Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 62—50

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ УСЛОВИЯМИ РАЗРЕШИМОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

В. Д. Батухтин

(Свердловск)

Рассматриваются задачи позиционного сближения — уклонения для собственно линейных управляемых систем, в которых управления игроков аддитивно не разделяются. Предлагаются конструкции, позволяющие эффективно решать эти задачи в классах чистых и смешанных стратегий и контрстратегий [1, 2]. Исследуется соотношение между предлагаемыми и программными конструкциями для решения таких задач. Используемые в статье конструкции восходят к прямому методу [3–6]. В отличие от [3–6] описанный здесь подход охватывает решение позиционных задач.

1. Пусть движение конфликтно-управляемой системы описывается собственно линейным дифференциальным уравнением

$$dx/dt = A(t)\,x + f(t,\ u,\ v),\quad x(t_0) = x_0;\quad u \in P \subsetneq R^p,\quad v \in Q \subset R^q \tag{1.1}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор, $A(t)$ — $n \times n$-мерная непрерывная матрица-функция, $f(t,\ u,\ v)$ — непрерывная по совокупности аргументов вектор-функция, P и Q — компакты.

В пространстве R^m задан выпуклый компакт M и задана функция $r(x,\ m) = \|x - m\|$ ($\|p\|$ — евклидова норма вектора p, $m \in M$).

Исход игры определяется функционалом

$$\varphi(x[\cdot]) = \min_{t \in [t_0, \vartheta]} \omega(x[t]) \qquad \left(\omega(x) = \min_{m \in M} r(x, m)\right) \tag{1.2}$$

где ϑ — некоторый конечный момент времени. Первый игрок стремится минимизировать функционал (1.2), второй игрок — максимизировать его.

Будем полагать, что чистые стратегии U_1, V_1 игроков, смешанные стратегии U_2, V_2, контрстратегии U_3, V_3 и порожденные ими предельным переходом от соответствующих ломаных Эйлера движения $x_{U_i}[t]$ ($x_{V_i}[t]$), $i = 1,2,3$ определены так же, как в [1, 2].

Задача 1. Для фиксированной позиции $\{t_0,\ x_0\}$ найти оптимальную минимаксную либо стратегию $U_1^\circ \div u^\circ(t,\ x)$, либо смешанную стратегию $U_2^\circ \div \mu(du\ /\ t,\ x)$, либо контрстратегию $U_3^\circ \div u^\circ(t,\ x,\ v)$, которые удовлетворяют условию

$$\sup_{x[\cdot]} \varphi(x[\cdot\,; t_0 x_0 U_i^\circ]) = \min_{U_i} \sup_{x[\cdot]} \varphi(x[\cdot\,; t_0, x_0, U_i]), \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1.3}$$

на любом движении $x_{U_i^\circ}[t] = x[t;\ t_0,\ x_0,\ U_i^\circ]$.

Задача 2. Для фиксированной позиции $\{t_0, x_0\}$ найти оптимальную максиминную либо стратегию $V_1^\circ \div v^\circ(t, x)$, либо смешанную стратегию $V_2^\circ \div \nu^\circ(dv \,/\, t, x)$, либо контрстратегию $V_3^\circ \div v^\circ(t, x, u)$, которые удовлетворяют условию

$$\inf_{x[\cdot]} \varphi(x[\cdot\,; t_0, x_0, V_i^\circ]) = \max_{V_i} \inf_{x[\cdot]} \varphi(x[\cdot\,; t_0, x_0, V_i]), \qquad i = 1, 2, 3 \tag{1.4}$$

на любом движении $x_{V_i^\circ}[t] = x[t;\ t_0,\ x_0,\ V_i^\circ]$.

2. Рассмотрим связь между условиями разрешимости задач 1, 2 в форме экстремального прицеливания и с помощью априори стабильного моста [1, 2]. При этом для определенности схему рассуждений приведем здесь для случая минимаксной постановки, т. е. для пары стратегия U_1 — контрстратегия V_3. Соответствующие утверждения применительно к дифференциальной игре в смешанных стратегиях и в классе контрстратегия U_3 — стратегия V_1 проверяются аналогично; приведем их ниже без доказательства.

