Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.36

# ОБ ОТСУТСТВИИ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Л. Хатвани

(Сегед, Венгрия)

С помощью обобщения формулы Лиувилля дается достаточное условие, при котором нулевое решение системы нелинейных дифференциальных уравнений не имеет свойства притяжения относительно ни одной из переменных. В частности, из основной теоремы вытекает, что устойчивое невозмущенное движение общей (нестационарной) гамильтоновой системы не может быть притягивающим относительно ни одной из обобщенных координат и импульсов. В качестве примера исследуются свойства устойчивости положения равновесия математического маятника переменной длины.

1. Пусть дана система дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\mathbf{x}^{\cdot} = \mathbf{X}(t, \mathbf{x}) \quad (\mathbf{X}(t, 0) \equiv 0) \tag{1.1}$$
$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^* \in R^n, \quad \|\mathbf{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)^{1/2}$$

Вектор-функция $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ определена и непрерывна вместе со своими первыми частными производными по $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ на множестве $\Gamma = \{(t, \mathbf{x}) : t \geqslant 0, \|\mathbf{x}\| < H\}$ $(0 < H \leqslant \infty)$ и решения $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ при достаточно малых по норме начальных значениях $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0)$ определены для всех $t \geqslant t_0$.

*Определение.* Невозмущенное движение $\mathbf{x} = 0$ называется притягивающим относительно переменной $x_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, если для каждого $t_0$ существует $\delta(t_0) > 0$, такое, что из $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$ следует

$$\lim_{t \to \infty} x_j(t; t_0, \mathbf{x}_0) = 0 \tag{1.2}$$

Невозмущенное движение, притягивающее относительно всех переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, называется просто притягивающим.

Употребляя этот термин, можем сказать, что невозмущенное движение асимптотически $x_j$-устойчиво [1], если оно $x_j$-устойчиво и притягивающее относительно $x_j$.

В дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями:

$$S(r) = \{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\| < r\} \quad (0 < r \in R)$$
$$x(t; t_0, F) = \{\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0) : \mathbf{x}_0 \in F\} \quad (F \subset R^n)$$

2. Для любых фиксированных $t$, $t_0$ $(0 \leqslant t_0 \leqslant t)$ отображение $S(r) \to R^n$, определенное формулой $\mathbf{x}_0 \to \mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$, является диффеоморфиз-

мом, якобиан которого удовлетворяет дифференциальному уравнению [2,3]

$$\frac{\partial}{\partial t} J(\mathrm{x}_0;\ t, t_0) = \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial X_i(t, \mathrm{x})}{\partial x_i} \right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}(t;\ t_0,\ \mathrm{x}_0)} J(\mathrm{x}_0;\ t, t_0)$$

при $t \geqslant t_0$. Отсюда следует соотношение

$$J(\mathrm{x}_0;\ t, t_0) = \exp\left[ \int_{t_0}^{t} \left( \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i(s, \mathrm{x})}{\partial x_i} \right)_{\mathrm{x}=\mathrm{x}(s;\ t_0,\ \mathrm{x}_0)} ds \right] \tag{2.1}$$

которое обобщает формулу Лиувилля для систем нелинейных уравнений.

*Теорема*. Допустим, что существует такая окрестность начала координат, что все начинающиеся в ней решения системы (1.1) равномерно ограничены, т. е. найдутся числа $l > 0$ и $L > 0$, такие, что

$$x(t;\ 0,\ S(l)) \subset S(L) \quad (t \geqslant 0) \tag{2.2}$$

Если

$$\lim\sup\nolimits_{t\to\infty} \int_0^t \min\left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial X_i(s, \mathrm{x})}{\partial x_i} : \|\mathrm{x}\| \leqslant L \right\} ds > -\infty \tag{2.3}$$

то нулевое решение системы (1.1) не имеет свойства притяжения относительно ни одной из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$; точнее, лебеговы меры $\mu[E_i]$ множеств

$$E_i = \{\mathrm{x}_0 : \|\mathrm{x}_0\| < l,\ \ \lim\nolimits_{t\to\infty} x_i(t;\ 0, x_0) = 0\}$$

$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ равняются нулю.

