Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.31

О ПРЕЦЕССИОННЫХ УРАВНЕНИЯХ ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИСТЕМ

А. И. Кобрин, Ю. Г. Мартыненко, И. В. Новожилов

(Москва)

При исследовании уравнений гироскопических систем практически всегда приходится разделять быстрые — нутационные и медленные — прецессионные движения. Упрощенные уравнения, которыми описываются оба класса движения, могут быть получены разными способами [1].

В данной работе для формализации перехода к прецессионным уравнениям используются методы фракционного анализа [2], основанного на объединении методов теории подобия и размерности с асимптотическими методами теории дифференциальных уравнений. Изучается асимптотика решений полных уравнений гироскопической задачи при стремлении к нулю отношения характерных времен T_n, T_p нутационных и прецессионных составляющих движения гироскопической системы.

Определение. Прецессионными уравнениями гироскопических систем называются уравнения, решения которых на временах порядка T_p представляют асимптотическое приближение нулевого порядка по малому параметру $\mu = T_n / T_p$ для медленных составляющих движения. (T_n, T_p — характерные времена нутационных и прецессионных составляющих соответственно.)

Точный смысл данного определения раскрывается ниже.

Проведем краткое обсуждение ситуаций, возникающих при переходе к прецессионным уравнениям. Некоторые из случаев рассматривались ранее [3, 4].

Общие уравнения гироскопических систем запишем в следующем виде [1]:

$$q^{\cdot} = A^{-1}p, \quad p^{\cdot} = \frac{1}{2} p^T (A^{-1})^T \frac{\partial A}{\partial q} A^{-1}p + Q + (B + H) A^{-1}p \tag{1}$$
$$q(0) = q^{\circ}, \quad p(0) = p^{\circ}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени, $q = (q_j)$ — вектор обобщенных координат, определяющих угловое положение элементов гироскопической системы, $A = (A_{jk})$ — матрица моментов инерции, $B = (B_{jk})$ — матрица коэффициентов диссипации, $H = (H_{jk})$ — матрица гироскопических коэффициентов, $Q = (Q_j)$ — вектор обобщенных сил, действующих на систему, q°, p° — начальные значения обобщенных координат и импульсов, T — знак транспонирования. Дальнейшие построения проводятся при некоторых предположениях о поведении функций A_{jk}, B_{jk}, H_{jk}, Q_j, входящих в уравнение (1). Для сокращения изложения некоторые требования типа гладкости функций, равномерной ограниченности и т. п. не будут оговариваться явно. При этом предполагается, что рассматриваемые функции удовлетворяют всем необходимым требованиям.

Нормализуем [2, 5] уравнения движения (1) гироскопической системы. Положим

$$q = q_* y, \quad A^{-1}p = \omega_* z, \quad A = A_* a, \quad B = B_* b, \quad H = H_* h, \quad Q = Q_* f \tag{2}$$

Здесь звездочкой обозначены характерные для рассматриваемого класса движений значения соответствующих величин. Они выбираются так, чтобы компоненты безразмерных матриц y, z, a, b, h, f были величинами порядка единицы. Выберем, кроме того, характерную для рассматриваемого класса движений гироскопической системы постоянную времени T_* за единицу измерения времени и соответственно введем безразмерное время.

Считаем далее, что геометрические и массовые характеристики элементов гироскопической системы соответственно являются величинами одного порядка и положим

$$A_* = \max\{A_{jk}\}, \quad B_* = \max\{B_{jk}\}, \quad H_* = \max\{H_{jk}\}$$

Величина Q_* в (2) представляет собой максимальное значение обобщенных сил в рассматриваемой области изменения обобщенных координат и времени. Эта область выбирается, исходя из конструктивных особенностей и условий работы гироскопической системы.