Введем вспомогательную программную конструкцию. А именно, обозначим символом V_u контрстратегию — программу [2], которая всякой паре $\{t, u\}$ ставит в соответствие множество $V(t, u) \in Q$, полунепрерывное сверху по включению относительно $\{t, u\}$. Определим программное движение $x(t) = x(t;\ t_*,\ x_*,\ V_u)$ $(t_* \in [t_0,\ \vartheta])$ как решение дифференциального уравнения в контингенциях

$$x^\cdot(t) \in A(t)\, x(t) + F(t, V_u), \tag{2.1}$$

$$F(t, V_u) = \mathrm{co}\, \{f : f = f(t, u, v),\ v \in V(t, u),\ u \in P\}$$

где $\mathrm{co}\,\{f\}$ — выпуклая, замкнутая оболочка множества $\{f\}$ векторов f. Далее обозначим

$$\varepsilon_1^\circ(t_*, x_*) = \varepsilon_1^\circ(t_*, x_*; \tau_\circ) = \min_{\tau \in [t_*, \vartheta]} \varepsilon_1^\circ(t_*, x_*; \tau) \tag{2.2}$$

$$\varepsilon_1^\circ(t_*, x_*; \tau) = \max_{V_u} \min_{x(\cdot)} \omega(x(\tau; t_*, x_*, V_u)) \tag{2.3}$$

Можно проверить, что величина $\varepsilon_1^\circ(t_*,\ x_*;\ \tau)$ (2.3) изображается равенством

$$\varepsilon_1^\circ(t_*, x_*; \tau) = \max_{V_u} \max_{\|l\|=1} \Big[l' \{X(\tau, t_*)\, x_*\}_m + \tag{2.4}$$

$$+ \int_{t_*}^{\tau} \Big(\min_{f \in F(t, V_u)} l' \{X(\tau, t) f\}_m \Big) dt + \rho_M(l) \Big]$$

если правая часть этого равенства положительна, иначе $\varepsilon_1^\circ(t_*,\ x_*;\ \tau) = 0$. Здесь l — m-мерный вектор, $X(t,\ \tau)$ — фундаментальная матрица решений для уравнения $x^\cdot = A(t)\, x$, $X(\tau,\ \tau) = E$, $\rho_M(l) = \min l'm$ при $(-m) \in M$, штрих означает транспонирование. Отметим, что оптимальная программа $V_u^\circ = V^\circ(t,\ u)$, доставляющая максимум в (2.4), существует, а выражение для $\varepsilon_1^\circ(t_*, x_*; \tau)$ (2.4) может быть записано в виде

$$\varepsilon_1^\circ(t_*, x_*; \tau) = \max_{\|l\|=1}\Big[l'\{X(\tau, t_*)x_*\}_m + \int_{t_*}^{\tau}\min_{u\in P}\max_{v\in Q} l'\{X(\tau, t)f(t, u, v)\}_m\,dt + \rho_M(l)\Big] \tag{2.5}$$

Скажем, что игра (1.1), (1.2) регулярна, если выполнены следующие условия.

Условие A_1. Для всякой позиции $\{t_*, x_*\}$ ($t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta$, $t_* \neq \tau_0$, $\varepsilon_1^\circ(t_*, x_*) \in (0, \beta)$, $\beta = \mathrm{const}$) при любом выборе функции $v(u)$ найдутся, по крайней мере, один момент $\tau_0 \in [t_*, \vartheta]$ и один вектор $f_* \in \mathrm{co}\,\{f : f = f(t, u, v(u)),\ u \in P\}$, такие, что для любого из максимизирующих векторов l° в (2.4), отвечающего моменту τ_0, будет справедливо неравенство

$$l_*^{\circ\prime} X(\tau_0, t_*)f_* \leqslant \min_{u\in P}\max_{v\in Q} l_*^{\circ\prime} X(\tau_0, t_*)f(t_*, u, v),\quad l_*^{\circ\prime} = \{l^{\circ\prime}, 0, 0, \ldots, 0\}$$

