Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.31

ВТОРОЙ МЕТОД ЛЯПУНОВА В ТЕОРИИ ФАЗОВОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

Г. А. Леонов

(Ленинград)

Для динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством построен некоторый аналог второго метода Ляпунова. С его помощью известные результаты, полученные для динамических систем второго порядка, распространены на системы с цилиндрическим фазовым пространством произвольной размерности. Доказанные теоремы применены к анализу работы системы двух синхронных машин и к исследованию «в целом» систем фазовой автоподстройки частоты.

В системах фазовой автоматической подстройки частоты (ФАПЧ) рабочими являются обычно лишь те режимы, для которых разность фаз $\sigma(t)$ эталонного и подстраиваемого генераторов — ограниченная функция времени $t \in (0, +\infty)$. Весьма часто [1, 2] из ограниченности $\sigma(t)$ для автономных систем ФАПЧ можно сделать вывод о существовании конечного предела $\sigma(t)$ при $t \to +\infty$. Наличие такого предела означает, что рассматриваемый режим работы системы ФАПЧ представляет собой режим захвата [1]. Аналогичные утверждения справедливы и для режимов работы синхронных двигателей с той разницей, что здесь роль функции $\sigma(t)$ играет разность фаз вращающихся магнитного поля и ротора [3–6].

Ниже построен некоторый аналог второго метода Ляпунова, позволяющий получать эффективные достаточные условия ограниченности и неограниченности величины $\sigma(t)$. При помощи этого метода задача об ограниченности функции $\sigma(t)$ сводится одновременно к построению некоторой функции ляпуновского типа и к решению вопроса об ограниченности всех решений некоторого дифференциального уравнения второго порядка

$$\theta^{\cdot\cdot} + R(\theta)\theta^{\cdot} + f(\theta) = 0 \tag{0.1}$$

где $R(\theta)$ и $f(\theta)$ — некоторые 2π-периодические функции. В связи с этим отметим, что уравнение (0.1) для многих важных классов функций $R(\theta)$ и $f(\theta)$ хорошо изучено. Особенно хорошо вопрос об ограниченности решений уравнения (0.1) изучен в случае $R(\theta) \equiv \mathrm{const}$. Многие результаты и список работ, посвященных исследованию уравнения (0.1), имеются в монографиях [1, 7].

1. Введем в рассмотрение заданные при $\sigma \in (-\infty, +\infty)$ непрерывные функции $f(\sigma)$, $u(\sigma)$, $v(\sigma)$ и определенные при $t \geqslant 0$ непрерывные функции $W(t)$, $\psi(t)$, непрерывно дифференцируемую функцию $\sigma(t)$. В дальнейшем будем предполагать, что при всех σ выполнены неравенства $u(\sigma) > 0$, $v(\sigma) > 0$.

Будем в дальнейшем говорить, что функция $f(\sigma)$ удовлетворяет условию A, если она непрерывно дифференцируема, 2π-периодична, имеет нули и для любого σ, удовлетворяющего условию $f(\sigma) = 0$, выполнено неравенство $f'(\sigma) \neq 0$.

Теорема 1. Пусть 2π-периодические функции $u(\sigma)$ и $v(\sigma)$ непрерывно дифференцируемы, функция $f(\sigma)$ удовлетворяет условию А и выполнены следующие требования:

1) все решения $\theta(t)$ дифференциального уравнения второго порядка

$$\theta^{\cdot\cdot} + 2\sqrt{u(\theta)\,v(\theta)}\,\theta^{\cdot} + f(\theta) = 0$$

ограничены на интервале $(0, +\infty)$;

2) при всех значениях $t \geqslant 0$, для которых $f(\sigma(t)) = 0$, $f'(\sigma(t)) < 0$, имеет место неравенство $W(t) > 0$;

3) функция

$$W(t) + \int_0^t [2u(\sigma(\tau))\,W(\tau) + v(\sigma(\tau))(\sigma^{\cdot}(\tau))^2 + f(\sigma(\tau))\,\sigma^{\cdot}(\tau)]\,d\tau$$

является невозрастающей функцией t.

