Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 62—50

ЛИНЕЙНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА СБЛИЖЕНИЯ С ФУНКЦИОНАЛЬНОЙ ЦЕЛЬЮ

В. И. Максимов

(Свердловск)

Для конфликтно-управляемой системы, описываемой обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями, изучается задача о построении способа управления, обеспечивающего в условиях неопределенности существование заданных свойств у некоторого отрезка траектории системы. Указываются достаточные условия разрешимости задачи и способ построения разрешающих управлений. Работа примыкает к исследованиям [1-7].

1. Рассмотрим управляемую систему

$$x^{\cdot}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u - C(t)\,v + w(t), \quad t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta \tag{1.1}$$
$$u \in P(t) \subset E_{r_1}, \quad v \in Q(t) \subset E_{r_2}$$

Здесь x — n-мерный вектор фазовых координат; векторы u и v — управляющие воздействия первого и второго игроков соответственно; $P(t)$, $Q(t)$ — выпуклые компакты, непрерывные по t; матрицы $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ непрерывны; $w(t)$ — заданное возмущение (интегрируемая по Лебегу функция).

Заданы начальное состояние $x(t_0) = x_0$, конечный момент ϑ и число $\tau \in [0, \vartheta - t_0]$. На промежутке $[\vartheta - \tau, \vartheta]$ определено некоторое семейство функций N. Первый игрок стремится обеспечить для отрезка траектории $x_\vartheta(s) = x(\vartheta + s)$, $-\tau \leqslant s \leqslant 0$ включение $x_\vartheta(s) \in N$. При этом он знает в каждый момент $t_* \in [t_0, \vartheta - \tau]$ вектор $x(t_*)$, а при $t_* \in (\vartheta - \tau, \vartheta]$ — предысторию системы $x(t_* + s)$, $s \in [\vartheta - \tau - t_*, 0]$. Цель второго игрока противоположна, и информированность его может быть сколь угодно полной: он может выбрать любой способ формирования воздействия v, вырабатывающий измеримую реализацию $v[t]$.

Следуя [3,4], состоянием системы (1.1) в момент t назовем отрезок $x_t(s) = x(t + s)$, $s \in [-\tau, 0]$, траектории $x(t)$ (при этом полагаем $x_{t_0}(s) \equiv 0$, $s \in [-\tau, 0)$), позиций p — пару $\{t, x(s)\}$, $t \in [t_0, \vartheta]$, $x(s) \in H$, где H — гильбертово пространство функций $x(s)$ с нормой

$$\|x(s)\|_\tau = \left(\|x(0)\| + \int_{-\tau}^{0} \|x(s)\|^2 ds\right)^{1/2}$$
$$\|z\| = (z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2)^{1/2}, \quad z \in E_n$$

Стратегией U первого игрока назовем правило, сопоставляющее каждой позиции p множество $U(p) \subset P(t)$, выпуклое, замкнутое и полунепрерывное сверху относительно включения по t, x, причем по изменению t справа. Движением системы (1.1) из позиции $p_* = \{t_*, x^*(s)\}$, $t_* \geqslant t_0$, отвечающим стратегии U, называется всякая функция $x[t] = x[t;\ p_*, U]$, $t_* - \tau \leqslant t \leqslant \vartheta$, абсолютно непрерывная на $[t_*, \vartheta]$, удовлетворяющая условию $x[t_* + s] = x^*(s)$ и при почти всех $t \in [t_*, \vartheta]$ — равенству

$$x^{\cdot}[t] = A(t)\,x[t] + B(t)\,u[t] - C(t)\,v[t] + w(t) \tag{1.2}$$

где измеримые функции $u[t]$ и $v[t]$ при почти всех t удовлетворяют включению

$$u[t] \in U(t,\ x_t[s]),\quad v[t] \in Q(t) \tag{1.3}$$

Определенное таким образом движение существует [1].

Задача 1. Заданы система (1.1), позиция $p_0 = \{t_0, x_0(s)\}$, момент $\vartheta \geqslant t_0 + \tau$ и выпуклое, ограниченное и замкнутое множество $N \subset H$. Требуется построить такую допустимую стратегию $U_e(p)$, что все движения $x[t] = x[t; p_0, U_e]$ удовлетворяют включению: $x_\vartheta[s] \in N$.

