Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 62-50

О НЕПРЕРЫВНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ИГРЫ СБЛИЖЕНИЯ ОТ ПАРАМЕТРА

Э. Г. Альбрехт, М. И. Логинов

(Свердловск)

Рассматривается игровая задача о сближении линейных объектов, уравнения движения которых интегрально непрерывны относительно некоторого параметра. Устанавливаются достаточные условия, обеспечивающие в регулярном случае непрерывность цены игры и полунепрерывность множества оптимальных движений игроков по отношению к изменениям этого параметра.

1. Пусть движение преследующего $y(t)$ и преследуемого $z(t)$ объектов описываются линейными дифференциальными уравнениями

$$y^{\cdot} = A^{(1)}(t, \lambda)\, y + B^{(1)}(t, \lambda)\, u, \quad u \in P \tag{1.1}$$

$$z^{\cdot} = A^{(2)}(t, \lambda)\, z + B^{(2)}(t, \lambda)\, v, \quad v \in Q \tag{1.2}$$

Здесь $y = \{y_1, \ldots, y_n\}$ и $z = \{z_1, \ldots, z_n\}$ — векторы фазовых координат управляемых объектов; u и v — r-мерные векторы управляющих воздействий; P и Q — ограниченные, выпуклые и замкнутые множества, описывающие ограничения на управляющие воздействия игроков; $A^{(j)}(t, \lambda)$ и $B^{(j)}(t, \lambda)$, $(j = 1,2)$ — непрерывные по $t \in [t_0, \vartheta]$ и ограниченные по λ матрицы соответствующих размерностей; $\lambda \in \Lambda$, Λ — некоторое множество значений параметра λ, содержащее в себе предельную точку λ_0.

Цель данной работы — изучение игровой задачи о сближении (см. [1], § 7) объектов (1.1) и (1.2), когда плата игры определяется величиной $\gamma[\vartheta] = \| \{y[\vartheta]\}_m - \{z[\vartheta]\}_m \|$, где $\|x\|$ — евклидова норма вектора x, а $\{x\}_m$— вектор, составленный из m первых компонент вектора x. В регулярном случае исследуется зависимость цены игры и оптимальных движений игроков от λ при условии, что правые части уравнений (1.1) и (1.2) — интегрально непрерывные [2, 3] функции параметра λ в точке λ_0. Изложение материала опирается на понятия экстремальной конструкции и правила экстремального прицеливания, обоснованных в [1].

Определение 1.1. Стратегия $U_\lambda \div U(t, y, z, \lambda)$ называется интегрально полунепрерывной по параметру λ в точке λ_0 по отношению к матрице $B^{(1)}(t, \lambda)$, если 1) при каждом $\lambda \in \Lambda$ множества $U(t, y, z, \lambda)$ выпуклы, замкнуты и полунепрерывны сверху по включению при изменении t, y и z в окрестности каждой возможной позиции; 2) матрица $B^{(1)}(t, \lambda)$, $t \in [t_0, \vartheta]$ ограничена и интегрально непрерывна по параметру λ в точке λ_0; 3) каково бы ни было семейство вектор-функций $x(t, \lambda) = \{y(t, \lambda),$

$z(t, \lambda)\}$, непрерывных по λ и таких, что предельное соотношение $\lim x(t, \lambda) = x(t, \lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$ выполняется равномерно относительно $t \in [t_0, \vartheta]$, множество

$$\int_{t_0}^{t} B^{(1)}(\tau, \lambda) U(\tau, y(\tau, \lambda), z(\tau, \lambda), \lambda)\, d\tau$$

полунепрерывно сверху по включению при изменении параметра λ в окрестности точки λ_0 при всех $t \in [t_0, \vartheta]$.

Аналогичным образом определяется стратегия $V_\lambda \div V(t, y, z, \lambda)$, интегрально полунепрерывная по параметру λ в точке λ_0 по отношению к матрице $B^{(2)}(t, \lambda)$.

Интегрально полунепрерывные стратегии U_λ и V_λ при каждом $\lambda \in \Lambda$ допустимы, поэтому при каждом $\lambda \in \Lambda$ уравнения (1.1) и (1.2) обладают [1,4,5] семейством движений $X(U_\lambda, V_\lambda; t_0, y^\circ, z^\circ, \lambda)$, состоящим из абсолютно непрерывных решений $x[t, \lambda] = \{y[t, \lambda], z[t, \lambda]\}$ этих уравнений, порождаемых стратегиями U_λ и V_λ для произвольной начальной позиции $\{t_0, y^\circ, z^\circ\}$.

