Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 62—50

ОБ УПРАВЛЕНИИ ПРИ НЕПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИИ

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Рассматривается задача об управлении в условиях неполной информации о реализующихся фазовых состояниях системы. Исходная проблема формализуется как задача о сближении в подходящей дифференциальной игре. Используются понятия и обозначения, отвечающие аппарату из работ [1,2].

1. Постановка задачи. Рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$dy / dt = A(t)\, y + f^*(t, u, v), \quad u \in P,\ v \in Q \tag{1.1}$$

Здесь y — фазовый вектор объекта; u и v — векторы управлений первого и второго игроков; P и Q — компакты; матрица $A(t)$ и вектор $f^*(t, u, v)$ — непрерывные функции. Предмет статьи составляет задача первого игрока — союзника [1] о сближении $\{y[\vartheta]\}_m \in M$ в зафиксированный момент времени ϑ с целевым множеством M, заданным в m-мерном пространстве первых m координат $\{y\}_m$ вектора y. Подходящим линейным преобразованием (см. [1], стр. 160, 161) проблема приводится к задаче сближения $x[\vartheta] \in M$ в момент ϑ для m-мерного вектора x с тем же множеством M, причем изменение $x[t]$ во времени будет описываться уравнением

$$dx / dt = f(t, u, v) \tag{1.2}$$

Особенность задачи состоит в том, что первому игроку в каждый текущий момент времени $t \in [t_0, \vartheta]$ становится известной только информационная область $G[t]$, которая содержит реализацию $x[t]$. Поэтому задача сводится к такому управлению реализациями $G[t]$, которое обеспечивает вложение $G[\vartheta] \subset M$. Целевое множество M будем полагать ограниченным, выпуклым и замкнутым. Примем, что допустимые области $G[t]$ тоже ограничены, выпуклы и замкнуты. Будем различать следующие случаи использования информации для построения областей $G[t]$.

1°. Второй игрок — противник, может быть, узнает в текущие моменты времени t как реализации $x[t]$ фазового вектора, так и реализации $u[t]$ управления первого игрока. Первый игрок — союзник узнает в текущие моменты t реализации $G[t]$ информационной области, но не получает прямой информации о реализациях $v[t]$ управления второго игрока.

2°. Второй игрок, может быть, узнает реализации $x[t]$, но у него нет прямой информации о реализациях $u[t]$. Первый игрок узнает реализации $G[t]$, но не получает прямой информации о реализациях $v[t]$.

3°. Второй игрок, может быть, узнает $x[t]$. Первый игрок узнает $G[t]$ и может использовать значения $v[t]$ в органах, вырабатывающих управляющую силу $u[t]$, но он не может использовать значения $v[\tau]$ $(\tau < t)$ для уточнения реализации $G[t]$ информационной области.

4°. Второй игрок, может быть, узнает $x[t]$. Первый игрок узнает $G[t]$ и может использовать значения $v[t]$ в органах, вырабатывающих управляющую силу $u[t]$; он может также использовать значения $v[\tau]$ $(\tau \leqslant t)$ для построения реализации $G[t]$.

Во всех случаях в основе процедуры управления первого игрока на малых полуинтервалах времени $t_* \leqslant t < t^*$ лежит следующее понятие его программы $U[t_*, t^*)$, которое служит здесь для построения аналогов стратегии из [1]. В каждом случае сначала определяется понятие элементарной программы $U_e[t_*, t^*)$, которое затем расширяется до более общего понятия программы $U[t_*, t^*)$. Элементарная программа $U_e[t_*, t^*)$, задаваемая при $t_* \leqslant t < t^*$ кусочно-постоянной функцией $u[t] \in P$ или кусочно-постоянной по t функцией — вероятностной мерой $\mu_t(du)$ на P, или кусочно-постоянной по t и борелевски измеримой по $v \in Q$ функцией $u(t, v) \in P$ (соответственно в случаях 1° или 2°, или 3°, 4°), определяется как операция, которая строит множество точек

$$(1.3)\qquad G_1[t_*, t^*] = \mathrm{co}\left\{x : x = \int_{t_*}^{t^*} f(t, u[t], v(t))\,dt;\ v(t) \in Q\right\}$$

$$(1.4)\qquad G_2[t_*, t^*] = \left\{x : x = \int_{t_*}^{t^*} \int_{P\times Q} f(t, u, v)\,\mu_t(du)\,\nu_t(dv);\ \nu_t(dv)\right\}$$

где $\nu_t(dv)$ пробегает множество всех возможных вероятностных мер $\nu_t(dv)$ на Q, слабо измеримых по t

$$(1.5)\qquad G_3[t_*, t^*] = \mathrm{co}\left\{x : x = \int_{t_*}^{t^*} f(t, u(t, v(t)), v(t))\,dt;\ v(t) \in Q\right\}$$

$$(1.6)\qquad G_4[t_*, t^*] = x = \int_{t_*}^{t^*} f(t, u(t, v(t)), v(t))\,dt;\ v(t) \in Q$$

причем символ $\mathrm{co}\,\{x : x = \ldots\}$ означает выпуклую замкнутую оболочку соответствующего множества векторов x; в равенствах (1.3) и (1.5) $v(t)$ пробегает множество всех возможных измеримых по Лебегу функций $v(t) \in Q$, а в равенстве (1.6) $v(t)$ — какая-нибудь фиксированная такая функция.