Условие $Б_1$. Для всякой позиции $\{t_*, x_*\}$ ($t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta$, $\varepsilon_1^\circ(t_*, x_*) \in (0, \beta)$) при любом выборе вектора $u \in P$ найдется, по крайней мере, один вектор $f^* \in \mathrm{co}\,\{f : f = f(t, u, v),\ v \in Q\}$, такой, что для любого из максимизирующих векторов l° в (2.4), отвечающего любому из минимизирующих моментов τ_0 в (2.2), будет справедливо равенство

$$l_*^{\circ\prime} X(\tau_0, t_*)f^* = \max_{v\in Q} l_*^{\circ\prime} X(\tau_0, t_*)f(t_*, u, v)$$

Заметим, что условия A_1 и $Б_1$ отвечают соответственно условиям A, $Б$ и B из [7], но уже применительно к рассматриваемой собственно линейной системе (1.1).

С помощью рассуждений, подобных приведенным в [7], доказывается справедливость следующего утверждения.

Теорема 2.1. Пусть выполняются условия регулярности A_1, $Б_1$. Тогда стратегия $U_1^\circ \div u^\circ(t, x)$, экстремальная [1,2] к множеству $W_{1,\varepsilon} = \{\{t,x\} : \varepsilon_1^\circ(t, x) \leqslant \varepsilon_1^\circ(t_0, x_0)\}$, разрешает задачу 1 в минимаксном случае, гарантируя при $\varepsilon_1^\circ(t_0, x_0) = 0$ для всякого движения $x[t;\ t_0, x_0, U_1^\circ]$ системы (1.1) сближение с множеством M. Контрстратегия $V_3^\circ \div v^\circ(t, x, u)$, экстремальная к множеству $W_1^\varepsilon = \{\{t, x\} : \varepsilon_1^\circ(t, x) \geqslant \varepsilon_1^\circ(t_0, x_0)\}$, разрешает в минимаксном случае задачу 2.

Рассмотрим теперь связь между условиями регулярности A_1, $Б_1$ и следующими двумя условиями.

Условие B_1. При всех $t \in [t_0, \tau]$ и при всех $\tau \in [t_0, \vartheta]$ функция

$$\varkappa_1(t, \tau, l) = -\min_{u\in P}\max_{v\in Q} l'\{X(\tau, t)f(t, u, v)\}_m$$

выпукла по l.

Условие Γ_1. Для всякого вектора $u \in P$ найдется вектор $f_{t,u}^* \in \mathrm{co}\,\{f : f = f(t, u, v),\ u \in P\}$, такой, что для всех τ и t ($t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant \vartheta$) и для всех m-мерных векторов l будет

$$l'\{X(\tau, t)f_{t,u}^*\}_m = \max_{v\in Q} l'\{X(\tau, t)f(t, u, v)\}_m$$

Обозначим символом $H_1(\tau, t)$ множество, определяемое соотношением

$$H_1(\tau, t) = \bigcap_{v(\cdot)} \operatorname{co}\{\{X(\tau, t) f(t, u, v(u))\}_m : u \in P\} \tag{2.6}$$

где в фигурных скобках функция $v(u) \in Q$ фиксирована, а вектор u пробегает все множество P; пересечение берется по всевозможным функциям $v(u) \in Q$. Можно проверить, что m-мерный вектор h принадлежит множеству $H_1(\tau, t)$ тогда и только тогда, когда он удовлетворяет условию

$$\max_{\|l\|=1} [\min_{u\in P} \max_{v\in Q} l' \{X(\tau, t) f(t, u, v)\}_m - l'h] \leqslant 0 \tag{2.7}$$

При выполнении условия B_1 вектор h, для которого условие (2.7) выполняется, как нетрудно показать, существует и, следовательно, множества $H_1(\tau, t)$ в этом случае непусты.