*Доказательство*. В силу условия (2.3) и соотношения (2.1) существуют последовательность $0 \leqslant t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_k \leqslant \ldots$ и постоянная $C$, такие, что $t_k \to \infty$ при $k \to \infty$, и для любого открытого измеримого множества $F \subset S(l)$ выполняется неравенство

$$\mu[x(t_k;\ 0, F)] = \int \ldots \int_{x(t_k;\ 0,\ F)} dx_1 \ldots dx_n = \tag{2.4}$$

$$= \int \underset{F}{\ldots} \int J(\mathrm{x}_0;\ t_k, 0)\, dx_{01} \ldots dx_{0n} \geqslant \exp[C]\, \mu[F] \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

Для любого фиксированного $i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ множества

$$H_m^k = \left\{ \mathrm{x}_0 : \|\mathrm{x}_0\| < l,\ |x_i(t;\ 0, \mathrm{x}_0)| < \frac{1}{k} \text{ при } m \leqslant t \leqslant m+1 \right\}$$
$$(m, k = 1, 2, \ldots)$$

открыты (см. [2]); следовательно, множество

$$E_i = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left( \bigcup_{j=1}^{\infty} \bigcap_{m=j}^{\infty} H_m^k \right)$$

измеримо по Лебегу.

Допустим, что утверждение теоремы не справедливо, т. е. существует $j$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$, такое, что $\mu[E_j] > 0$. Тогда по теореме Д. Ф. Егорова [4] можно указать измеримое множество $E^* \subset E_j$, мера которого удовлетворяет неравенству $\mu[E^*] > \mu[E_j]\,/\,2$ и на котором $x_j(t;\ 0,\ \mathrm{x}_0) \to 0$ при $t \to \infty$ равномерно по $\mathrm{x}_0$, т. е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T(\varepsilon)$, такое, что из $t > T(\varepsilon)$ и $x_0 \in E^*$ следует включение

$$x(t;\ 0,\ x_0) \in M(\varepsilon) \tag{2.5}$$

$$M(\varepsilon) = S(L) \cap \{y: |y_j| < \varepsilon\}$$

В силу $t_k \to \infty$ можно указать натуральное число $k(\varepsilon)$, такое, что $t_{k(\varepsilon)} > T(\varepsilon)$. Введем обозначение

$$F(\varepsilon) = x(0;\ t_{k(\varepsilon)},\ M(\varepsilon)) \cap S(l)$$

Вследствие (2.5) имеем $E^* \subset F(\varepsilon)$, поэтому $\mu[F(\varepsilon)] \geqslant \mu[E_j]/2$, откуда на основе (2.4) вытекает оценка

$$\mu[M(\varepsilon)] \geqslant \mu[x(t_{k(\varepsilon)};\ 0,\ F(\varepsilon))] \geqslant \tag{2.6}$$
$$\geqslant \exp[C]\,\mu[F(\varepsilon)] \geqslant \exp[C]\,\mu[E_j]/2 > 0$$

С другой стороны, очевидным образом

$$\lim_{\varepsilon\to 0+}\mu[M(\varepsilon)] = 0$$

а это противоречит оценке (2.6).

Теорема доказана.

*Следствие 1.* Если нулевое решение системы (1.1) устойчиво и выполняется неравенство (2.3) при достаточно малом $L > 0$, то нулевое решение системы (1.1) не имеет свойства притяжения относительно ни одной из переменных $x_i$; точнее, $\mu[E_i] = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Пусть теперь дана произвольная (неконсервативная) гамильтонова система

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(t,\ q,\ p)}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(t,\ q,\ p)}{\partial q_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{2.7}$$

и допустим, что функция Гамильтона $H(t,\ q,\ p)$: $[0,\ \infty) \times R^n \times R^n \to R$ непрерывна вместе со своими вторыми частными производными по переменным $q_i$, $p_j$. Пусть система (2.7) имеет решение $q = p = 0$, которое называем положением равновесия.

*Следствие 2.* Если в $2n$-мерном пространстве переменных $q$, $p$ существует такая окрестность положения равновесия $q = p = 0$ системы (2.7), что все начинающиеся в ней решения равномерно ограниченные, т. е. существуют числа $l > 0$, $L > 0$, такие, что из $\|q_0\|^2 + \|p_0\|^2 \leqslant l^2$ следует неравенство

$$\|q(t;\ 0,\ q_0,\ p_0)\|^2 + \|p(t;\ 0,\ q_0,\ p_0)\|^2 \leqslant L^2 \tag{2.8}$$

при всех $t \geqslant 0$ (в частности, если положение равновесия $q = p = 0$ устойчиво), то положение равновесия не имеет свойства притяжения относительно ни одной из переменных $q_i$, $p_i$; точнее, лебеговы меры множеств

$$\begin{pmatrix} Q_i \\ P_i \end{pmatrix} = \Big\{(q_0,\ p_0) \in R^{2n} : \|q_0\|^2 +$$
$$+ \|p_0\|^2 < l^2, \lim_{t\to\infty}\begin{pmatrix} q_i \\ p_i \end{pmatrix}(t;\ 0,\ q_0,\ p_0) = 0\Big\}$$

$(i = 1, 2, \ldots, n)$ равняются нулю.