Выпуклая, замкнутая, ограниченная область $G_j[t_*, t^*]$ характеризуется ее опорной функцией

$$(1.7)\qquad g_j(l;\ t^*, t_*, U) = \max_x l'x, \quad x \in G_j$$

(Векторы трактуются как вектор-столбцы, штрих означает транспонирование, $\|l\|$ — евклидова норма вектора l.)

Функции $g_j(l;\ t^*, t_*, U)$ переменной l будем трактовать как элементы гильбертова пространства (см. [1], стр. 409, 410) H функций $h(l)$ с интегрируемым квадратом на шаре $\|l\| \leqslant 1$, причем скалярное произведение $\langle h \cdot g \rangle$ в H определено равенством

$$(1.8) \qquad \langle h \cdot g \rangle = \int\limits_{\|l\| \leqslant 1} h(l) \cdot g(l)\, d\{l\}$$

и, стало быть, норма $\|h\|_H$ определена равенством

$$(1.9) \qquad \|h\|_H = \langle h \cdot h \rangle^{1/2}$$

При фиксированном значении j составим выпуклую замкнутую в пространстве H оболочку $\mathrm{co}\{g_j\}$ множества всех опорных функций $g_j(l;\ t^*,\ t_*,\ U_e)$, отвечающих всем возможным элементарным программам $U_e[t_*,\ t^*]$ при фиксированных t_* и t^*. Теперь программой $U[t_*,\ t^*)$ при данном значении j будем называть операцию, которая строит множество $G[t_*,\ t^*)$, отвечающее какой-нибудь опорной функции $g(l;\ t^*,\ t_*,\ U) \in \mathrm{co}\ \{g_j\}$.

Зафиксированные область $G[t_*]$ и программа $U[t_*,\ t^*)$ определяют область достижимости $G(t^*,\ t_*,\ G[t_*],\ U)$, которая складывается из всех точек $x^* = x_* + x$, где $x_* \in G[t_*]$ и $x \in G[t_*,\ t^*]$.

Изменение областей $G[t]$ во времени t подчиним следующим условиям (см. [1], стр. 407, 408). Пусть в момент $t = t_*$ реализовалась область $G[t_*]$ и для полуинтервала $[t_*,\ t^*)$ первый игрок выбрал некоторую программу $U[t_*,\ t^*)$. Тогда в момент $t = t^*$ может реализоваться только область $G[t^*]$, которая удовлетворяет включению

$$(1.10) \qquad G[t^*] \in G(t^*,\ t_*,\ G[t_*],\ U)$$

Кроме того, примем, что область $G[t_*]$ и программа $U[t_*,\ t^*)$ выделяют семейство $\{G^*[t^*];\ G[t_*],\ U[t_*,\ t^*)\}$ возможных реализаций областей $G^*[t^*]$, удовлетворяющих условию (1.10). Таким образом, в момент $t = t^*$ может реализоваться только область

$$(1.11) \qquad G[t^*] \in \{G^*[t^*];\ G[t_*],\ U[t_*,\ t^*)\}$$

Свойства допустимых семейств (1.11) будут оговорены позднее.

Первый игрок должен формировать свое управление в дискретной по времени t схеме, опирающейся на подходящие разбиения $\Delta = \{\tau_i;\ \tau_0 = t_0,\ i = 1, \ldots, n,\ \tau_n = \vartheta\}$ оси t полуинтервалами $[\tau_i,\ \tau_{i+1})$. При этом выбор каждой программы $U[\tau_i,\ \tau_{i+1})$ первым игроком в момент τ_i на будущий полуинтервал времени $[\tau_i,\ \tau_{i+1})$ определяется реализацией $G[\tau_i]$ и, может быть, реализацией в момент τ_i каких-то еще вспомогательных переменных, которые первому игроку оказывается удобным формировать в его органах управления. Пусть $M^{(\varepsilon)}$ — евклидова ε-окрестность множества M. Тогда задача первого игрока состоит в построении такой процедуры управления, которая определяется программами $\{U[\tau_i,\ \tau_{i+1});\ G[\tau_i], \ldots\}$, работающими на малых полуинтервалах времени $[\tau,\ \tau_{i+1})$, и которая при всяком наперед выбранном значении $\varepsilon > 0$ для всех возможных реализациях областей $G[t]$, удовлетворяющих условиям (1.10), (1.11), обеспечивает вложение

$$(1.12) \qquad G[\vartheta] \subset M^{(\varepsilon)}$$

если только шаг $\delta(\Delta) = \max_i (\tau_{i+1} - \tau_i)$ разбиения Δ будет достаточно мал.