Введем, далее, величину $\varepsilon_1^*(t_*, x_*)$, определяемую равенством

$$\varepsilon_1^*(t_*, x_*) = \min_{\tau\in[t_*, \vartheta]} \min_{x(\cdot)} \min_{m\in M} r(x(\tau; t_*, x_*), m) \tag{2.8}$$

где $x(t; t_*, x_*)$ — движение, являющееся решением уравнения в контингенциях (2.9) при ограничении (2.10)

$$x^\cdot(t) = A(t)x(t) + g(t) \tag{2.9}$$

$$\{X(\tau, t) g(t)\}_m \in H_1(\tau, t) \tag{2.10}$$

Отметим, что из самого построения множеств $H_1(\tau, t)$ следует, что множества

$$W_t^{g(\cdot)} = \{x \colon \{X(\tau, t) x_{g(\cdot)}(t)\}_m = \{X(\tau, t) x\}_m\}$$

где $x_{g(\cdot)}(t)$ — решение уравнения (2.9) при «управлении» $g(t)$, удовлетворяющем (2.10), образуют минимаксно u-стабильный мост. Поэтому, если для начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ найдется решение $x_{g(\cdot)}(t)$ уравнения (2.9), удовлетворяющее условию $x_{g(\cdot)}(\tau) \in M$ при некотором $\tau \in [t_0, \vartheta]$, то стратегия $U^{(e)} \div u^{(e)}(t, x)$, экстремальная [1,2] к этому мосту $W_t^{g(\cdot)}$, обеспечивает сближение системы (1.1), (1.2) с множеством M к этому моменту времени.

Справедливо утверждение.

Лемма 2.1. Пусть выполняется условие B_1. Тогда будет справедливо равенство

$$\varepsilon_1^\circ(t_*, x_*) = \varepsilon_1^*(t_*, x_*) \tag{2.11}$$

Доказательство леммы проводится по следующей схеме. Пусть $\tau = \tau^\circ$ — минимизирующий момент, определяемый соотношением (2.8), а $x^*(t; t_*, x_*) = x_{g^*(\cdot)}(t; t_*, x_*)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \tau^\circ)$ — отвечающее этому моменту минимизирующее движение из (2.8). Из того факта, что мост $W_t^{g^*(\cdot)}$ — минимаксно u-стабильный, выводится существование для каждой программы V_u программного движения $x(t; t_*, x_*, V_u)$, такого, что

$$\varepsilon_1^*(t_*, x_*) = \omega\backslash(x(\tau^\circ; t_*, x_*)) = \omega(x(\tau^\circ; t_*, x_*, V_u))$$

Отсюда следует справедливость неравенства

$$\varepsilon_1^\circ(t_*, x_*) \leqslant \varepsilon_1^*(t_*, x_*) \tag{2.12}$$

Покажем справедливость обратного неравенству (2.12) соотношения

$$\varepsilon_1^\circ(t_*, x_*) \geqslant \varepsilon_1^*(t_*, x_*) \tag{2.13}$$

Из (2.12), (2.13) будет следовать требуемое утверждение.

Действительно, выражение (2.8) для $\varepsilon_1^*(t_*, x_*)$ может быть записано в виде

(2.14) $$\varepsilon_1^*(t_*, x_*) = \max_{\|l\|=1}\left[l'\{X(\tau^\circ, t_*)x_*\}_m + \int_{t_*}^{\tau^\circ} \min_{h\in H_1(\tau^\circ, t)} l'h(t)\,dt + \rho_M(l)\right]$$

Обозначим через l^* и $h^*(t)$ m-мерный вектор и вектор-функцию, доставляющие соответственно максимум и минимум в (2.14). Возьмем вектор-функцию $u^*(t)$, которая при почти всех $t\in[t_*, \tau^\circ]$ удовлетворяет условию минимакса

(2.15) $$\max_{v\in Q'} l'\{X(\tau^\circ, t)f(t, u^*(t), v)\}_m = \min_{u\in P}\max_{v\in Q} l^{*\prime}\{X(\tau^\circ, t)f(t, u, v)\}_m$$

и найдем при каждом $t\in[t_*, \tau^\circ]$ вектор $f_{t, u^*(t)}$, для которого выполняется равенство

(2.16) $$\{X(\tau^\circ, t)f_{t,u^*(t)}\}_m = h(t)$$

Существование вектора $h(t)\in H_1(\tau^\circ, t)$ в (2.16) следует из того, что при условии B^1 пересечение множества $H_1(\tau^\circ, t)$ с любым из множеств $F_v(t, u) = \mathrm{co}\,\{\{X(\tau^\circ, t)\ f(t, u, v)\}_m\colon v\in Q\}$ при всяком фиксированном $u\in P$ непусто. Из (2.14)—(2.16) получим

$$l^{*\prime}h(t) \leqslant l^{*\prime}\{X(\tau^\circ, t)f_{t,u^*(t)}\}_m \leqslant \min_{u\in P}\max_{v\in Q} l^{*\prime}\{X(\tau^\circ, t)f(t, u, v)\}_m$$

откуда с учетом (2.5) выводится требуемое равенство (2.13).