Задача 2. Требуется построить допустимую стратегию $U_*(p)$, разрешающую задачу 1 и, каковы бы ни были элементы $x(s) \in H$, $y(s) \in H$, удовлетворяющую условиям:

1) при $t \in [t_0, \vartheta - \tau]$ $U_*(t, x(s)) = U_*(t, y(s))$, если $x(0) = y(0)$;

2) при $t \in (\vartheta - \tau, \vartheta]$ $U_*(t, x(s)) = U_*(t, y(s))$, если $x(s) = y(s)$, $\vartheta - \tau - t \leqslant s \leqslant 0$.

Задачу 2 можно, очевидно, рассматривать как математическую формализацию исходной проблемы управления. Задача 1 изучалась в [5] для линейной управляемой системы с запаздыванием. Нетрудно видеть, что изложенный [5] метод решения этой задачи с позиции принципа экстремального прицеливания [3, 4], примененный к системе (1.1), доставляет и решение задачи 2. Структура системы (1.1) позволяет при этом конкретизировать (по сравнению с [5]) получающиеся на этом пути результаты, указать эффективные достаточные условия разрешимости задачи 2 и удобный способ построения разрешающей стратегии. Эти вопросы и обсуждаются в данной работе.

Пусть заданы $t_* \in [t_0, \vartheta]$, $x_*(s) \in H$ и $u(t)$, $v(t)$ — некоторые программы, измеримые на $[t_0, \vartheta]$ функции при почти всех t со значениями в $P(t)$, $Q(t)$ соответственно. Пусть $x(t) = x(t;\ \{t_*, x_*(s)\}, u, v)$, $t_* - \tau \leqslant t \leqslant \vartheta$ — функция, удовлетворяющая условиям: $x(t_* + s) = x_*(s)$; $x(t)$, $t_* \leqslant t \leqslant \vartheta$ — абсолютно непрерывное решение уравнения (1.1) при $u = u(t)$, $v = v(t)$.

Обозначим символом $W(t, N)$ совокупность всех $x(s) \in H$ со свойством: какова бы ни была программа $v(t)$, существует программа $u(t)$,

---

[1] Вопросы существования решений дифференциальных включений с последействием с начальными функциями из пространства H рассматривались в работе: Ю. С. Осипов. Задачи теории дифференциально-разностных игр. Докт. диссертация. Свердловск, 1971. Там же доказана теорема существования включений (1.2), (1.3).

такая, что $x(\vartheta+s;\ \{t_*,\ \dot{x}(s)\},\ u,\ v) \in N$ $(W(t),\ N)$ — аналог множеств программного поглощения из [1–5]).

Пусть $B(t,\ \vartheta)$ — оператор, действующий из H в H и определяемый следующим образом:

1) если $t \leqslant \vartheta - \tau$, то

$$B(t,\vartheta)h = h_1 = \begin{cases} h'(0)X(\vartheta,t) + \int\limits_{-\tau}^{0} h'(\xi)X(\vartheta+\xi,t)\,d\xi, & s = 0 \\ 0, \quad s\in[-\tau,0) \end{cases}$$

2) если $t \in (\vartheta-\tau,\ \vartheta]$, то $(\delta = \vartheta - t)$

$$B(t,\vartheta)h = h_1 = \begin{cases} h'(0)X(\vartheta,t) + \int\limits_{-\delta}^{0} h'(\xi)X(\vartheta+\xi,t)\,d\xi, & s = 0 \\ h(s-\delta), & s\in[-\tau+\delta,0) \\ 0, & s\in[-\tau,-\tau+\delta) \end{cases}$$

Здесь $X(\vartheta,\ t)$ — фундаментальная матрица системы $\dot{x}(t) = A(t)x(t)$; штрих означает транспонирование.