В гироскопических системах за обобщенные координаты обычно принимаются углы поворотов элементов конструкции. Будем считать, что эти углы могут быть достаточно велики, так что $q_* = 1$. Угловые скорости гироскопической системы определяются величинами и частотами управляющих сигналов и возмущений. Например, в случае одноосного силового гиростабилизатора характерные значения ω_* определяются параметрами цепи обратной связи.

В данной заметке предполагается, что «жесткое» управление в гироскопической системе отсутствует и что величины «быстрых» и «медленных» составляющих угловых скоростей сравнимы по порядку. Известно [5], что быстрая составляющая угловой скорости представляет собой колебания с амплитудой, равной произведению величины порядка весьма малых долей радиана на частоту нутации, а медленная составляющая определяется прецессией гироскопов под действием приложенных к ним моментов. Для определенности выберем ω_* равной характерной угловой скорости прецессии $\omega_* = Q_* / H_*$.

Подставив выбранные значения характерных параметров (2) в (1), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & dy/dt = \frac{T_*}{T_p} z, \quad y(0) = \frac{q^\circ}{q_*} \equiv y^\circ \\ & \frac{T_n}{T_*}\frac{d}{dt}(az) = \frac{1}{2}\frac{T_n}{T_p} z^T \frac{\partial a}{\partial y} z + f - (\varkappa b + h) z \\ & z(0) = A^{-1}p^\circ / \omega_* \equiv z^\circ \\ & (T_p = H_* / Q_*, \quad T_n = A_* / Q_*, \quad \varkappa = B_* / H_*) \end{aligned} \tag{3}$$

Величины T_n, T_p естественно назвать нутационной и прецессионной постоянными времени. Считаем далее, что $T_n \ll T_p$. (Это предположение справедливо для большинства гироскопических систем.)

Если рассматривается неавтономная задача, то введем еще характерное время возмущения T_f. (Для гармонического возмущения в качестве T_f можно выбрать величину порядка периода возмущения.) Если $T_f \sim T_n$, то будем говорить, что система находится под действием быстрых (высокочастотных) возмущений, при $T_f \sim T_p$ возмущения считаются медленными.

В общем случае в (3) можно принять

$$\varkappa = \mu^\alpha, \quad \mu = T_n / T_p, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1 \tag{4}$$

Предельный случай $\alpha = 0$ ($\varkappa = 1$) назовем случаем сильно демпфированной гироскопической системы. (Примером такой системы может служить система на поплавковых гироскопах.) Предельный случай $\alpha = 1$ ($\varkappa = \mu$) назовем случаем слабо демпфированной гироскопической системы (например система с малым трением в осях карданового подвеса.)

Соотношение типа (4) использовалось в работе [6], где при $0 < \alpha < 1$ рассматривались периодические решения сингулярно возмущенных уравнений, порожденных гироскопическими системами.

Ограничимся рассмотрением следующих случаев, различающихся по характерным величинам параметров $\varkappa$ и T_f.

Случай А. Возмущения медленные ($T_f = T_p$) и гироскопы системы сильно демпфированы, т. е. $\varkappa = 1$.

Выберем в (3) в качестве характерного времени $T_* = T_p$, тогда

$$\begin{cases} dy/dt = z \\ \mu \dfrac{d}{dt}[a(y, t) z] = \dfrac{\mu}{2} z^T \dfrac{\partial a(y, t)}{\partial y} z + f(y, t) - [\varkappa b(y, t) + h(y, t)] z \\ y(0) = y^\circ, \quad z(0) = z^\circ, \quad \varkappa = 1 \end{cases} \tag{5}$$

Уравнения (5) — дифференциальные уравнения с малым параметром при производных. Вырожденная [7] система уравнений для системы (5) имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} dv/dt = w, \quad v(0) = y^\circ \\ f(v, t) - [b(v, t) + h(v, t)] w = 0 \end{gathered} \tag{6}$$

Достаточные условия допустимости применения уравнений (6) для описания движения гироскопической системы дает

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия:

а) Определитель матрицы $b(y, t) + r(y, t)$ в рассматриваемой области изменения переменных $D = \{t, y : t \in [0, c_1], \| y \| \leqslant y_1\}$ отличен от нуля.