*Замечание.* Уравнение

$$x^{\cdot\cdot} + a(t)x = 0 \quad (t \geqslant 0,\ x \in R) \tag{2.9}$$

показывает, что условие (2.8) в следствии 2 существенно. Вводя обозначения $q = x$, $p = x^{\cdot}$, уравнение (2.9) можно переписать в виде системы Гамильтона (2.7) с функцией $H(t, q, p) = (a(t) q^2 + p^2) / 2$. Решение $x = x^{\cdot} = 0$ уравнения (2.9) не может быть притягивающим ни при какой функции $a(t)$. С другой стороны, давно рассматривается вопрос, в каком случае все решения уравнения (2.9) стремятся к нулю при $t \to \infty$; другими словами, когда решение $x = x^{\cdot} = 0$ уравнения (2.9) будет притягивающим (в целом) относительно координаты $x$. Известен ряд условий (см. п. 5.5 в [5]), обеспечивающих это свойство. Таким образом, если отбросим условие (2.8), то следствие 2 перестанет быть справедливым.

3. В качестве приложения рассмотрим движение маятника, состоящего из материальной точки, подвешенной на нити, длина которой изменяется по произвольно заданному закону $l = l(t)$ $(l(t) \geqslant l_0 > 0)$. Обозначим через $\theta$ угол, образуемый нитью маятника с вертикалью. В данном случае уравнение Лагранжа имеет вид

$$(l^2(t)\theta^{\cdot})^{\cdot} + gl(t)\sin\theta = 0 \quad (-\pi/2 < \theta < \pi/2) \tag{3.1}$$

Рассмотрим «нормированную» энергию»

$$V = V(t, \theta, \theta^{\cdot}) = \frac{l(t)}{g}(\theta^{\cdot})^2 + 2(1 - \cos\theta) \tag{3.2}$$

Для производной $V^{\cdot}$ в силу уравнения (3.1) можем написать оценку

$$V^{\cdot}(t, \theta, \theta^{\cdot}) = -\frac{3}{g} l^{\cdot}(t)(\theta^{\cdot})^2 \leqslant \left[\frac{3l^{\cdot}(t)}{l(t)} l(t)\right]_- V(t, \theta, \theta^{\cdot}) \tag{3.3}$$

Допустим, что

$$L = \int_0^\infty [(\ln l(t))^{\cdot}]_- dt < \infty \tag{3.4}$$

Тогда любое решение $\theta(t)$ уравнения (3.1) удовлетворяет неравенству

$$v(t) = V(t, \theta(t), \theta^{\cdot}(t)) \leqslant v(t_0)\exp[3L] \tag{3.5}$$

Так как $(1 - \cos\theta) / \theta^2 \to 1/2$ при $\theta \to 0$, то для любых $\sigma > 0$ и $t_0 \geqslant 0$ существуют $k > 0$ и $K(t_0)$, такие, что

$$V(t, \theta, \theta^{\cdot}) \geqslant k(\theta^2 + (\theta^{\cdot})^2)$$

$$V(t_0, \theta, \theta^{\cdot}) \leqslant K(t_0)(\theta^2 + (\theta^{\cdot})^2)$$

$$(t \geqslant 0,\ \theta^{\cdot} \in R,\ 0 \leqslant |\theta| < \pi/2 - \sigma)$$

Если $\varepsilon > 0$ и

$$\theta_0^2 + (\theta_0^{\cdot})^2 < \varepsilon \frac{k}{K(t_0)\exp[3L]}$$

то в силу (3.5) имеем неравенство

$$[\theta(t; t_0, \theta_0, \theta_0^{\cdot})]^2 + [\theta^{\cdot}(t; t_0, \theta_0, \theta_0^{\cdot})]^2 < \varepsilon \quad (t \geqslant t_0)$$

т. е. условие (3.4) влечет за собой устойчивость невозмущенного движения $\theta = \theta^{\cdot} = 0$.