2. Формализация задачи. Изменение информационных областей $G[t]$ во времени t будем трактовать как движение $g[l; t]$ в функциональном фазовом пространстве H, содержащем, согласно п. 1, опорные функции

(2.1) $$g[l; t] = \max_x l'x, \quad x \in G[t]$$

областей $G[t]$. Пусть $g[l; t_*]$ — опорная функция для области $G[t_*]$. Опорная функция $g(l; t^*, t_*, g[l; t_*], U)$ области достижимости $G(t^*, t_*, G[t_*], U)$ определяется равенством

(2.2) $$g(l; t^*, t_*, g[l; t_*], U) = g[l; t_*] + g(l; t^*, t_*, U)$$

где величина $g(l; t^*, t_*, U)$ определена выше на стр. 199.

В качестве частного случая условия (1.11) выберем следующее неравенство (см. [1], стр. 410):

(2.3) $$g[l; t] + g[-l, t] \leqslant \varphi(t, l)$$

где функцию $\varphi(t, l)$ будем полагать не возрастающей и по t дифференцируемой. В общем случае условие (1.11) перепишем для опорной функции $g[l, t]$ снова в виде включения

(2.4) $$g[l; t^*] \in \{g^*[l; t^*]; g[l; t_*], U[t_*, t^*)\}$$

Относительно условия (2.4) будем предполагать следующее: 1) условие (2.4) не включает в себя, вообще говоря, требования, что $g[l; t]$ — опорная функция для какой-то области $G[t]$, оно может прилагаться к каким-то элементам $g[l, t] \in H$, опорными функциями не являющимися; 2) встречающиеся ниже задачи на минимум (3.1) и (4.1) при условии (2.4) имеют нужные в п. 3,4 решения p° и U^g; 3) пусть функция $g[l; t^*]$ образуется по $g[l, t_*]$, $U[t_*, t^*)$ и $p(l)$ в соответствии с (2.6) (см. ниже) и удовлетворяет включению (2.4) при $t = t^*$, тогда при той же программе $U[t_*, t^*)$ найдется срезка $p_*(l) \leqslant p(l)$, такая, что функция $g_*[l; t^*] = g[l; t_*] + g(l; t^*, t_*, U) - p_*(l)$ снова удовлетворит включению (2.4) при $t = t^*$ и притом будет выполнено неравенство

(2.5) $$\|p_*(l)\|_H \leqslant \beta(t^* - t_*) \quad (\beta = \text{const})$$

Все перечисленные предположения выполняются в частном случае (2.3) условия (2.4).

Таким образом, движением $g[l; t^*]$ из позиции $g[l; t_*] \in H$, порожденным программой $U[t_*, t^*)$, будем называть всякую функцию $g[l; t^*] \in H$ вида

(2.6) $$g[l; t^*] = g[l; t_*] + g(l; t^*, t_*, U) - p(l)$$

где срезка $p(l)$ — неотрицательная функция из H, такая, что выполнено условие (2.4), или — в частном случае — условие (2.3) (при $t = t^*$).

Будем искать разрешающую процедуру управления в схеме с поводырем (см. [1], стр. 248—254). Состояния модели поводыря будем описывать также элементами $w[l; t] \in H$. При этом не будем требовать, чтобы функция $w[l;\ t] \in H$ обязательно была опорной функцией для какой-либо области $G[t]$. Движение поводыря $w[l;\ t^*]$, порожденное некоторой програмой $U[t_*,\ t^*)$ из положения $w[l;\ t_*)$, по аналогии с (2.6) определим сначала выражением

$$(2.7)\qquad w^*[l;\ t^*] = w[l;\ t_*] + g(l;\ t^*,\ t_*,\ U) - p(l),\ p(l) \geqslant 0$$

а потом допустим еще изменение его скачком $w^*[l;\ t^*] \to w[l;\ t^*]$, удовлетворяющим условию

$$\|\Delta w\|_H = \|w[l;\ t^*] - w^*[l;\ t^*]\|_H \leqslant \alpha(\delta)(\tau_{i+1} - \tau_i)$$

где $\alpha(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0,\ \tau_{i+1} - \tau_i \leqslant \delta$.