Рассмотрим функционал $\alpha_t(\xi,\ h)$:

1) если $t < \vartheta - \tau$, то

$$\alpha_t(\xi,h) = \begin{cases} \int\limits_{-\tau}^{0} h'(s)X(\vartheta+s,\xi)\,ds, & \xi\in[t,\vartheta-\tau) \\ \int\limits_{\xi-\vartheta}^{0} h'(s)X(\vartheta+s,\xi)\,ds, & \xi\in[\vartheta-\tau,\vartheta] \end{cases}$$

2) если $t \in [\vartheta-\tau,\ \vartheta]$, то

$$\alpha_t(\xi,h) = \int\limits_{\xi-\vartheta}^{0} h'(s)X(\vartheta+s,\xi)\,ds, \quad \xi\in[t,\vartheta]$$

Справедливо следующее утверждение, вытекающее из теоремы об отделимости выпуклых множеств в H.

Теорема 1.1. $x(s) \in W(t;\ N)$ тогда и только тогда, когда

$$\gamma(\vartheta,t,x) = \max_{\|h\|_\tau\leqslant 1}\{-\varphi(t,\vartheta,h,x)\} \leqslant 0 \tag{1.4}$$

Здесь

$$\varphi(t,\vartheta,h,x) = \rho(\vartheta,t,h) + \langle B(t,\vartheta)h, x\rangle$$

$$\rho(\vartheta,t,h) = \int\limits_{t}^{\vartheta}\rho_u(t,\xi,h)\,d\xi - \int\limits_{t}^{\vartheta}\rho_v(t,\xi,h)\,d\xi - \rho_N(h) +$$

$$+\int\limits_{t}^{\vartheta}\{h'(0)X(\vartheta,\xi)+\alpha_t(\xi,h)\}\,w(\xi)\,d\xi$$

$$\rho_u(t,\xi,h) = \max_{u\in P(\xi)}\{h'(0)X(\vartheta,\xi)+\alpha_t(\xi,h)\}B(\xi)u$$

$$\rho_v(t,\xi,h) = \max_{v\in Q(\xi)}\{h'(0)X(\vartheta,\xi)+\alpha_t(\xi,h)\}C(\xi)v$$

$$\rho_N(h) = \min_{y\in N}\langle y,h\rangle$$

2. Отметим необходимые для дальнейшего свойства множеств $W(t, N)$.

Из (1.4), очевидно, вытекает, что при любом $t \in [t_0, \vartheta]$ множество $W(t, N)$ выпукло и замкнуто в H. При $t \in [t_0, \vartheta)$ множество $W(t, N)$ не ограничено, а при $t = \vartheta$ $W(\vartheta, N) = N$.

Лемма 2.1. При любом $t_* \in [t_0, \vartheta]$ множество $W(t_*, N)$ слабо полунепрерывно сверху, т. е. каковы бы ни были сходящаяся к t_* числовая последовательность $\{t_k\}$ и слабо сходящаяся к $y^*(s) \in H$ последовательность $\{y^{(k)}(s)\}$, $y^{(k)}(s) \in W(t_k, N)$, справедливо включение $y^*(s) \in \in W(t_*, N)$.

Доказательство. Предполагая противное, получаем, что существует момент $t_* \in \in [t_0, \vartheta]$, последовательность $\{t_k\}$, сходящаяся к t_*, и слабо сходящаяся в H к некоторому элементу $y^*(s)$ последовательность $\{y^{(k)}(s)\}$, $y^{(k)}(s) \in W(t_k, N)$, такие, что $y^*(s) \notin W(t_*, N)$.

Пусть $v(t)$ — произвольная программа. По определению, существует программа $u_k(t)$, такая, что функция $x^{(k)}(t) = x(t; \{t_k, y^{(k)}(s)\}, u_k, v)$ удовлетворяет условию $x_\vartheta^{(k)}(s) \in N$. Зафиксируем теперь произвольную программу $u(t)$ и образуем последовательность $\{u_*^{(k)}(t)\}$ функций

$$u_*^{(k)}(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [t_0, t_k) \\ u_k(t), & t \in [t_k, \vartheta] \end{cases}$$

Не нарушая общности, считаем, что $\{u_*^{(k)}(t)\}$ слабо (в L_2) сходится к некоторой программе $u_*(t)$, $u_*(t) \in P(t)$ при почти всех $t \in [t_0, \vartheta]$.