Опираясь на рассуждения и результаты работ [1-5], можно убедиться в справедливости следующего утверждения.

Теорема 1.1. Пусть допустимые стратегии U_λ и V_λ интегрально полунепрерывны по параметру λ в точке λ_0 соответственно по отношению к матрицам $B^{(1)}(t, \lambda)$ и $B^{(2)}(t, \lambda)$ и пусть матрицы $A^{(1)}(t, \lambda)$ и $A^{(2)}(t, \lambda)$ ограничены и интегрально непрерывны по λ в точке λ_0, тогда для любого выбранного наперед числа $\alpha > 0$ можно указать такую окрестность $\Omega(\lambda_0)$ точки λ_0, что

1) При всех $\lambda \in \Omega(\lambda_0)$ семейства ломаных Эйлера $X^{(\Delta)}(U_\lambda, V_\lambda; t_0, y^\circ, z^\circ, \lambda)$ будут лежать в α-окрестности семейства $X^{(\Delta)}(U_{\lambda_0}, V_{\lambda_0}; t_0, y^\circ, z^\circ, \lambda_0)$. При этом окрестность $\Omega(\lambda_0)$ можно выбрать независимой от разбиения Δ и от начальной позиции $\{t_0, y^\circ, z^\circ\}$ из произвольной ограниченной области Γ в пространстве $\{t, y, z\}$.

2) При всех $\lambda \in \Omega(\lambda_0)$ семейства движений $X(U_\lambda, V_\lambda; t_0, y^\circ, z^\circ, \lambda)$ будут лежать в α-окрестности семейства $X(U_{\lambda_0}, V_{\lambda_0}; t_0, y^\circ, z^\circ, \lambda_0)$. При этом окрестность $\Omega(\lambda_0)$ можно выбрать независимой от начальной позиции $\{t_0, y^\circ, z^\circ\} \in \Gamma$.

2. Рассмотрим управляемую систему

$$dx / d\tau = A(\tau, \lambda)x + B(\tau, \lambda) w, \quad w \in R \tag{2.1}$$

где $A(\tau, \lambda)$, $B(\tau, \lambda)$ — матрицы, непрерывные по τ, ограниченные по $\lambda \in \Lambda$ и интегрально непрерывные по параметру λ в точке λ_0; R — выпуклое, замкнутое и ограниченное множество.

Пусть $G(\vartheta, t, x, \lambda)$ — область достижимости системы (2.1) в m-мерном пространстве $\{q\}$ точек $q = \{x\}_m$ из состояния $\tau = t \geqslant t_0$, $x(t) = x$ к моменту $\tau = \vartheta$. При каждом $\lambda \in \Lambda$ область достижимости $G(\vartheta, t, x, \lambda)$ является выпуклым, замкнутым и ограниченным множеством, опорная функция $\rho\,[l, \vartheta, t, x, \lambda]$ которого описывается равенством

$$\rho\,[l,\vartheta,t,x,\lambda] = l'\{X\,[\vartheta,t,\lambda]\,x\}_m + \max_{w\in R}\int_t^{\vartheta} l'\{X\,[\vartheta,\tau,\lambda]\,B(\tau,\lambda)\}_m\, w(\tau,\lambda)\,d\tau \tag{2.2}$$

где $X\,[\vartheta, \tau, \lambda]$ — фундаментальная матрица уравнения (2.1) при $w \equiv 0$, $X\,[\tau, \tau, \lambda] = E$ — единичная матрица; l — произвольный единичный m-мерный вектор, $\|l\| = 1$.

Рассмотрим множество $W^\circ(l, \tau, \lambda)$ программных управлений $w^\circ(l, \tau, \lambda) \in R$, $t_0 \leqslant t \leqslant \tau \leqslant \vartheta$, удовлетворяющих условию максимума

$$l'\{X\,[\vartheta,\tau,\lambda]\,B(\tau,\lambda)\}_m\, w^\circ(l,\tau,\lambda) = \max_{w\in R} l'\{X\,[\vartheta,\tau,\lambda]\,B(\tau,\lambda)\}_m\, w \tag{2.3}$$

Условие 2.1. При всех t, τ и l множество

$$\int_t^{\tau} B(\zeta,\lambda)\,W^\circ(l,\zeta,\lambda)\,d\zeta$$

полунепрерывно сверху по включению при изменении параметра λ в окрестности точки λ_0.