Справедливо утверждение.

Теорема 2.2. Пусть выполняются условия B_1, Γ_1. Из условий B_1, Γ_1 следуют условия регулярности A_1, $Б_1$ игры (1.1), (1.2) и равенство $\varepsilon_1^\circ(t_0, x_0) = \varepsilon_1^*(t_0, x_0)$.

Действительно, из выпуклости функции $\varkappa_1(\tau, t, l)$ следует, что максимизирующий вектор l° в (2.5) единственный. Но тогда условие A_1 выполняется автоматически. Условие $Б_1$ вытекает непосредственно из условия Γ_1, причем вектор f^*, о котором идет речь в Γ_1, удовлетворяет соответствующему равенству уже при всех значениях вектора l, а не только для векторов l°. Равенство $\varepsilon_1^\circ(t_0, x_0) = \varepsilon_1^*(t_0, x_0)$ доказано в лемме 2.1.

Таким образом, при выполнении условий B_1, Γ_1 задача сближения (задача 1) к моменту τ° может быть решена либо с помощью множеств $H_1(\tau^\circ, t)$ (2.6), либо с помощью минимаксно u-стабильного моста программного поглощения $W_{1,\varepsilon}$. Более того, при условии B_1 функция $\varepsilon_1^\circ(t, x; \tau)$ при каждом фиксированном τ в области $\varepsilon_1^\circ(t, x)\in(0, \beta)$ является дифференцируемой [8], и поэтому задача сближения в рассматриваемом случае эффективно разрешается стратегией экстремального прицеливания [8]. Задача уклонения (задача 2) при выполнении условия Γ_1 может быть, следовательно, решена с помощью v-стабильного программного моста W_1^ε. Более того, оказывается, что при выполнении условий B_1, Γ_1 задача уклонения эффективно разрешается контрстратегией обобщенного экстремального прицеливания. Определим эту контрстратегию следующим образом.

Введем функцию

$$\lambda_1(t, x) = \int_t^{\vartheta} \frac{1}{\varepsilon_1^\circ(t, x; \tau)}\,d\tau$$

Обозначим через G_1 область позиций $\{t, x\}$, для которых $\varepsilon_1^\circ(t, x)\in$ $\in(0, \beta)$. Так как в области G_1 функция $\varepsilon_1^\circ(t, x; \tau)$ при каждом τ дифференцируема, то в этой области дифференцируема и функция $\lambda_1(t, x)$. Если $\{t, x\} \notin G_1$, то контрстратегию $V^{(e)}(t, x, u)$ обобщенного экстремального прицеливания отождествим с любой борелевской по u функцией $v(t, x, u) \in Q$; если же $\{t, x\} \in G_1$, то $V^{(e)}(t, x, u)$ отождествим с любой борелевской по u функцией $v^{(e)} = v^{(e)}(t, x, u) \in Q$, для которой выполняется условие максимума

$$\left[-\frac{\partial\lambda_1(t,x)}{\partial x}\right]' f(t,u,v^{(e)}) = \max_{v\in Q}\left[-\frac{\partial\lambda_1(t,x)}{\partial x}\right]' f(t,u,v)$$

где $[\partial\lambda_1(t, x) / \partial x]$ — матрица частных производных $\partial\lambda_1(t, x) / \partial x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Запишем уравнение в контингенциях

(2.17) $$x^{\boldsymbol\cdot} \in A(t)x + \operatorname{co}\{f : f = f(t, u, v(u)),\ v(u) \in V^{(e)}(t, x, u),\ u \in P\}$$

Справедливо утверждение.

Теорема 2.3. Пусть выполняются условия B_1, Γ_1. Тогда контрстратегия обобщенного экстремального прицеливания $V^{(e)}(t, x, u)$ обеспечивает уклонение всех движений $x[t] = x[t; t_0, x_0, V^{(e)}]$ (2.17) от множества M на промежутке $[t_0, \vartheta]$ при $\varepsilon_1^\circ(t_0, x_0) \in (0, \beta)$.