Покажем, что последовательность $\{x^{(k)}(\vartheta + s)\}$ слабо в H сходится к $x^*(\vartheta + s)$, где $x^*(t) = x(t; \{t_*, y^*(s)\}, u_*, v)$.

При $t_* \leqslant \vartheta - \tau$ это утверждение очевидно. Пусть $t_* > \vartheta - \tau$. В этом случае достаточно показать, что

$$\Delta \equiv \int_{-\tau+\delta_k}^{0} h'(\xi - \delta_k)\, y^{(k)}(\xi)\, d\xi - \int_{-\tau+\delta_*}^{0} h'(\xi - \delta_*) \times$$
$$\times\, y^*(s)\, ds \to 0 \quad \text{при } k \to \infty$$

где

$$\delta_k = \begin{cases} \vartheta - t_k, & t_k \in [\vartheta - \tau, \vartheta] \\ \tau, & t_k < \vartheta - \tau \end{cases}$$

Справедливо следующее равенство:

$$\Delta = \int_{-\tau+\delta_*}^{0} h'(\xi - \delta_*)\{y^{(k)}(\xi) - y^*(\xi)\}\, d\xi + \tag{2.1}$$
$$+ \int_{-\tau+\delta_*}^{0} \{h'(\xi - \delta_k) - h'(\xi - \delta_*)\}\, y^{(k)}(\xi)\, d\xi$$

Здесь первый интеграл в правой части (2.1) стремится к нулю, так как $\{y^{(k)}(s)\} \to \to y(s)$ слабо в H. Для второго интеграла, применяя неравенство Коши, а также учитывая ограниченность $\{y^{(k)}(s)\}$ и сходимость интеграла

$$\int_{-\tau+\delta_*}^{0} \| h'(\xi - \delta_k) - h'(\xi - \delta_*) \|^2\, d\xi$$

к нулю, в пределе получим также нуль.

Учитывая слабую замкнутость множества N, имеем $x_\vartheta^*(s) \in N$. Это в силу произвольности программы $v(t)$ противоречит предположению. Лемма доказана.

Пусть $y(s;\ h,\ t)$ — элемент $W(t,\ N)$, ближайший в H к $h = h(s)$. Существование и единственность такого элемента следует из выпуклости и замкнутости множества $W(t,\ N)$ в H [8].

Следуя [4], назовем систему множеств $W(t,\ N)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ сильно u-стабильной, если $W(t,\ N) \neq \phi$, $\forall t$ и выполняется условие: каковы бы ни были $t_* \in [t_0,\ \vartheta)$, $t^* \in (t_*,\ \vartheta]$, $x_*(s) \in W(t,\ N)$ и программа $v(t)$, существует программа $u(t)$, такая, что $x(t^* + s;\ \{t_*,\ x_*(s)\},\ u,\ v) \in W(t^*,\ N)$.

Условие 2.1. Система множеств $W(t,\ N)$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$; сильно u-стабильна.

С помощью леммы 2.1 устанавливается справедливость утверждения.

Лемма 2.2. При условии 2.1 для любого $h \in H$ элемент $y(s,\ h,\ t)$ слабо непрерывен справа по t, т. е. каковы бы ни были момент $t \in [t_0,\ \vartheta]$ и элемент $q(s) \in H$

$$\lim_{\Delta t \to +0} \langle y(s;\ h,\ t + \Delta t),\ q(s)\rangle = \langle y(s;\ h,\ t),\ q(s)\rangle$$

Определение [3]. Экстремальной стратегией U_e называется функция $U_e(t,\ x(s))$ вида

$$U_e(t,\ x(s)) = \{u_e\ \ (y(0;\ x(s),\ t) - x(0))\ B(t)\, u_e = \\ = \max_{u \in P(t)} (y(0;\ x(s),\ t) - x(0))\, B(t)\, u$$

Опираясь на леммы 2.1 и 2.2, можно проверить, что справедлива

Теорема 2.1. При условии 2.1 стратегия $U_e(t,\ x(s))$ допустима.