Лемма 2.1. Если управляемая система (2.1) удовлетворяет условию 2.1 и если матрицы $A(\tau, \lambda)$ и $B(\tau, \lambda)$ интегрально непрерывны по параметру λ в точке λ_0 и ограничены, то область достижимости $G(\vartheta, t, x, \lambda)$ системы (2.1) непрерывна по параметру λ в точке λ_0.

Доказательство. В силу условия 2.1 предел любой сходящейся последовательности

$$\int_t^{\vartheta} B(\tau,\lambda_k)\,w^\circ(l,\tau,\lambda_k)\,d\tau, \quad \lambda_k \to \lambda_0, \quad k = 1,2,3,\ldots \tag{2.4}$$

содержится во множестве

$$\int_t^{\vartheta} B(\tau,\lambda_0)\,W^\circ(l,\tau,\lambda_0)\,d\tau$$

каковы бы ни были вектор l и момент времени $t \geqslant t_0$. Из результатов работ [2, 3] вытекает, что фундаментальная матрица $X\,[t, \tau, \lambda]$ непрерывна по параметру λ в точке λ_0 равномерно относительно величин $t, \tau \in [t_0, \vartheta]$. Следовательно, для любой сходящейся последовательности (2.4) и произвольных l и t справедливо равенство

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda_k\to\lambda_0}\int_t^{\vartheta} l'\{X\,[\vartheta,\tau,\lambda_k]\,B(\tau,\lambda_k)\}_m\, w^\circ(l,\tau,\lambda_k)\,d\tau &= \\ = \lim_{\lambda_k\to\lambda_0}\max_{w\in R}\int_t^{\vartheta} l'\{X\,[\vartheta,\tau,\lambda_k]\,B(\tau,\lambda_k)\}_m\, w(\tau,\lambda_k)\,d\tau &= \\ = \max_{w\in R}\int_t^{\vartheta} l'\{X\,[\vartheta,\tau,\lambda_k]\,B(\tau,\lambda_k)\}_m\, w(\tau,\lambda_k)\,d\tau &\end{aligned} \tag{2.5}$$

Из (2.5) и непрерывности матрицы $X[\vartheta, t, \lambda]$ получаем, что опорная функция $\rho[l, \vartheta, t, x, \lambda]$ (2.2) области достижимости $G(\vartheta, t, x, \lambda)$ непрерывна по λ в точке λ_0.

Используя непрерывность области достижимости $G(\vartheta, t, x, \lambda)$ по λ в точке λ_0, легко проверить, что имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.2. Если управляемая система (2.1) удовлетворяет условию 2.1 и если матрицы $A(\tau, \lambda)$ и $B(\tau, \lambda)$ интегрально непрерывны по параметру λ в точке λ_0, то множество

$$\int_t^\tau B(\zeta, \lambda)\, W^\circ(l(\zeta, \lambda), \zeta, \lambda)\, d\zeta$$

полунепрерывно сверху по включению при изменении параметра λ в окрестности точки λ_0 при всех t и τ, каково бы ни было семейство единичных вектор-функций $l(\zeta, \lambda)$, непрерывных по ζ и таких, что предельное соотношение $\lim l(\zeta, \lambda) = l(\zeta, \lambda_0)$ при $\lambda \to \lambda_0$ выполняется равномерно относительно ζ.

3. Пусть $\rho^{(1)}[l, \vartheta, t, y, \lambda]$ и $\rho^{(2)}[l, \vartheta, t, z, \lambda]$ — опорные функции областей достижимости $G^{(1)}(\vartheta, t, y, \lambda)$ и $G^{(2)}(\vartheta, t, z, \lambda)$ соответственно преследующего и преследуемого объектов к моменту времени $t = \vartheta$ из позиции $y[t] = y$, $z[t] = z$. Рассмотрим величину

$$\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda) = \max_{\|l\|=1} \{\rho^{(2)}[l, \vartheta, t, z, \lambda] - \rho^{(1)}[l, \vartheta, t, y, \lambda]\} =$$
$$= \max_{\|l\|=1} \Big\{l'\{Z[\vartheta, t, \lambda]\, z\}_m - l'\{Y[\vartheta, t, \lambda]\, y\}_m +$$
$$+ \max_{v\in Q} \int_t^\vartheta l'\left\{Z[\vartheta, \tau, \lambda]\, B^{(2)}(\tau, \lambda)\right\}_m v(\tau, \lambda)\, d\tau -$$
$$- \max_{u\in P} \int_t^\vartheta l'\{Y[\vartheta, \tau, \lambda]\, B^{(1)}(\tau, \lambda)\}_m u(\tau, \lambda)\, d\tau\Big\} \tag{3.1}$$