Можно заметить, что условие (3.4), очевидно, выполняется, если функция $l(t)$ возрастает или убывает $(l(t) \geqslant l_0 > 0)$ при достаточно больших значениях времени $t$. Если существует неограниченная последовательность моментов времени $r_1 < s_1 < \ldots$ $\ldots < r_k < s_k < \ldots$, такая, что функция $l(t)$ убывает на отрезках $[r_k, s_k]$ и возрастает на $[s_k, r_{k+1}]$ $(k = 1, 2, \ldots)$, то условие (3.4) эквивалентно неравенству

$$\prod_{k=1}^{\infty} (l(r_k)/l(s_k)) < \infty$$

Исследуем, при какой функции $l(t)$ невозмущенное движение $\theta = \theta^{\cdot} = 0$ будет притягивающим относительно угла $\theta$.

Простое вычисление показывает, что в случае системы, эквивалентной уравнению (3.1), условие (2.3) равносильно тому, что $\lim\inf_{t\to\infty} l(t) < \infty$. Используя следствие 1, получим, что если функция $l(t)$ ограничена и удовлетворяет условию (3.4), то невозмущенное движение $\theta = \theta^{\cdot} = 0$ не может быть притягивающим (следовательно, асимптотически устойчивым) ни относительно угла $\theta$, ни относительно угловой скорости $\theta^{\cdot}$.

Рассмотрим случай неограниченной функции $l(t)$; в частности, предположим, что

(3.6) $$l(t) = l_0 + ct^{\alpha} \quad (0 < l_0,\ c,\ \alpha = \mathrm{const})$$

Покажем, что при $0 < \alpha \leqslant 2$ невозмущенное движение $\theta = \theta^{\cdot} = 0$ будет притягивающим в целом относительно угла $\theta$, т. е. все решения уравнения (3.1), определенные на интервале $[t_0, \infty)$, стремятся к нулю при $t \to \infty$.

Допустим, что решение $\theta(t)$ неколеблющееся. Тогда оно монотонно меняется при достаточно больших значениях времени $t$ и стремится к конечному пределу $\nu$, так как все решения ограничены. Предположим, что $\nu \neq 0$, например, $\nu > 0$. Дважды интегрируя уравнение (3.1) от достаточно большого значения $T_0$, получим оценку

$$\theta(t) \leqslant \theta(T_0) + l(T_0)\,|\,\theta^{\cdot}(T_0)\,| \int_{T_0}^{t} (l_0 + cs^{\alpha})^{-2}\,ds - c_1 \sin\nu \int_{T_0}^{t} s^{1-\alpha} ds \to -\infty \quad (t \to \infty)$$

а это противоречит тому, что функция $\theta(t)$ ограничена. Следовательно, $\nu = 0$.

Допустим теперь, что решение $\theta(t)$ колеблющееся, т. е. существует последовательность $t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots$, обладающая свойствами

(3.7) $$\theta(t_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots), \quad \lim_{k\to\infty} t_k = 0$$

Введем обозначения

$$p(t) = (l_0 + ct^{\alpha})^2, \qquad q(t) = g(l_0 + ct^{\alpha})$$

и рассмотрим вспомогательную функцию Ляпунова (см. [6])

$$W = W(t, \theta, \theta^{\cdot}) = dV + \frac{\pi}{2}\,\frac{d^{\cdot}}{q}\,p\theta\theta^{\cdot} - \frac{\pi}{4}\left(\frac{d^{\cdot}}{q}\right)^{\cdot} p\theta^2$$

где $d = d(t)$ — трижды непрерывно дифференцируемая функция на интервале $[0, \infty)$. Производная от $W$ в силу уравнения (3.1) есть

(3.8) $$W^{\cdot} = \frac{p}{q}(\theta^{\cdot})^2 \left[\left(1 + \frac{\pi}{2}\right) d^{\cdot} - d\,\frac{(pq)^{\cdot}}{pq}\right] - \frac{\pi}{4}\left(\left(\frac{d^{\cdot}}{q}\right)^{\cdot} p\right)^{\cdot} \theta^2 + {} + d^{\cdot}\left[2(1 - \cos\theta) - \frac{\pi}{2}\,\theta\sin\theta\right]$$

Теперь $l^{\cdot\cdot}(t) \geqslant 0$, поэтому, как показывает (3.3), $v(t) = V(t, \theta(t), \theta^{\cdot}(t)) \searrow \lambda \geqslant 0$ при $t \to \infty$.