Тогда функция $\sigma(t)$ ограничена на интервале $(0, +\infty)$.

Доказательство. В [7] показано, что при выполнении условия 1) теоремы для любого целого числа k существует дифференцируемая функция $F_k(\sigma)$, для которой имеют место следующие соотношения:

$$(1.1)\qquad F_k(\sigma)\,F_k'(\sigma) + 2\sqrt{u(\sigma)\,v(\sigma)}\,F_k(\sigma) + f(\sigma) = 0 \quad \forall\sigma \in (-\infty, +\infty)$$

$$F_k(\sigma_0 - 2k\pi) = 0, \quad \lim_{\sigma\to\infty} F_k(\sigma)^2 = \infty, \quad F_k(\sigma) \equiv F_0(\sigma + 2k\pi)$$

Здесь σ_0 — некоторый нуль функции $f(\sigma)$ на промежутке $[0, 2\pi]$, причем $f'(\sigma_0) < 0$. Рассмотрим далее функцию

$$V_k(t) = W(t) - {}^1/_2\, F_k(\sigma(t))^2$$

Из первого равенства (1.1) получим соотношения (u, v, f, F_k — функции от $\sigma(t)$)

$$v(\sigma^{\cdot})^2 + uF_k^2 + F_kF_k'\sigma^{\cdot} + f\sigma^{\cdot} \geqslant uF_k^2 - [4v]^{-1}[f + F_kF_k']^2 =$$
$$= [-4v]^{-1}[F_kF_k' + 2\sqrt{uv}\,F_k + f]\,[F_kF_k' - 2\sqrt{uv}\,F_k + f] = 0$$

Отсюда и из условия 3) теоремы вытекает, что функция

$$(1.2)\qquad V_k(t) + 2\int_0^t u(\sigma(\tau))\,V_k(\tau)\,d\tau$$

также невозрастающая функция t. Но тогда из неравенства $V_k(0) \leqslant 0$ следует, что при всех $t \geqslant 0$ будет $V_k(t) \leqslant 0$.

В самом деле, предполагая противное, т. е. существование числа $t_1 > 0$, для которого $V_k(t_1) > 0$, из непрерывности функции $V_k(t)$ и условия $V_k(0) \leqslant 0$ получим существование числа $t_2 \in [0, t_1)$, такого, что $V_k(t_2) = 0$ и $V_k(t) > 0$ при $t \in (t_2, t_1)$. Но в силу невозрастания функции (1.2) выполнено неравенство

$$V_k(t_1) - V_k(t_2) + 2\int_{t_2}^{t_1} u(\sigma(\tau))\,V_k(\tau)\,d\tau \leqslant 0$$

Поэтому $V_k(t_1) \leqslant V_k(t_2) = 0$. Последнее неравенство противоречит предположению о том, что $V_k(t_1) > 0$. Полученное противоречие и доказывает, что из неравенства $V_k(0) \leqslant 0$ следует оценка $V_k(t) \leqslant 0$ при всех $t \geqslant 0$.

Из последних двух соотношений (1.1) вытекает, что при достаточно большом значении k выполняются неравенства

$$(1.3)\qquad V_k(0) \leqslant 0, \quad V_{-k}(0) \leqslant 0, \quad |\sigma(0) - \sigma_0| \leqslant 2k\pi$$

Возьмем далее число k таким, чтобы выполнялись неравенства (1.3). Но тогда, как было показано выше

(1.4) $$V_k(t) \leqslant 0, \quad V_{-k}(t) \leqslant 0, \quad \forall t \geqslant 0$$

Покажем, что

(1.5) $$|\sigma(t) - \sigma_0| \leqslant 2k\pi, \quad \forall t \geqslant 0$$

Предполагая противное, т. е. наличие такого числа $t_1 > 0$, для которого неравенство (1.5) не выполнено, из непрерывности функции $\sigma(t)$ получим, что существует число $t_2 \in [0, t_1)$, для которого $|\sigma(t_2) - \sigma_0| = 2k\pi$. Но тогда $f(\sigma(t_2)) = 0$, $f'(\sigma(t_2)) < 0$ и либо $F_k(\sigma(t_2)) = 0$, либо $F_{-k}(\sigma(t_2)) = 0$. Отсюда и из неравенств (1.4) вытекает, что $W(t_2) \leqslant 0$. Эта оценка и соотношения $f(\sigma(t_2)) = 0$, $f'(\sigma(t_2)) < 0$ противоречат условию 2) теоремы. Полученное противоречие и доказывает справедливость (1.5). А это и означает, что функция $\sigma(t)$ ограничена на интервале $(0, +\infty)$.