Из леммы 5 [6] и теоремы 2.1, очевидно, вытекает

Теорема 2.2. Пусть начальная позиция такова, что $x_0(s) \in W(t,\ N)$. При условии 2.1 экстремальная стратегия U_e решает задачу 1 и, следовательно, в силу структуры множеств $W(t,\ N)$ решает задачу 2.

3. Укажем способ нахождения элемента $y(s;\ x,\ t)$. На основании теоремы 1.1, слабой непрерывности функционала $\gamma(\vartheta,\ t,\ x)$ (1.4) в H и теоремы о минимаксе [9] доказывается

Лемма 3.1. Пусть функционал $\rho(\vartheta,\ t,\ h)$ — выпуклый по h и $W(t,\ N) \neq \phi$. $W(t,\ N) \cap S_r(x(s)) \neq \phi$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\max_{\|h\|_\tau \leqslant 1} \{-\rho(\vartheta, t, h) - \max_{y \in S_r(x(s))} \langle B(t, \vartheta, h, x\rangle\} \leqslant 0 \tag{3.1}$$

Здесь $S_r(x(s))$ — замкнутый шар в H с центром $x(s)$ радиуса r.

Неравенство (3.1) эквивалентно неравенству

$$\max_{h \in F_c(t)} \{-\rho(\vartheta,\ t,\ h) - \langle B(t,\ \vartheta)\, h,\ x\rangle - \\ -r\, \|B(t,\ \vartheta)\, h\|_\tau\} \leqslant 0 \tag{3.2}$$

$$F_c(t) = \{h \in H \mid \|B(t,\ \vartheta)\, h\|_\tau \leqslant 1,\ \|h\|_\tau \leqslant c\}$$

В силу слабой непрерывности по h максимизируемого в (3.2) функционала и слабой компактности множества $F_c(t)$ максимум в (3.2) достигается.

При этом он не может достигаться на элементе h_*, $\| B(t, \vartheta) h_* \|_\tau = 0$, так как тогда будет выполняться (1.4), что противоречит условию $x(s) \notin W(t, N)$. В таком случае, (3.1) равносильно

(3.3) $$\mu_1(\vartheta, t, x) = \max_{h \in F(t)} \{-\rho(\vartheta, t, h) - \langle B(t, \vartheta) h, x\rangle - r \| B(t, \vartheta) h \|_\tau\} \leqslant 0$$

$$F(t) = \{h \in H \mid \| B(t, \vartheta) h \|_\tau = 1, \ \| h \|_\tau \leqslant 1\}$$

Наименьшее значение $r \geqslant 0$, при котором выполняется (3.3), и есть расстояние от $x(s)$ до $W(t, N)$

$$r_0 = \begin{cases} \mu_1(\vartheta, t, x), & \mu_1(\vartheta, t, x) > 0 \\ 0, & \mu_1(\vartheta, t, x) \leqslant 0 \end{cases}$$

Пусть $h_0 = h_0(t, \vartheta, x)$ — элемент пространства H, на котором достигается максимум в (3.3) (единственность $B(t, \vartheta) h_0$ следует из единственности ближайшего к $x(s)$ в $W(t, N)$ элемента). Ясно, что элемент $y(s; x(s), t)$ удовлетворяет условию максимума

$$\langle B(t, \vartheta) h_0, y(s; x, t)\rangle = \max_{y \in S_{r_0}(x(s))} \langle B(t, \vartheta) h_0, y\rangle$$

и, следовательно равен $r_0 B(t, \vartheta) h_0 + x(s)$.

Таким образом, имеет место

Теорема 3.1. Пусть при $t = t_1$ $W(t_1, N) \neq \phi$, $x(s) \notin W(t_1, N)$ и функционал $\rho(\vartheta, t_1, h)$ — выпуклый по h, тогда

$$y(s; x, t_1) = r_0 B(t_1, \vartheta) h_0 + x(s)$$

4. Укажем достаточные условия непустоты и сильной u-стабильности множеств $W(t, N)$.