б) Решение $v = v(t)$ системы (6) существует и единственно при всех $t \in [0, c_1]$.

в) При всех t, y из некоторой ограниченной замкнутой области, содержащей вырожденное решение $v = v(t)$, имеет место асимптотическая устойчивость точки равновесия $w(y, t) = [b(y, t) + h(y, t)]^{-1} f(y, t)$ присоединенной системы дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{d\tau}[a(y, t) z] = f(y, t) - [b(y, t) + h(y, t)] z \tag{7}$$

в которой y и t рассматриваются как параметры, а $\tau = t / \mu$ — быстрое время.

Тогда $v(t)$, $w(t)$ представляют собой асимптотическое приближение нулевого порядка для точного решения $y(t, \mu)$, $z(t, \mu)$ полных уравнений (5), т. е.

$$(8) \qquad \| y(t, \mu) - v(t) \| = O(\mu) \quad \text{при} \quad t = O(1)$$

Точный смысл соотношения (8) состоит в существовании таких не зависящих от μ постоянных c_1, c_2, что при всех значениях медленного времени t из интервала $0 \leqslant t \leqslant c_1$ имеет место оценка

$$\| y(t, \mu) - v(t) \| \leqslant c_2 \mu$$

справедливая для всех достаточно малых $\mu < \mu_0$. Постоянная c_1 может быть взята произвольной, это, разумеется, повлияет на величины c_2 и μ_0.

Доказательство теоремы 1 непосредственно вытекает из теоремы А. Н. Тихонова [7], если учесть, что в рассматриваемом случае в силу линейности присоединенной системы (7) по z область влияния устойчивого корня вырожденного уравнения [7] будет неограничена. (При решении конкретных задач берутся только те z, которые не нарушают условий нормализации (2).) Отметим, что близость решений полной и вырожденной систем по быстрым переменным z имеет место вне некоторого начального временного интервала, который оценивается величиной порядка $\mu \ln (1 / \mu)$ и носит название экспоненциального пограничного слоя по времени.

Итак, согласно данному выше определению, соотношения (6) представляют собой прецессионные уравнения гироскопических систем. При наличии предельного перехода от полных уравнений к вырожденным предлагаемый способ построения прецессионных уравнений приводит к таким же уравнениям, что и в [1].

Случай Б. Возмущения медленные ($T_f = T_p$), гироскопы системы демпфированы слабо, т. е. $\varkappa = \mu$. (Данный случай охватывает также и консервативные системы, в которых демпфирование полностью отсутствует.) В этом случае условия теоремы А. Н. Тихонова о предельном переходе от системы (5) к системе (6) при $\mu \to 0$ не выполняются.

Для обоснования перехода к прецессионным уравнениям в случае Б следует воспользоваться, например, аппаратом осреднения в форме В. М. Волосова [8].

Проведем в (5) замену времени $t = \mu\tau$. Тогда при $\varkappa = \mu$ уравнения движения гироскопической системы будут иметь вид

$$(9) \qquad \frac{dy}{d\tau} = \mu z, \quad \frac{dt}{d\tau} = \mu$$

$$\frac{d}{d\tau}[a(y, t) z] = \frac{\mu}{2} z^T \frac{\partial a(y, t)}{\partial y} z + f(y, t) - [\mu b(y, t) + h(y, t)] z$$

$$y(0) = y^\circ, \quad z(0) = z^\circ$$

Запись системы (5) в быстром времени отвечает выбору в (3) единицы измерения времени, равной нутационной постоянной времени $T_* = T_n$.

Конечному промежутку изменения медленного времени t $0 \leqslant t \leqslant c_1$ соответствует асимптотически большой промежуток изменения быстрого времени τ: $0 \leqslant \tau \leqslant c_1 / \mu$.