Определение 3.1. Будем говорить, что имеет место регулярный случай, если существует такая окрестность $\Omega(\lambda_0)$ точки λ_0, что для всех позиций $\{t, y, z\}$, которые могут встретиться в рассматриваемой игре и для которых $\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda) > 0$, максимум в правой части равенства (3.1) достигается на единственном векторе $l^\circ(t, y, z, \lambda)$ при всех $\lambda \in \Omega(\lambda_0)$.

Будем предполагать, что правые части уравнений (1.1) и (1.2) удовлетворяют следующим требованиям.

Условие 3.1. 1) Матрицы $A^{(j)}(t, \lambda)$ и $B^{(j)}(t, \lambda)$, $(j = 1, 2)$ непрерывны по t, ограничены по λ и интегрально непрерывны по λ в точке λ_0. 2) Для уравнений (1.1) и (1.2) выполняется условие 2.1.

Из результатов работ [1, 6] и леммы 2.1 следует справедливость следующих утверждений.

Лемма 3.1. Если правые части уравнений (1.1) и (1.2) удовлетворяют условию 3.1, то $\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda)$ (3.1) — непрерывная функция позиции игры $\{t, y, z\}$ и параметра λ в точке λ_0.

Лемма 3.2. Если правые части уравнений (1.1) и (1.2) удовлетворяют условию 3.1 и если имеет место регулярный случай, то вектор $l^\circ(t, y, z, \lambda)$ непрерывно зависит от позиции игры $\{t, y, z\}$ и параметра λ в точке λ_0.

Известно [1], что оптимальные стратегии игроков $U_\lambda^\circ \div U^\circ(t, y, z, \lambda)$ и $V_\lambda^\circ \div V^\circ(t, y, z, \lambda)$, доставляющие игре сближения седловую точку, определяются по правилу экстремального прицеливания, т. е. множества $U^\circ(t, y, z, \lambda)$ и $V^\circ(t, y, z, \lambda)$ в области $\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda) > 0$, $t < \vartheta$ состоят из всех тех векторов $u \in P$ и $v \in Q$, которые удовлетворяют в момент времени t условию максимума (2.3) при $\tau = t$ и $l = l^\circ(t, y, z, \lambda_0)$; если же $\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda) = 0$, то $U^\circ(t, y, z, \lambda) = P$ и $V(t, y, z, \lambda) = Q$. Из лемм 3.1, 3.2, 4.1 и 4.2 следует, что оптимальные стратегии U_λ° и V_λ° интегрально полунепрерывны по параметру λ в точке λ_0, если выполнено условие 3.1 и имеет место регулярный случай. Обращаясь к теореме 1.1, приходим к следующему выводу.

Теорема 3.1. Если правые части уравнений (1.1) и (1.2) удовлетворяют условию 3.1 и имеет место регулярный случай, то: 1) цена $\varepsilon^\circ(t_0, y^\circ, z^\circ, \lambda)$ игровой задачи о сближении объектов (1.1) и (1.2) непрерывна по параметру λ в точке λ_0 и по начальной позиции $\{t_0, y^\circ, z^\circ\}$ из произвольной ограниченной области Γ в пространстве $\{t, y, z\}$; 2) множество оптимальных аппроксимационных движений $X^{(\Delta)}(U_\lambda^\circ, V_\lambda^\circ; t_0, y^\circ, z^\circ, \lambda)$ полунепрерывно сверху по включению при изменении параметра λ в окрестности точки λ_0, равномерно по всем разбиениям Δ отрезка $[t_0, \vartheta]$ и всем начальным позициям $\{t_0, y^\circ, z^\circ\} \in \Gamma$; 3) Множество оптимальных движений $X(U_\lambda^\circ, V_\lambda^\circ; t_0, y^\circ, z^\circ, \lambda)$ полунепрерывно сверху по включению при изменении параметра λ в окрестности точки λ_0, равномерно по всем начальным позициям $\{t_0, y^\circ, z^\circ\} \in \Gamma$.