Введем множества

$$T(t, x) = \{h_0 \in H \mid \| h_0 \|_\tau \leqslant 1, \quad \gamma(\vartheta, t, x) = -\varphi(\vartheta, t, h_0, x)\}$$

$$D_l(K) = \{t \in [t_0, \vartheta], \ x \in H \mid \| x \|_\tau \leqslant K, \quad \gamma(\vartheta, t, x) \geqslant l\}$$

Можно проверить, что в пространстве H множества $T(t, x)$ и $D_l(K)$ слабо замкнуты, причем $T(t, x)$ слабо полунепрерывно сверху по t, x.

Условие 4.1. В области $\gamma(\vartheta, t, x) > 0$ для любого вектора $v^* \in Q(t)$ можно найти такой вектор $u^* \in P(t)$, что одновременно для всех элементов $h \in T(t, x)$, будет выполняться неравенство

$$\psi(t, u^*, v^*, h) \leqslant 0.$$

Здесь

$$\psi(t, u, v, h) = \rho_u(t, t, h) - \rho_v(t, t, h) + \{h'(0) \times X(\vartheta, t) + \alpha_t(t, h)\} C(t) v - \{h'(0) X(\vartheta, t) + \alpha_t(t, h)\} \times B(t) u$$

Рассмотрим систему множеств (G — некоторое конечное множество из H)

$$T(t_*, x_*, \eta, G) = \bigcup_{\{t, x\}} T(t, x)$$

$$| t - t_* | \leqslant \eta, \quad | \langle x - x_*, q_i \rangle | \leqslant \eta, \quad q_i \in G$$

Лемма 4.1. Пусть выполняется условие 4.1, тогда для любого числа $\alpha > 0$ и конечного множества $G \subset H$ можно найти такое число $\eta(\alpha, G) > 0$ и вектор $u^* \in P(t_*)$, что в области $D_l(K)$ имеет место неравенство

$$\max_{v \in Q(t_*)} \max_{h \in T(\eta)} \psi(t_*, u^*, v, h) \leqslant \alpha$$

$$T(\eta) = T(t_*, x_*, \eta, G)$$

Доказательство леммы следует из условия 4.1, непрерывности функционала $\psi(t, u, v, h)$ и слабой полунепрерывности сверху по t, x множеств $T(t, x)$.

Опираясь на лемму 4.1, можно проверить, что справедлива

Лемма 4.2. Пусть выполнено условие 4.1. Тогда для числа $\alpha > 0$ найдется такое число $\eta(\alpha) > 0$, что для любой программы $v_*(t)$ можно указать программу $u_*(t)$, обеспечивающую неравенство

$$\gamma(\vartheta, t_* + \delta, x(t_* + \delta + s; \{t_*, x_*\}, u_*, v_*)) \leqslant$$
$$\leqslant \gamma(\vartheta, t_*, x_*) + \alpha\delta + \lambda\delta^2$$
$$\lambda = \sup\{\psi(t, u, v, h) \mid t \in [t_0, \vartheta], \ u \in P(t), \ v \in Q(t), \ \|h\|_\tau \leqslant 1\}$$

при $\delta \leqslant \eta$, какова бы ни была позиция $\{t_*, x_*(s)\} \in D_l(K)$.

Обозначим символом $W_\varepsilon(t, N)$ множество тех и только тех элементов $x(s) \in H$, которые удовлетворяют неравенству $\gamma(\vartheta, t, x) \leqslant \varepsilon$.

Лемма 4.3. Пусть выполнено условие 4.1 и при некотором $\varepsilon = \varepsilon_* > 0$ $W_{\varepsilon_*}(t_0, N) \neq \phi$. Тогда множества $W_{\varepsilon_*}(t, N)$ непусты при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ и сильно u-стабильны.