Полагая в (9) $\mu = 0$, получим так называемую порождающую систему дифференциальных уравнений

$$d/d\tau\, [a\,(v,\ t)\, w] = f\,(v,\ t) - h\,(v,\ t)\, w, \quad w\,(0) = z^\circ \tag{10}$$

Здесь v, t рассматриваются как параметры, поэтому a_{jk}, h_{jk}, f_j—постоянные по τ величины. Порождающая система аналогично присоединенным уравнениям (7) описывает быстрые движения рассматриваемой механической системы в каждый момент времени.

При изучении случая Б выделим следующие подслучаи:

Б1. $\det h \neq 0$. Б2. $\det h = 0$

При $\det h \neq 0$ решение системы (10) представляет собой сумму постоянной составляющей $h^{-1} f$ и набора гармонических составляющих — нутационных колебаний системы [1].

Уравнение для нахождения приближенного с точностью до первого порядка малости по μ решения системы (9) по медленным переменным имеет следующий вид:

$$\frac{dv}{d\tau} = \mu \langle w \rangle, \qquad \langle w \rangle = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T w\,(z^\circ,\, v,\, t,\, \tau)\, d\tau \tag{11}$$

Здесь $\langle w \rangle$ — результат осреднения решения порождающей системы (10).

При подсчете указанного предела колебательные составляющие решения выпадают и, следовательно, (11) представляется в виде

$$dv/dt = h^{-1}\,(v,\ t)\, f\,(v,\ t), \quad v\,(0) = y^\circ \tag{12}$$

Уравнения (12) являются прецессионными уравнениями гироскопических систем в рассматриваемом случае. Отметим, что уравнения (12) отличаются от упрощенных уравнений гироскопии, получаемых в результате приравнивания нулю некоторой части выражения для кинетической энергии [1]. В данном случае прецессионные уравнения проще, чем в [1],— они не содержат диссипативных членов.

Когда число обобщенных координат системы нечетно, имеем случай Б2 — $\det h\,(y,\ t) = 0$. При этом результат осреднения решения порождающей системы (если предел $\langle w \rangle$ существует) зависит от начальных условий для быстрых переменных z. Следовательно, в случае Б2 в соответствии с общей схемой осреднения [8] переход к прецессионным уравнениям нужно понимать как построение замены, увеличивающей число координат в векторе медленных переменных.

В качестве примера выпишем в явном виде уравнения для медленных составляющих решения системы (9) при $\det h = 0$ в частном случае, когда $a\,(y,\ t)$ — единичная матрица. Пусть для определенности размерность вектора z равна $2r + 1$, а матрица h от y не зависит и имеет одно нулевое собственное значение. Остальные собственные значения кососимметричной матрицы h будут, как известно, чисто мнимыми. Пусть, кроме того, $f(y,\ t) = 0$. (Это содержательное требование, поскольку при $f(y,\ t) \neq 0$ и $\det h = 0$ может оказаться, что предела решения порождающей системы не существует.)

При сделанных допущениях система (9) имеет вид

$$\frac{dy}{d\tau} = \mu z, \qquad \frac{dt}{d\tau} = \mu, \qquad \frac{dz}{d\tau} = -[h(t) + \mu b(y, t)]\, z \tag{13}$$

$$y(0) = y^\circ, \qquad z(0) = z^\circ$$

Порождающая система

$$dw/d\tau = -h(t)\, w, \qquad w(0) = z^\circ \tag{14}$$

Используя в качестве новых переменных в (13) вектор произвольных постоянных из решения порождающей системы (14), можно получить соответствующую (13) систему уравнений в стандартной форме [8]. Выполняя в указанной системе процедуру осреднения, приходим к следующим уравнениям $(2r+2)$-го порядка для расширенного вектора медленных переменных:

$$\frac{dv}{dt} = k\zeta(t) \qquad (k = \zeta^T(t)\, z) \tag{15}$$

$$\frac{dk}{dt} = -k\zeta^T(t)\left(b(v, t)\,\zeta(t) + \frac{d\zeta(t)}{dt}\right)$$

$$v(0) = y^\circ, \quad k(0) = \zeta^T(0)\, z^\circ, \quad \|\zeta(t)\| = 1$$

Здесь $\zeta(t)$ — нормированный собственный вектор матрицы $h(t)$, отвечающий нулевому собственному значению, k — новая скалярная переменная, являющаяся элементом вектора произвольных постоянных, отнесенным к частному решению с нулевым собственным значением. Отметим, что k представляет собой интеграл порождающей системы (14) и является проекцией вектора z на направление, определяемое собственным вектором $\zeta(t)$.

Уравнения (15) могут рассматриваться как прецессионные уравнения для гироскопической системы (13).

Из теоремы о первом приближении общей схемы осреднения непосредственно вытекает

Теорема 2. При достаточно малых μ на интервале времени $0 \leqslant \tau \leqslant c_1/\mu$ решения уравнений (9) и (12) (случай Б1) и решения уравнений (13) и (15) (случай Б2) будут сколь угодно близки.

Заметим, что при этом близость по быстрым переменным, вообще говоря, не имеет места.

Случай, когда при сильном демпфировании на систему наряду с медленными возмущениями действуют быстрые возмущения, может быть исследован в рамках общей схемы осреднения аналогично случаю Б.

Отметим, что при наличии быстрых возмущений при слабом демпфировании в гироскопической системе возможно возникновение резонансных ситуаций, что требует использования соответствующих результатов теории метода осреднения [8].

Из проведенного рассмотрения вытекает, что под прецессионными уравнениями гироскопических систем естественно понимать уравнения, решение которых $v(t)$ находится в μ-окрестности точного решения гироскопической системы (5) по медленным переменным $y(t,\ \mu)$ на прецессионных временах задачи, т. е. $\|y(t,\ \mu) - v(t)\| = O(\mu)$ при $t = O(1)$. Устремляя в последнем соотношении μ к нулю, получаем, что решение определенных таким образом прецессионных уравнений $v(t) = \lim_{\mu\to 0} y(t, \mu)$ при $0 \leqslant t \leqslant c_1$, т. е. $v(t)$ находится однозначно. В то же время укажем, что $v(t)$ не определяет однозначно прецессионные уравнения аналогично тому, как степенной ряд, представляющий асимптотически одну функцию, асимптотически представляет бесконечное множество функций. Следовательно, удержание в приближенных уравнениях, например членов порядка μ^2, не является принципиальным обстоятельством в смысле получения с заданной выше точностью приближенного решения уравнений гироскопических систем. Именно под этим углом зрения должен решаться вопрос о пренебрежении диссипативными членами в прецессионных уравнениях в случае Б1.

Следует особо остановиться на вопросе о применимости прецессионных уравнений на бесконечном интервале времени, так как условия приведенных выше теорем обеспечивают близость полных и прецессионных уравнений на конечном интервале медленного времени t.

Нетрудно видеть, что без дополнительных ограничений решение прецессионных уравнений не будет, вообще говоря, аппроксимировать решение полных уравнений при $t \to \infty$. Такая близость будет иметь место в случае устойчивости решений прецессионных уравнений при постоянно действующих возмущениях.

Для линейной системы в случае А такой результат был получен в работе [9]. В нелинейном случае можно воспользоваться теоремами [10], которые гарантируют близость полных и вырожденных уравнений на бесконечном интервале времени при устойчивости решений вырожденных уравнений по первому приближению [1].