Теорема 2. Предположим, что существует непрерывно дифференцируемая функция $F(\sigma)$, для которой выполнены следующие условия:

1) $F(\sigma) > 0, \quad \forall \sigma \in (-\infty, +\infty)$

2) $F(\sigma) F'(\sigma) + \sqrt{2v(\sigma)}\, u(\sigma) F(\sigma) + f(\sigma) = 0, \quad \forall \sigma \in (-\infty, +\infty)$

Пусть, кроме того

3) $W(t) + v(\sigma(t))(\sigma^\cdot(t))^2 \geqslant 0, \quad \forall t \geqslant 0$

4) при всех значениях $t \geqslant 0$, для которых $\sigma^\cdot(t) > 0$, выполнено неравенство $\psi(t) < f(\sigma(t))$;

5) функция

$$W(t) + \int_0^t [2u(\sigma(\tau)) W(\tau) - \psi(\tau) \sigma^\cdot(\tau)]\, d\tau$$

является невозрастающей функцией t;

6) имеют место неравенства $\sigma^\cdot(0) > 0$, $2W(0) < -F(\sigma(0))^2$.

Тогда при всех $t \geqslant 0$ выполнено неравенство

(1.6) $$\sigma^\cdot(t) \geqslant F(\sigma(t)) / \sqrt{2v(\sigma(t))}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$V(t) = W(t) + {}^1/_2 F(\sigma(t))^2$$

Из условия (6) теоремы вытекает, что $V(0) < 0$. Предположим далее, что $V(t) < 0$ при $t \in [0, T)$. Тогда

$$W(t) + v(\sigma^\cdot)^2 \leqslant -{}^1/_2 F^2 + v(\sigma^\cdot)^2, \quad t \in [0, T]$$

и в силу условия 3) теоремы $F^2 \leqslant 2v(\sigma^\cdot)^2$. Отсюда и из условия 6) и вытекает при $t \in [0, T]$ оценка (1.6). По тогда из условия 4) получим неравенство

(1.7) $$\psi(t) \sigma^\cdot(t) \leqslant f(\sigma(t)) \sigma^\cdot(t) - \delta(t), \quad t \in [0, T]$$

где $\delta(t)$ — некоторая непрерывная положительная функция. Далее из условия 2) и оценки (1.6) при $t \in [0, T]$ вытекает соотношение

$$uF^2 + [f + FF'] \sigma^\cdot \leqslant [\sqrt{2v}]^{-1} F [FF' + \sqrt{2v}\, uF + f] = 0$$

Отсюда, из неравенства (1.7) и условия 5) теоремы вытекает, что функция

(1.8) $$V(t) + \int_0^t [2u(\sigma(\tau))V(\tau) + \delta(\tau)]\,d\tau$$

является невозрастающей функцией t на промежутке $[0, T]$.

Предположим теперь, что $V(T) = 0$. Выберем тогда интервал (T_1, T) настолько малым, чтобы при $t \in (T_1, T)$

(1.9) $$\delta(t) > 2u(\sigma(t))\,|V(t)|$$

Поскольку функция (1.8) — невозрастающая на $[0, T]$, имеет место неравенство

$$V(T) - V(t) + \int_t^T [2u(\sigma(\tau))V(\tau) + \delta(\tau)]\,d\tau \leqslant 0$$

Отсюда и из условия (1.9) следует, что $V(T) < V(t)$ при $t \in (T_1, T)$. Но тогда из предположения о том, что $V(T) = 0$, вытекает неравенство $V(t) > 0$ при $t \in (T_1, T)$. Последнее соотношение противоречит сделанному ранее предположению о том, что $V(t) < 0$ при $t \in [0, T)$. Полученное противоречие доказывает неравенство $V(T) < 0$. Отсюда следует, что $V(t) < 0$ при всех $t \geqslant 0$. Но тогда, как было показано выше, и оценка (1.6) выполнена при всех $t \geqslant 0$.