Непосредственно из теорем 2.2, 2.3 следует

Теорема 2.4. Пусть выполняются условия B_1, Γ_1 и $\varepsilon_1^\circ(t_0, x_0) \in (0, \beta)$. Тогда величина $\varepsilon_1^\circ(t_0, x_0) = \varepsilon_1^*(t_0, x_0)$ — цена игры сближения— уклонения.

3. Сформулируем здесь без доказательства утверждения, аналогичные приведенным в п. 2 применительно к случаям решения задач 1,2 в классе смешанных стратегий $\{U_2, V_2\}$ и для пары $\{U_3, V_1\}$.

Обозначим

(3.1) $$\varepsilon_i^\circ(t_*, x_*; \tau) = \max_{\|l\|=1}[l'\{X(\tau, t_*)x_*\}_m + \rho_i(t_*, \tau; l) + \rho_M(l)]$$

(3.2) $$\varepsilon_i^\circ(t_*, x_*) = \varepsilon_i^\circ(t_*, x_*; \tau_0) = \min_{\tau\in[t_*,\vartheta]}\varepsilon_i^\circ(t_*, x_*; \tau), \quad i = 2, 3$$

$$\rho_2(t_*, x_*, \tau) = \int_{t_*}^{\tau}\left[\min_{\mu}\max_{\nu}\int_P\int_Q l'\{X(\tau, t)f(t, u, v)\}_m \mu(du)\nu(dv)\right]dt$$

$$\rho_3(t_*, x_*; \tau) = \int_{t_*}^{\tau}\max_{v\in Q}\min_{u\in P} l'\{X(\tau, t)f(t, u, v)\}_m\,dt$$

где $\mu(du)$, $\nu(dv)$ — вероятностные меры соответственно на P и Q.

Будем говорить, что в рассматриваемых случаях игра (1.1), (1.2) регулярна, если выполнены соответственно следующие условия.

Условие A_2 (A_3). Для всякой позиции $\{t_*, x_*\}$ ($t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta$, $t_* \neq \tau_0$, $\varepsilon_i^\circ(t_*, x_*) \in (0, \beta)$, $i = 2, 3$) при любом выборе вероятностной меры $\nu_*(dv)$ (вектора $v \in Q$) найдутся, по крайней мере, один момент $\tau_0 \in [t_*, \vartheta]$ и одна вероятностная мера $\mu_*(du)$ (вектор $f_* \in \operatorname{co}\{f : f = f(t, u(v), v), u(v) \in P\}$), такие, что для любого из минимизирующих векторов l° в (3.1), отвечающего моменту τ_0, будет справедливо соотношение

$$\int_P\int_Q l_*^{\circ\prime} X(\tau_0, t_*) f(t_*, u, v)\, \mu_*(du)\, \nu_*(dv) \leqslant$$

$$\leqslant \min_{\mu} \max_{\nu} \int_P \int_Q l_*^{\circ\prime} X(\tau_0, t_*) f(t_*, u, v)\, \mu(du)\, \nu(dv)$$

$$(l_*^{\circ\prime} X(\tau_0, t_*) f_* \leqslant \max_{v \in Q} \min_{u \in P} l_*^{\circ\prime} X(\tau_0, t_*) f(t_*, u, v))$$

Условие $Б_2$ ($Б_3$). Для всякой позиции $\{t_*, x_*\}$ ($t_0 \leqslant t_* \leqslant \vartheta$, $\varepsilon_i^\circ(t_*, x_*) \in (0, \beta)$, $i = 2, 3$) при любом выборе вероятностной меры $\mu^*(du)$ (функции $u(v)$) найдется, по крайней мере, одна вероятностная мера $\nu^*(dv)$ (вектор $f^* \in \mathrm{co}\,\{f : f = f(t, u, v),\ u = u(v),\ v \in Q\}$, такая, что для любого из максимизирующих векторов l° в (3.1), отвечающего любому из минимизирующих моментов τ_0 в (3.2), будет справедливо соотношение

$$\int_P\int_Q l_*^{\circ\prime} X(\tau_0, t_*) f(t_*, u, v)\, \mu^*(du)\, \nu^*(dv) \geqslant$$

$$\geqslant \max_{\nu} \min_{\mu} \int_P\int_Q l_*^{\circ\prime} X(\tau_0, t_*) f(t_*, u, v)\, \mu(du)\, \nu(dv)$$

$$(l_*^{\circ\prime} X(\tau_0, t_*) f^* \geqslant \max_{v \in Q} \min_{u \in P} l_*^{\circ\prime} X(\tau_0, t_*) f(t_*, u, v))$$