Достаточно доказать, что $\lambda = 0$. Предположим, что это не так, т. е. $\lambda > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon)$, такое, что

(3.9) $$\lambda \leqslant v(t) \leqslant (1 + \varepsilon)\lambda \quad (t \geqslant T(\varepsilon))$$

После интегрирования равенства (3.8) от $T(\varepsilon)$ до $t_k$ ($\geqslant T(\varepsilon)$), используя (3.7), получаем

(3.10) $$d(t_k)\,v(t_k) \leqslant O(1) + \int_{T}^{t_k} d^{\cdot}\left[1 + \frac{\pi}{2} - \frac{d}{d^{\cdot}}\,\frac{(pq)^{\cdot}}{pq}\right]_+ v\,dt + {} + \frac{\pi}{4}\int_{T}^{t_k}\left[\left(\left(\frac{d^{\cdot}}{q}\right)^{\cdot} p\right)^{\cdot}\right]_- \theta^2 dt \quad (k \to \infty)$$

Допустим теперь, что $\delta(t) = t^\delta$, где

$$\delta = \delta(\alpha) = \begin{cases} \min(1/2,\ 5\alpha/\pi), & 0 < \alpha < 2 \\ 3, & \alpha = 2 \end{cases}$$

Тогда

$$\mu = \lim_{t\to\infty} \frac{d\,(pq)^\cdot}{d^\cdot\,(pq)} = \lim_{t\to\infty} \frac{3\alpha c t^\alpha}{\delta\,(l_0 + ct^\alpha)} = \frac{3\alpha}{\delta} > \frac{\pi}{2} \tag{3.11}$$

Чтобы на основе (3.10) получить желаемое противоречие, необходимо оценить интеграл

$$I = I(t;\alpha,\delta) = \frac{1}{g}\int_1^t \left[\left(\left(\frac{\delta s^{\delta-1}}{l_0 + cs^\alpha}\right)^\cdot (l_0 + cs^\alpha)^2\right)^\cdot\right]_- ds$$

При $0 < \alpha < 2$ имеем

$$I(t;\alpha,\delta) \leqslant \frac{1}{g}\,\frac{\delta c\,[(\delta - 1 - \alpha)(\delta + \alpha - 2)]_-}{\delta + \alpha - 2}\,(t^{\delta+\alpha-2} - 1) = o(t^\delta) \qquad (t\to\infty) \tag{3.12}$$

$$I(t;\,2,\,3) \equiv 0$$

Пользуясь соотношениями (3.9)—(3.12), получим оценку

$$\lambda t_k^\delta = O(1) + \left[1 - \frac{\mu - \pi/2}{2}\right]_+ (1+\varepsilon)\,\lambda t_k^\delta + o(t_k^\delta) \qquad (k\to\infty)$$

так как решение $\theta(t)$ ограничено. Из этой оценки при $k\to\infty$ получаем неравенство

$$1 \leqslant \left[1 - \frac{1}{2}\left(\mu - \frac{\pi}{2}\right)\right]_+ (1+\varepsilon)$$

которое из-за (3.11) противоречит тому, что $\varepsilon > 0$ было произвольным.

Этим доказано, что при $0 < \alpha \leqslant 2$ все решения $\theta(t)$ стремятся к нулю при $t\to\infty$.

Рассмотрим случай $\alpha > 2$. Дважды интегрируя уравнение (3.1), для решения $\theta(t) = \theta(t;\,t_0,\,\theta_0,\,0)$ $(\theta_0 > 0)$ получим оценку

$$\theta(t) = \theta_0 - \int_{t_0}^t \frac{1}{p(s)} \int_{t_0}^s q(\tau)\sin\theta(\tau)\,d\tau\,ds \geqslant \theta_0 - c_2 \int_{t_0}^\infty s^{1-\alpha}\,ds \qquad (0 < c_2 = \text{const})$$

Отсюда вытекает, что для любого $\theta_0$ $(0 < |\theta_0| < \pi/2)$ существует $t_0 \geqslant 0$, такое, что

$$\liminf_{t\to\infty} |\theta(t;\,t_0,\,\theta_0,\,0)| > 0 \tag{3.13}$$

Этим доказаны следующие утверждения:

1) если длина маятника удовлетворяет условию (3.4), то невозмущенное движение $\theta = \theta^\cdot = 0$ устойчиво;