2. Уравнения, описывающие работу системы двух синхронных машин при нулевых активных сопротивлениях обмоток статоров, чисто реактивном четырехполюснике, связывающем машины, и при предположении о том, что демпферный момент ротора каждой машины пропорционален скольжению и моменту инерции ротора, имеют вид [6]

(2.1) $$\frac{d\sigma}{dt} = \xi,\quad \frac{d\xi}{dt} = -\alpha_1\xi + \frac{\alpha_4}{\alpha_9}[\alpha_5\alpha_6\sin\sigma_0 - $$
$$- (\alpha_5 + i_1)(\alpha_6 + i_2)\sin(\sigma + \sigma_0)]$$
$$\alpha_2\frac{di_1}{dt} + \alpha_4\cos(\sigma + \sigma_0)\frac{di_2}{dt} = \alpha_4(\alpha_6 + i_2)\,\xi\sin(\sigma + \sigma_0) - \alpha_7 i_1$$
$$\alpha_3\frac{di_2}{dt} + \alpha_4\cos(\sigma + \sigma_0)\frac{di_1}{dt} = \alpha_4(\alpha_5 + i_1)\,\xi\sin(\sigma + \sigma_0) - \alpha_8 i_2$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_9$ — некоторые положительные постоянные, число $\sigma_0 \in [0, {}^1/_2\pi]$. Далее будем также предполагать, что $\alpha_2\alpha_3 > \alpha_4^2$. Отметим, что последнее неравенство всегда выполнено для систем с неразветвленной передачей [6].

Рассмотрим некоторое нетривиальное решение системы (2.1) $\sigma(t)$, $\xi(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$ и применим к нему теорему 1. Для этого определим функции $W(t)$ и $f(\sigma)$ следующим образом:

$$W(t) = {}^1/_2\alpha_9\xi(t)^2 + {}^1/_2\alpha_2 i_1(t)^2 + {}^1/_2\alpha_3 i_2(t)^2 +$$
$$+ \alpha_4\cos(\sigma(t) + \sigma_0)\, i_1(t)\, i_2(t)$$
$$f(\sigma) = \alpha_4\alpha_5\alpha_6[\sin(\sigma + \sigma_0) - \sin\sigma_0]$$

Из неравенства $\alpha_2\alpha_3 > \alpha_4^2$ и нетривиальности рассматриваемого решения сразу следует, что выполнено условие 2) теоремы.

Легко видеть, что

$$W^{\cdot}(t) = -\alpha_7(i_1(t))^2 - \alpha_8(i_2(t))^2 - f(\sigma(t))\,\xi(t) - \alpha_1\alpha_9\xi(t)^2$$

Поэтому если числа $\lambda > 0$ и $\varepsilon > 0$ удовлетворяют соотношениям

$$(2.2)\qquad \alpha_7 - \lambda\alpha_2 > 0,\quad \alpha_8 - \lambda\alpha_3 > 0$$
$$\alpha_9(\alpha_1 - \lambda) \geqslant \varepsilon,\quad (\alpha_7 - \lambda\alpha_2)(\alpha_8 - \lambda\alpha_3) \geqslant \lambda^2\alpha_4^2$$

то выполнено неравенство

$$W^{\cdot}(t) + 2\lambda W(t) + f(\sigma(t))\xi(t) + \varepsilon\xi(t)^2 \leqslant 0$$

и, следовательно, имеет место условие 3) теоремы 1, где $u(\sigma) \equiv \lambda$, $v(\sigma) \equiv \varepsilon$.

Таким образом, если найдутся положительные числа λ и ε, такие, что имеют место неравенства (2.2) и все решения уравнения второго порядка

$$(2.3)\qquad \theta^{\cdot\cdot} + 2\sqrt{\varepsilon\lambda}\,\theta^{\cdot} + \alpha_4\alpha_5\alpha_6[\sin(\theta + \sigma_0) - \sin\sigma_0] = 0$$

ограничены на интервале $(0, +\infty)$, то выполнены все условия теоремы 1 и, следовательно, $\sigma(t)$ ограничена на интервале $(0, +\infty)$.