При использовании общей схемы метода осреднения для обоснования перехода к прецессионным уравнениям на бесконечном интервале времени применимы результаты [8, 11]. Из теоремы, сформулированной в [11], вытекает

Теорема 3. Пусть прецессионные уравнения (12) имеют тривиальное решение $v = 0$ и существует положительно определенная скалярная функция $V(t, v)$, производная от которой в силу прецессионных уравнений (12) есть функция отрицательно определенная

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial v}\langle w\rangle \leqslant -W_1(v), \quad W_2(v) \leqslant V(t, v) \leqslant W_3(v)$$

$W_1(v)$, $W_2(v)$, $W_3(v)$ — положительно определенные функции. Тогда при достаточно малых начальных условиях для медленных переменных y и достаточно малых μ решения полных и прецессионных уравнений будут близки на бесконечном интервале времени.

Таким образом, аппарат теории сингулярно возмущенных уравнений позволяет решить задачу о переходе к прецессионным уравнениям в гироскопической системе как задачу о разделении быстрых и медленных дви-

---

[1] Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г. К вопросу о предельном переходе в системах дифференциальных уравнений с малым параметром при производных на бесконечном интервале времени. Научн. тр. ин-та механики МГУ, 1970.

жений. В соответствии с поведением системы при стремлении малого параметра к нулю можно использовать результаты А. Н. Тихонова [7], А. Б. Васильевой [12], либо аппарат общей схемы осреднения [8].

Конечно, указанные методы не охватывают всех методов исследования сингулярно возмущенных систем, которые можно применить при переходе к прецессионным уравнениям гироскопии [13–15]. В частности, возможно использование схемы [16], которая не требует явного решения порождающей системы. Следует также указать на большие возможности метода регуляризации — метода перехода в пространство большей размерности, предложенного С. А. Ломовым [17,18].

Поступила 5 V 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Меркин Д. Р.* Гироскопические системы. М., Гостехиздат, 1956.
2. *Клайн С. Дж.* Подобие и приближенные методы. М., «Мир», 1968.
3. *Новожилов И. В.* О понижении порядка уравнений гироскопических систем. Инж. ж. МТТ, 1966, № 5.
4. *Новожилов И. В.* О применении асимптотических разложений теории дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной для исследования гироскопических систем. Изв. АН СССР. МТТ, 1970, № 4.
5. *Новожилов И. В.* Приближенные методы исследования гироскопических систем. В кн.: Развитие механики гироскопических и инерциальных систем. М., «Наука», 1973.
6. *Balachandra M.* Periodic solutions of singularly perturbed equations arising from gyroscopic systems. SIAM J. Appl. Math., 1973, vol. 24, No. 4.
7. *Тихонов А. Н.* Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. Матем. сб., 1952, т. 31 (73), № 3.
8. *Волосов В. М., Моргунов Б. И.* Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. М., Изд-во МГУ, 1971.
9. *Новожилов И. В.* О переходе к прецессионным уравнениям гироскопии на бесконечном интервале времени. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 5.
10. *Климушев А. И., Красовский Н. Н.* Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
11. *Алешин Б. В.* О применимости метода усреднения на неограниченном интервале времени. Вест. МГУ. Сер. матем., механ., 1970, № 6.
12. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М., «Наука», 1973.
13. *Мартыненко Ю. Г.* Асимптотические методы в теории гироскопических приборов. Науч. тр. Ин-та механики МГУ, 1973, № 29.
14. *Кобрин А. И.* К оценке точности прецессионных уравнений гироскопических стабилизаторов. Науч. тр. Ин-та механики МГУ, 1973, № 29.
15. *Sethna P. R., Balachandra M.* Transients in high spin gyroscopic systems. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1974, vol. E41, No. 3.
16. *Алешин Б. В.* Предельное поведение решений одной системы дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1973, т. 210, № 2.
17. *Ломов С. А.* Формализм неклассической теории возмущений. Докл. АН СССР, 1973, т. 212, № 1.
18. *Кобрин А. И., Мартыненко Ю. Г.* Об одном методе построения асимптотического решения задачи о движении гироскопа в кардановом подвесе. Изв. АН СССР. МТТ, 1971, № 3.