для кривой 4 $k' = 1$, $\alpha' = 0$. Как видно, с уменьшением трения α' гарантированное конечное отклонение возрастает.

Другие численные результаты показывают, что с уменьшением величины $\max\{\alpha', k'\}$ кривые $J(Q')$ во всех случаях поднимаются, приближаясь к соответствующим кривым, приведенным в [2]. Если $\max\{\alpha', k'\}$ возрастает, осциллятор становится маловозмущаемым (по функционалу) и кривые $J(Q')$ стремятся к оси абсцисс.

Для улучшения гарантированного значения функционала задачи при отклонении возмущения от наилучшего режима предлагается следующий идеализированный алгоритм синтеза моментов времени подачи импульсов коррекции. Пусть осталось провести m импульсов, и возмущение отклоняется от наилучшего режима на некотором промежутке до предварительно рассчитанного времени подачи первого из оставшихся импульсов. Это ведет к отклонению величины $|z(t)|$ от значения, соответствующего наилучшему режиму, и величины t_1, \dots, t_m пересчитываются с помощью описанной выше процедуры. Такой пересчет проводится в каждый момент времени указанного промежутка и заканчивается при совпадении текущего времени с улучшенным значением t_1 либо при восстановлении наилучшей помехи. После проведения очередного импульса процесс повторяется с соответствующим уменьшением ресурса коррекции и числа импульсов.

Для практической реализации синтеза моментов времени подачи импульсов возможен алгоритм, отличающийся от изложенного дискретностью времени пересчета значений t_1, \dots, t_m . При этом промежуток дискретности должен быть не меньше времени, необходимого на описанные вычисления.

Приближенный синтез моментов времени t_1, \dots, t_n может быть реализован с помощью заранее рассчитанных зависимостей $t_n'(Q')$, соответствующих числам импульсов $n, n-1, \dots, 1$ и достаточно густой сетке параметров α_i' и k_i' . При этом последние параметры следует связать соотношением $\alpha k_i' = \alpha_i' k$, так как преобразование (4.1) изменяет их пропорционально. Кроме того, при отклонении возмущения от наилучшего режима фиктивное начало t^* возрастает, что ведет в силу (4.1) к уменьшению значений α' и k' . Таким образом, сетка параметра α' (или k') является разбиением отрезка $[0, (T - t_0^*)\alpha]$, где t_0^* — фиктивное начало, соответствующее начальным условиям задачи.

Итак, исходная задача коррекции, имеющая в случае постоянной интенсивности восемь параметров: $x_0, y_0, T, \alpha, k, p, Q, n$, преобразованием (4.1) сведена к задаче с четырьмя параметрами α', k', Q', n . Для реализации синтеза коррекции конкретного объекта достаточно иметь n однопараметрических (с параметром α' или k') зависимостей $t_1'(Q')$.

Поступила 7 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов В. К. Дифференциально-импульсные игры. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 4.
2. Горбунов В. К., Черноусько Ф. Л. Задача оптимальной многоимпульсной коррекции возмущений. Автоматика и телемеханика, 1970, № 8.