Положив

$$\lambda_0 = \frac{\alpha_2\alpha_8 + \alpha_3\alpha_7 - \sqrt{(\alpha_2\alpha_8 - \alpha_3\alpha_7)^2 + 4\alpha_7\alpha_8\alpha_4^2}}{2(\alpha_2\alpha_3 - \alpha_4^2)}$$

$$\varepsilon = \alpha_9(\alpha_1 - \lambda),\quad \Gamma = \begin{cases} \lambda_0(\alpha_1 - \lambda_0), & 2\lambda_0 \leqslant \alpha_1 \\ 0.25\alpha_1^2, & 2\lambda_0 \geqslant \alpha_1 \end{cases}$$

и воспользовавшись известной теоремой Бёма — Хейза [7-10], окончательно получим, что если

$$(2.4)\qquad \left(\sin\frac{\sigma_0}{2}\right)^2 \leqslant \frac{\alpha_9\Gamma}{\alpha_4\alpha_5\alpha_6}$$

то функция $\sigma(t)$ ограничена на интервале $(0, +\infty)$.

С помощью функции ляпуновского типа, построенной в работе [6] (стр. 78—79), легко убедиться в моностабильности [11, 12] системы (2.1) и в ограниченности функций $\xi(t)$, $i_1(t)$, $i_2(t)$ на интервале $(0, +\infty)$. Поэтому если выполнено неравенство (2.4), то любое решение системы (2.1) стремится при $t \to +\infty$ к некоторому состоянию равновесия и, следовательно, для рассматриваемой энергосистемы в любом режиме работы будет иметь место либо динамическая, либо результирующая устойчивость.

3. Уравнения, описывающие динамику типовой автономной системы ФАПЧ, имеют вид

$$(3.1)\qquad x^{\cdot} = Ax + b\varphi(\sigma),\quad \sigma^{\cdot} = c^*x + \rho\varphi(\sigma)$$

где A — постоянная гурвицева $n \times n$-матрица, b и c — постоянные n-векторы, ρ — число, $\varphi(\sigma)$ — 2π-периодическая функция.

Введем в рассмотрение функцию $\chi(p) = c^*(A - pI)^{-1}b$, где p — комплексное число.

Теорема 3. Пусть функция $\chi(p)$ невырождена [13] и существуют такие числа $\varepsilon > 0$, $\lambda > 0$ и μ, что выполнены следующие условия:

1) функция $\varphi(\sigma)(1 + \mu\varphi'(\sigma))$ удовлетворяет условию A и при всех $\sigma \in (-\infty, +\infty)$ имеет место неравенство $1 + \mu\varphi'(\sigma) \neq 0$;

2) $\quad \mu\lambda + \operatorname{Re}\chi(i\omega - \lambda) - \rho - \varepsilon\,|\chi(i\omega - \lambda) - \rho|^2 \geqslant 0,$
$\forall\,\omega \geqslant 0$

3) матрица $A + \lambda I$ гурвицева;

4) все решения $\theta(t)$ уравнения второго порядка

$$\theta^{\cdot\cdot} + 2\sqrt{\lambda\varepsilon}\,\theta^{\cdot} + \varphi(\theta)(1 + \mu\varphi'(\theta)) = 0$$

ограничены на интервале $(0, +\infty)$.

Тогда любое решение системы (3.1) ограничено на интервале $(0, +\infty)$.

Доказательство. По лемме Якубовича — Калмана [13] из условия 2) теоремы 3 вытекает существование такой постоянной $n \times n$-матрицы $H = H^*$, что при всех $x \in R^n$ и $\xi \in (-\infty, +\infty)$ выполнено неравенство

$$2x^*H[(A + \lambda I)x + b\xi] - \mu\lambda\xi^2 + \xi(c^*x + \rho\xi) + \varepsilon(c^*x + \rho\xi)^2 \leqslant 0 \tag{3.2}$$

В случае $\xi = 0$ неравенство (3.2) принимает вид

$$2x^*H(A + \lambda I)x \leqslant -\varepsilon(c^*x)^2$$

Отсюда, из невырожденности $\chi(p)$ и гурвицевости матрицы $A + \lambda I$ по лемме 1 [14] вытекает неравенство $H > 0$.