2) если длина маятника $l(t)$ ограничена и удовлетворяет условию (3.4), то невозмущенное движение $\theta = \theta^\cdot = 0$ не может быть притягивающим (следовательно, асимптотически устойчивым) ни относительно угла $\theta$, ни относительно угловой скорости $\theta^\cdot$;

3) если длина маятника изменяется по закону (3.6), тогда:

а) при $0 < \alpha \leqslant 2$ невозмущенное движение асимптотически устойчиво относительно угла $\theta$, и все решения $\theta(t;\,t_0,\,\theta_0,\,\theta_0^\cdot)$ уравнения (3.1), определенные на интервале $[t_0,\,\infty)$, стремятся к нулю при $t\to\infty$;

б) при $\alpha > 2$ для любого $\theta_0$ $(0 < |\theta_0| < \pi/2)$ существует $t_0 \geqslant 0$, такое, что решение $\theta(t;\,t_0,\,\theta_0,\,0)$ обладает свойством (3.13).

Автор благодарит В. В. Румянцева, под руководством которого выполнена работа.

Поступила 4 VI 1975

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Озиранер А. С., Румянцев В. В.* Метод функций Ляпунова в задаче об устойчивости движения относительно части переменных. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
2. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
3. *Костюковский Ю. М.-Л.* Об одной идее Н. Г. Четаева. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1972.
5. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1964.
6. *Hatvani L.* On the asymptotic behaviour of the solutions of $(p(t)x')' + q(t)f(x) = 0$. Publicationes Math. Debrecen, 1972, t. 19. fs. 1—4. p. 255—237.

---

## ИСПРАВЛЕНИЕ К СТАТЬЕ Л. ХАТВАНИ «О НЕКОТОРЫХ ПРИЗНАКАХ УСТОЙЧИВОСТИ С ДВУМЯ ФУНКЦИЯМИ ЛЯПУНОВА», ПММ, 1975, т. 39. вып. I

Недавно выяснилось, в указанной работе имеется погрешность. Я приношу благодарность Р. И. Козлову, любезно указавшему на эту погрешность. Теорема 1.1 — в той форме, как она приведена в статье,— неверна, что показывает пример, построенный Р. И. Козловым.

Однако теорема 1.1 становится верной, если условие (1.2) заменить следующим: Допустим, что для любого $\alpha$ $(0 < \alpha < H')$

$$\xi_\alpha(t) = \max\{\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x})\| : \alpha \leqslant \|\mathbf{x}\| \leqslant H'\} \in F$$

При этом в доказательстве теоремы 1.1 вместо соотношения (1.5) нужно поставить оценку

$$\frac{\gamma}{2} \leqslant \|\mathbf{x}(t_k'') - \mathbf{x}(t_k')\| \leqslant \int_{t_k'}^{t_k''} \|\mathbf{X}(t, \mathbf{x}(t))\|\, dt \leqslant \int_{t_k'}^{t_k''} \xi_\alpha(t)\, dt \to 0 \qquad (k \to \infty)$$

Аналогично, в теореме 2.1 условие (2.1) нужно заменить следующим: Допустим что для любых $\alpha$, $t_0$ $(0 < \alpha < H',\ t_0 \geqslant 0)$

$$\xi_\alpha(t, t_0) = \max\{\|\mathbf{Y}(t, \mathbf{y}, \mathbf{z})\| : \alpha \leqslant \|\mathbf{y}\| \leqslant H',\ \mathbf{z} \in E_z(t;\ t_0)\} \in F$$

В связи с этими изменениями в формулировке теоремы 3.1 вместо условий (3.2), (3.3) нужно потребовать, чтобы выполнялось условие

$$\max\left\{\sum_{i,j=1}^{n} |g_{ij}(t, \mathbf{q}) - b_{ij}(t, \mathbf{q})| : \|\mathbf{q}\| \leqslant H'\right\} \in F$$

При этом доказательство теоремы 3.1 полностью сохраняется, если в качестве второй функции Ляпунова использовать

$$W = \Sigma_{i=1}^{n} (\partial T/\partial \dot{q}_i)\, q_i$$

Заметим, что из условия

$$\xi(t) = \max\{\|\mathbf{X}(t, \mathbf{x})\| : \|\mathbf{x}\| \leqslant H'\} \in F$$

следует условие $\xi_\alpha(t) \in F$ при всех $\alpha$ $(0 < \alpha < H')$, но обратное утверждение неверно