В самом деле, пусть заданы произвольный момент $t_1 \in [t_0, \vartheta]$, элемент $q(s) \in W_{\varepsilon_*}(t_1, N)$, число $\delta \in (0, \vartheta - t_1]$, программа $v_1(t)$ и последовательность чисел $\beta_i \to +0$. С помощью леммы 4.2 можно показать существование таких программ $u_i(t)$, что

$$\gamma(\vartheta, t_1 + \delta, x(t_1 + \delta + s; \{t_1, q\}, u_i, v_1)) \leqslant \gamma(\vartheta, t_1, q) + \beta_i\delta$$

$u_i \to u_0$ слабо в L_2, при $i \to \infty$, $x(t_1 + \delta + s; \{t_1, q\}, u_i, v_i) \to x(t_1 + \delta + s; \{t_1, q\}, u_0, v_1)$ в H.

Таким образом

$$\gamma(\vartheta, t_1 + \delta, x(t_1 + \delta + s; \{t_1, q\}; u_i, v_1)) \leqslant \varepsilon_*$$

Подобным образом доказывается непустота множеств $W_{\varepsilon_*}(t, N)$.

Используя лемму 4.3 и схему доказательства теоремы 2.2 из работы [5] можно проверить справедливость следующего утверждения.

Теорема 4.1. Если $W(t_0, N) \neq \phi$ и выполнено условие 4.1, то множества $W(t, N)$ непусты при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ и сильно u-стабильны.

Следствие 4.1. Пусть $W(t_0, N) \neq \phi$ и максимум в (1.4) при $\gamma(\vartheta, t, x) > 0$ достигается на единственном h, тогда множества $W(t, N)$ не пусты при $t \in [t_0, \vartheta]$ и сильно u-стабильны.

Следствие 4.2. Пусть $W(t_0, N) \neq \phi$ и функционал $\rho(\vartheta, t, h)$ выпукл по h, тогда множества $W(t, N)$ не пусты при всех $t \in [t_0, \vartheta]$ и сильно u-стабильны.

Из теорем 2.1, 2.2 и 4.1 вытекает

Теорема 4.2. Пусть выполнено условие 4.1 (или условия следствий 4.1, 4.2) и $\gamma(\vartheta, t_0, x_0) \leqslant 0$. Тогда стратегия U_ε, экстремальная к множествам $W(t, N)$, решает задачи 1 и 2.

Замечание 4.1. По постановке задачи 2 первый игрок строит свои управляющие воздействия при $t \geqslant \vartheta - \tau$ на основании некоторой предыстории о движении системы. Возникает вопрос, насколько знание этой предыстории необходимо для разрешимости задачи 2. Другими словами, при каких условиях задачу 2 можно решить в классе стратегий $U(t, x)$, где $x \in E_r$, причем множество $U(t, x)$ снова ограниченное, выпуклое и полунепрерывное сверху по включению по t (справа) и x. Можно показать, что задача 2 имеет решение в классе стратегий $U(t, x)$, $x \in E_n$ тогда и только тогда, когда существует такая система множеств $W_1(t)$, $\vartheta - \tau \leqslant t \leqslant \vartheta$, выпуклых, замкнутых и полунепрерывных сверху по t, сильно u-стабильная в смысле [1], что, какова бы ни была функция $\varphi(t) \in H$, $\varphi(t) \in W_1(t)$, при почти всех $t \in [\vartheta - \tau, \vartheta]$ справедливо включение $\varphi(t) \in N$.

Автор благодарит Ю. С. Осипова за постановку задачи и ценные советы.

Поступила 9 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи динамики. I. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1969, № 5.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
3. *Осипов Ю. С.* Дифференциальная игра наведения для систем с последействием. ПММ, 1971, т. 25, вып. 1.
4. *Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.* Линейные дифференциальные разностные игры Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 4.
5. *Кряжимский А. В., Осипов Ю. С.* Дифференциально-разностная игра сближения с функциональным целевым множеством. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
6. *Осипов Ю. С.* Альтернатива в дифференциально-разностной игре. Докл. АН СССР, 1971, т. 197, № 5.
7. *Тарлинский С. И.* Об одной линейной дифференциальной игре сближения. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
8. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы, т. 1. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
9. *Фань Цзи.* Теоремы о минимаксе. В сб.: Бесконечные антагонистические игры. М., Физматгиз, 1963.