Введем в рассмотрение функции

$$W(t) = x(t)^* Hx(t) - 1/2\mu\varphi(\sigma(t))^2$$

$$f(\sigma) = \varphi(\sigma)(1 + \mu\varphi'(\sigma))$$

Здесь $x(t)$, $\sigma(t)$ — некоторое нетривиальное решение системы (3.1). Из положительной определенности матрицы H, нетривиальности рассматриваемого решения системы (3.1) и неравенства $1 + \mu\varphi'(\sigma) \neq 0$ сразу следует выполнение условия 2) теоремы 1.

Из неравенства (3.2) вытекает оценка

$$W^{\cdot}(t) + 2\lambda W(t) + \varepsilon(\sigma^{\cdot}(t))^2 + f(\sigma(t))\,\sigma^{\cdot}(t) \leqslant 0, \quad \forall t \geqslant 0$$

Таким образом, при $u(\sigma) \equiv \lambda$, $v(\sigma) \equiv \varepsilon$ выполнено условие 3) теоремы 1, а условие 4) теоремы 3 и условие 1) теоремы 1 совпадают.

Итак, выполнены все условия теоремы 1 и, следовательно, решение $\sigma(t)$ системы (3.1) ограничено на интервале $(0, +\infty)$. Ограниченность решения $x(t)$ следует из гурвицевости матрицы A и ограниченности функции $\varphi(\sigma)$.

4. В случае, если передаточная функция фильтра нижних частот — правильная дробно-рациональная функция и на вход фильтра нижних частот действует некоторое возмущение, уравнения типовой системы ФАПЧ примут вид

$$x^{\cdot} = Ax + b[\varphi(\sigma) + g(t)], \quad \sigma^{\cdot} = c^*x \tag{4.1}$$

где A — постоянная $n \times n$-матрица, b и c — постоянные n-векторы, $\varphi(\sigma)$ и $g(t)$ — непрерывные функции. Функция $\varphi(\sigma)$, кроме того, 2π-периодична. Будем предполагать также, что

$$g(t) \leqslant 0, \quad \forall t \geqslant 0; \quad \int_0^{2\pi} \varphi(\sigma)\,d\sigma \leqslant 0$$

Теорема 4. Пусть функция $\chi(p) = c^*(A - pI)^{-1}b$ невырождена, $c^*b < 0$ и существует такое число $\lambda > 0$, что выполнены следующие условия:

1) $\operatorname{Re}\chi(i\omega - \lambda) < 0, \quad \forall \omega \geqslant 0$

2) $\lim\limits_{\omega\to\infty} \omega^2 \operatorname{Re}\chi(i\omega - \lambda) < 0$

3) матрица $A + \lambda I$ имеет одно положительное собственное значение и $(n - 1)$ собственное значение с отрицательными вещественными частями,

4) уравнение второго порядка

$$\theta^{\cdot\cdot} + \sqrt{-\frac{1}{c^*b}}\,\lambda\theta^{\cdot} + \varphi(\theta) = 0$$

имеет неограниченное на интервале $(0, +\infty)$ решение $\theta(t)$.

Тогда система (4.1) имеет неограниченное на интервале $(0, +\infty)$ решение.