При выполнении условий регулярности A_2, $Б_2$ (A_3, $Б_3$) справедливо утверждение, подобное теореме 2.1, о разрешимости задач 1, 2 в классе смешанных стратегий $\{U_2, V_2\}$ (в классе контрстратегия U_3 — стратегия V_1).

Сформулируем теперь для рассматриваемых случаев условия разрешимости задач 1, 2 в форме, подобной условиям $В_1$, Γ_1. Эти условия принимают здесь следующий вид:

Условие $В_2$ ($В_3$). При всех $t \in [t_0, \tau]$ и при всех $\tau \in [t_0, \vartheta]$ функция

$$\varkappa_2(t, \tau, l) = -\min_{\mu} \max_{\nu} \int_P\int_Q l'\{X(\tau, t) f(t, u, v)\}_m\, \mu(du)\, \nu(dv)$$

$$(\varkappa_3(t, \tau, l) = -\max_{v \in Q} \min_{u \in P} l'\{X(\tau, t) f(t, u, v)\}_m)$$

выпукла по l.

Условие Γ_2 (Γ_3). Для всякой меры $\mu\,(du)$ (функции $u(v) \in P$) найдется мера $\nu\,(dv)$ (вектор $f^* \in \mathrm{co}\,\{f : f = f(t, u(v), v),\ v \in Q)$, такая, что для всех τ и t ($t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant \vartheta$) и для всех m-мерных векторов l будет

$$\int_P\int_Q l'\{X(\tau, t) f(t, u, v)\}_m\, \mu(du)\, \nu(dv) \geqslant$$

$$\geqslant \min_{\mu} \max_{\nu} \int_P\int_Q l'\{X(\tau, t) f(t, u, v)\}_m\, \mu(du)\, \nu(dv)$$

$$(l'\{X(\tau, t) f^*\}_m \geqslant \max_{v \in Q} \min_{u \in P} l'\{X(\tau, t) f(t, u, v)\}_m)$$

Вводя множества, определяемые соотношениями

$$H_2(\tau, t) = \bigcap_{\nu(dv)} \Big[\bigcup_{\mu(du)} \int_P\int_Q \{X(\tau, t) f(t, u, v)\}_m\, \mu(du)\, \nu(dv)\Big]$$

$$H_3(\tau, t) = \bigcap_{v \in Q} \mathrm{co}\,\{\{X(\tau, t) f(t, u, v)\}_m : u \in P\}$$

с помощью рассуждений, подобных приведенным в п. 2, можно проверить справедливость следующего утверждения.

Теорема 3.1. Пусть выполняются условия B_2 (B_3) и $\Gamma_2(\Gamma_3)$. Тогда условия регулярности A_2 (A_3) и $Б_2$ ($Б_3$) игры (1.1), (1.2) выполняются автоматически и $\varepsilon_2^\circ(t_0, x_0) = \varepsilon_2^*(t_0, x_0)$ ($\varepsilon_3^\circ(t_0, x_0) = \varepsilon_3^*(t_0, x_0)$). Смешанная стратегия $V_2^{(e)}(t, x)$ обобщенного экстремального прицеливания при $\varepsilon_2^\circ(t_0, x_0) \in (0, \beta)$ (обобщенная стратегия $V_1^{(e)}(t, x)$ при $\varepsilon_3^\circ(t_0, x_0) \in (0, \beta)$) обеспечивает уклонение всех движений $x[t;\ t_*, x_0, V_2^{(e)}]$ ($x[t;\ t_*, x_0, V_1^{(e)}]$) от множества M на $[t_0, \vartheta]$. При этом величина $\varepsilon_2^\circ(t_0, x_*) = \varepsilon_2^*(t_0, x_0)$ ($\varepsilon_3^\circ(t_0, x_0) = \varepsilon_3^*(t_0, x_0)$) — цена игры сближения — уклонения.