4. Рассмотрим задачу о сближении объектов, описываемых дифференциальными уравнениями

$$\begin{aligned}
&y_1^{\cdot} = y_2,\ y_2^{\cdot} = a(t, \lambda)\, u_1,\ y_3^{\cdot} = y_4,\ y_4^{\cdot} = a(t, \lambda)\, u_2\\
&z_1^{\cdot} = z_2,\ z_2^{\cdot} = b(t, \lambda)\, v_1,\ z_3^{\cdot} = z_4,\ z_4^{\cdot} = b(t, \lambda)\, v_2\\
&u_1^2 + u_2^2 \leqslant \mu^2,\ v_1^2 + v_2^2 \leqslant \nu^2,\ \mu > \nu\\
&a(t, \lambda) = \begin{cases} 1 + a\cos t/\lambda, & \lambda \neq 0\\ 1, & \lambda = 0,\end{cases} \qquad b(t, \lambda) = \begin{cases} 1 + b\sin t/\lambda, & \lambda \neq 0\\ 1, & \lambda = 0\end{cases}\\
&a = \mathrm{const},\ b = \mathrm{const},\ |a| \leqslant 1,\ |b| \leqslant 1
\end{aligned}$$

Пусть плата игры $\gamma[\vartheta]$ определяется равенством

$$\gamma[\vartheta] = [(y_1(\vartheta) - z_1(\vartheta))^2 + (y_3(\vartheta) - z_3(\vartheta))^2]^{1/2}$$

Можно проверить, что при всех λ выполнены условия теоремы 3.1. Произведя необходимые вычисления, получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda) = {}& \eta - \zeta\frac{(\vartheta - t)^2}{2} + \lambda a\mu\left[(\vartheta - t)\sin\frac{t}{\lambda} + \lambda\left(\cos\frac{\vartheta}{\lambda} - \cos\frac{t}{\lambda}\right)\right] + \\
&+ \lambda b\nu\left[(\vartheta - t)\cos\frac{t}{\lambda} - \lambda\left(\sin\frac{\vartheta}{\lambda} - \sin\frac{t}{\lambda}\right)\right]\\
l_1^\circ = {}& [x_1 + (\vartheta - t)\, x_2] / \eta\\
l_2^\circ = {}& [x_3 + (\vartheta - t)\, x_4] / \eta\\
\eta = {}& [(x_1 + (\vartheta - t)\, x_2)^2 + (x_3 + (\vartheta - t)\, x_4)^2]^{1/2}\\
&(x_i = y_i - z_i,\ i = 1, 2, 3, 4;\ \zeta = \mu - \nu)
\end{aligned}$$

Оптимальные стратегии U_λ° и V_λ° описываются следующим образом: 1) если $\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda) > 0$, то множества $U^\circ(t, y, z, \lambda)$ и $V^\circ(t, y, z, \lambda)$ состоят из единственной точки $u^\circ[t] = \mu l^\circ$ и $v^\circ[t] = \nu l^\circ$; 2) если $\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda) = 0$, то $U^\circ = P$ и $V^\circ = Q$.

На этом примере легко убедиться, что требование интегральной непрерывности по параметру правых частей уравнений (1.1) и (1.2) существенно. Действительно, если предположить, что $a(t, 0) = b(t, 0) = k$, где k — произвольная постоянная, не равная единице, то функции $a(t, \lambda)$ и $b(t, \lambda)$ не будут интегрально непрерывными по λ в точке $\lambda = 0$. При этом при $\lambda = 0$ имеем

$$\varepsilon^\circ(t, y, z, 0) = \eta - {}^1/_2 \, | k | \, \zeta (\vartheta - t)^2$$

и, следовательно, в таком случае величина $\varepsilon^\circ(t, y, z, \lambda)$ не непрерывна по λ в точке $\lambda = 0$.

Поступила 6 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. *Красносельский М. А., Крейн С. Г.* О принципе усреднения в нелинейной механике. Успехи матем. наук, 1955, т. 10, вып. 3.
3. *Курцвейль Я., Ворел З.* О непрерывной зависимости решений дифференциальных уравнений от параметра. Чехосл. матем. ж., 1957, т. 7, № 4.
4. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью, Матем. сб., 1960, т. 51 (93), вып. 1.
5. *Демьянов В. Ф., Малоземов В. Н.* Введение в минимакс. М., «Наука», 1972.
6. *Пшеничный Б. Н.* Необходимые условия экстремума. М., «Наука», 1969.