Доказательство. Из условий 1)—3) теоремы 4 по лемме Якубовича — Калмана [13] вытекает существование такого числа $\delta > 0$ и такой постоянной $n \times n$-матрицы $H = H^*$, имеющей одно отрицательное и $(n-1)$ положительное собственное значение, что при всех $x \in R^n$ и $\xi \in (-\infty, +\infty)$

$$2x^*H[(A+\lambda I)x + b\xi] - c^*x\xi \leqslant -\delta(c^*x)^2 \tag{4.2}$$

Из неравенства (4.2) следует, что $2Hb = c$. Отсюда вытекает, что

$$\det\left(H - \frac{cc^*}{2c^*b}\right) = \det H \det\left(I - \frac{H^{-1}cc^*}{2c^*b}\right) = \det H\left(1 - \frac{c^*H^{-1}c}{2c^*b}\right) = 0$$

Из этого соотношения и из того факта, что H имеет одно и только одно отрицательное собственное значение и $\det H \neq 0$, следует неравенство $H - (2c^*b)^{-1}cc^* \geqslant 0$. Отсюда сразу следует, что выполнено условие 3) теоремы 2, если $W(t) = x(t)^*Hx(t)$, $v(\sigma) \equiv -(2c^*b)^{-1}$, $x(t)$ — некоторое решение системы (4.1).

Положим далее $f(\sigma) = \varphi(\sigma)$, $\psi(t) = \varphi(\sigma(t)) - \delta\sigma^{\cdot}(t) + g(t)$, $\sigma(t)$ — некоторое решение системы (4.1). Тогда из неравенства (4.2) вытекает, что имеет место соотношение

$$W^{\cdot}(t) + 2\lambda W(t) \leqslant \psi(t)\sigma^{\cdot}(t), \qquad \forall t \geqslant 0$$

Отсюда следует, что при $u(\sigma) \equiv \lambda$ выполнено условие 5) теоремы 2. Наличие же функции $F(\sigma)$, фигурирующей в условиях 1) и 2) теоремы 2, вытекает [7] из условия 4) теоремы 4.

Таким образом, если для решения $x(t)$, $\sigma(t)$ выполнены неравенства

$$c^*x(0) > 0, \quad x(0)^*Hx(0) < -{}^1/_2\, F(\sigma(0))^2 \tag{4.3}$$

то это решение неограничено на интервале $(0, +\infty)$. Из условий на спектр матрицы H ясно, что существует вектор $x(0)$ и число $\sigma(0)$, удовлетворяющие неравенствам (4.3).

Поступила 24 III 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шахгильдян В. В., Ляховкин А. А.* Системы фазовой автоподстройки частоты. М., «Связь», 1972.
2. *Леонов Г. А.* Об ограниченности траекторий фазовых систем. Сиб. матем. ж., 1974, т. 15, № 3.
3. *Горев А. А.* Переходные процессы синхронной машины. М., Госэнергоиздат, 1950.
4. *Жданов П. С.* Устойчивость электрических систем. М.— Л., Госэнергоиздат, 1948.
5. *Лебедев С. А., Жданов П. С.* Устойчивость параллельной работы электрических систем. М.— Л., Госэнергоиздат, 1934.
6. *Янко-Триницкий А. А.* Новый метод анализа работы синхронных двигателей при резкопеременных нагрузках. М., Госэнергоиздат, 1958.
7. *Барбашин Е. А., Табуева В. А.* Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М., «Наука», 1969.
8. *Bohm C.* Nuòvi criteri di esistenza di soluzioni periodiche di una hota equazione differenziale non lineare. Ann. mat. pura ed appl., 1953. vol. 35, p. 343—353.
9. *Hayes W. D.* On the equation for a damped pendulum under constant torque. Z. angew. Math. and Phys., 1953, Bd 4, Nr 5.
10. *Cartwright M. L.* Some aspects of the theory of non-linear vibrations. Proc. Internat. Congr. Mathematicians. Amsterdam, 1954, vol. 3. Groningen — Amsterdam, North Holland Publ., 1956.
11. *Kalman R. E.* Physical and Mathematical mechanisms of instability in non-linear automatic control systems. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1957, vol. 79, No. 3.
12. *Гелиг А. Х., Леонов Г. А.* Моностабильность многосвязных систем с разрывными монотонными нелинейностями и неединственным положением равновесия. Автоматика и телемеханика, 1973, № 6.
13. *Попов В. М.* Гиперустойчивость автоматических систем. М., «Наука», 1970.
14. *Якубович В. А.* Частотные условия автоколебаний в нелинейных системах с одной стационарной нелинейностью. Сиб. матем. ж., 1973, № 5.