Здесь смешанная стратегия $V_2^{(e)}(t, x)$ (стратегия $V_1^{(e)}(t, x)$) отождествляется при $\{t, x\} \notin G_2$ ($\{t, x\} \notin G_3$) с любой вероятностной мерой $\nu(dv / t, x)$ на Q (любой функцией $v(t, x) \in Q$), при $\{t, x\} \in G_2$, ($\{t, x\} \in G_3$) — с любой вероятностной мерой $\nu^{(e)}(dv / t, x)$ на Q (любой функцией $v^{(e)}(t, x) \in Q$), для которой удовлетворяется условие

$$\min_{\mu} \int_P \int_Q \left[-\frac{\partial \lambda_2(t, x)}{\partial x}\right]' f(t, u, v)\, \mu(du)\, \nu^{(e)}\left(\frac{dv}{t, x}\right) =$$
$$= \max_{\nu} \min_{\mu} \int_P \int_Q \left[-\frac{\partial \lambda_2(t, x)}{\partial x}\right]' f(t, u, v)\, \mu(du)\, \nu(dv)$$
$$\left(\min_{u \in P} \left[-\frac{\partial \lambda_3(t, x)}{\partial x}\right]' f(t, u, v^{(e)}) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} \left[-\frac{\partial \lambda_3(t, x)}{\partial x}\right]' f(t, u, v)\right)$$

Выше было рассмотрено решение задач 1,2 на идеальных движениях $x[t]$, которые являются равномерным пределом соответствующих ломаных Эйлера. Однако можно при решении этих задач перейти к реализуемым на практике движениям, что осуществляется прямым возвращением к ломаным Эйлера.

Справедливо утверждение

Теорема 3.2. Для любой позиции $\{t_0, x_0\}$ и любого числа $\alpha > 0$ можно указать число $\delta > 0$, такое, что при $\Delta^{(k)} \leqslant \delta$ для всякого аппроксимационного движения $x_{\Delta(k)}[t;\ t_0, x_0, U_i]$ [2] будет выполняться неравенство

$$\min_{U_i} \max_{x[\cdot]} \varphi(x_{\Delta(k)}[\cdot\,; t_0, x_0, U_i]) \leqslant \varepsilon_i^\circ(t_0, x_0) + \alpha, \qquad i = 1, 2, 3$$

для всякого движения $x_{\Delta(k)}[t;\ t_0, x_0, V_j]$ — неравенство

$$\max_{V_j} \min_{x[\cdot]} \varphi(x_{\Delta(k)}[\cdot\,; t_0, x_0, V_j]) \geqslant \varepsilon_i^\circ(t_0, x_0) - \alpha, \qquad i = 1, 2, 3;\ j = 3, 2, 1$$

Данная аппроксимация в задачах 1, 2 устойчива по отношению к информационным помехам. Отметим, что содержательная трактовка решений, полученных в классе смешанных стратегий, достигается при переходе к стохастическим процедурам выбора управлений игроков [1,2].

Отметим в заключение, что в чисто линейном случае рассмотренная в данной статье задача исследована в [2].

Автор благодарит Н. Н. Красовского и А. И. Субботина за ценные замечания.

Поступила 9 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. I, II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2—3.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
3. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. I. Докл. АН СССР, 1967, т. 174, № 6.
4. *Мищенко Е. Ф.* Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 5.
5. *Гусятников П. Б., Никольский М. С.* Об оптимальности времени преследования. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 3.
6. *Чикрий А. А.* Достаточные условия завершения дифференциальной игры $\dot{z} = Az + f(u, v)$. Киев, Тр. Ин-та кибернетики АН УССР, вып. 3, 1969.
7. *Красовский Н. Н., Батухтин В. Д.* О нелинейной дифференциальной игре сближения — уклонения. Докл. АН СССР, 1973, т. 212, № 1.
8. *Красовский Н. Н.* Минимаксное поглощение в игре сближения. ПММ, 1971, т. 35, вып. 6.