Теперь стратегией U первого игрока (чистой стратегией $U^{(1)}$ в случае 1°, смешанной стратегией $U^{(2)}$ в случае 2°, контрстратегией $U_3^{(V)}$ или контрстратегией $U_4^{(V)}$ в случаях 3° или 4°) будем называть совокупность

$$\begin{aligned}&\{U^g([\tau_i,\ \tau_{i+1});\ g[l;\ \tau_i],\ w[l;\ \tau_i])\\ &U^w([\tau_i,\ \tau_{i+1});\ g[l;\ \tau_i],\ w[l;\ \tau_i],\ g[l;\ \tau_{i+1}])\\ &p^w(l;\ g[l;\ \tau_i],\ w[l;\ \tau_i],\ g[l;\ \tau_{i+1}])\\ &w[l;\ \tau_{i+1};\ w[l;\ \tau_i],\ U^w,\ p^w,\ g[l;\tau_{i+1}]]\}\qquad (i = 0, 1, \ldots, \tau_0 = t_0)\end{aligned}$$

где программы $U^g[\tau_i,\ \tau_{i+1})$ определяют движение $g[l;\ t]$ системы в соответствии с условиями (2.6) и (2.4) (при $t_* = \tau_i,\ t^* = \tau_{i+1}$ и $U = U^g$), а программы $U^w[\tau_i,\ \tau_{i+1})$, срезка $p^w(l)$ и функция $w[l;\ \tau_{i+1}]$ определяют движение $w[l;\ t]$ поводыря последовательно на отрезках $[\tau_i,\ \tau_{i+1}]$. Таким образом, в данной формализации на долю второго игрока остается выбор срезок $p(l) = p^g[l;\tau_i]$ $(i = 0, 1, \ldots)$ в движении $g[l,\ t]$ (2.6) данной управляемой системы.

Пусть L — множество элементов $h(l)$ из H, которые удовлетворяют условию $h(l) \leqslant m(l)$, где $m(l)$ — опорная функция множества M. Символом $L^{(\varepsilon)}$ обозначим ε-окрестность множества L в метрике пространства H. Введенные понятия приводят к следующей формализации исходной задачи о сближении с множеством M, описанной в п. 1 содержательно.

Задача 2.1. Указан случай 1° — 3° или 4°. Даны момент ϑ и начальная позиция $g[l;\ t_0]$ $(t_0 < \vartheta)$. Требуется найти стратегию U, которая при всяком наперед выбранном значении $\varepsilon > 0$ обеспечит включение

$$(2.8)\qquad g[l;\ \vartheta] \in L^{(\varepsilon)}$$

для всякого порожденного ею движения $g[l;\ t]$ из данной позиции $g[l;\ t_0]$, если только шаг $\delta(\Delta) = \max_i(\tau_{i+1} - \tau_i)$ разбиения Δ $\{\tau_i\}$ оси t будет достаточно мал.

3. Стабильный мост. Как и в случае позиционной дифференциальной игры с полной информацией [1], в рассматриваемом случае неполной информации основу для построения процедуры управления с поводырем составит понятие стабильного моста W в пространстве $\{t,\ H\}$, который должен соединять исходную позицию $g[l;\ t_0]$ с целевым множеством L и вдоль которого можно, действуя подходящим образом, подвести движение поводыря $w[l;\ t]$ к множеству L в момент $t=\vartheta$, заставляя в то же время движение $g[l;\ t]$ системы и движение $w[l;\ t]$ поводыря взаимно отслеживать друг друга.

Пусть $\lambda(l)$ — некоторая неотрицательная функция из H, $g[l;\ t_*]$ — некоторый допустимый элемент из H, т. е. такая функция $g[l;\ t_*]=h(l)\in H$, которая не противоречит условию (2.4), хотя, может быть, и не обязательно $g[l;\ t]$ — опорная функция для какой-то подходящей области $G[t]$. Пусть далее $U[t_*,\ t^*)$ — некоторая программа. Обозначим символом $p^\circ(l;\ t^*,\ t_*,\ g[l;\ t_*],\ U,\ \lambda)$ экстремальную срезку $p(l)$ из равенства (2.6), которая среди всех срезок $p(l)$, удовлетворяющих условию (2.4), удовлетворяет также следующему условию минимума:

$$\langle p^\circ(l;\ t^*,\ t_*,\ g[l;\ t_*],\ U,\ \lambda)\cdot\lambda(l)\rangle=\min_{p(l)}\langle p(l)\cdot\lambda(l)\rangle \tag{3.1}$$

Полагаем при этом (см. стр. 200), что условие (2.4) таково, что определение экстремальной срезки p° как функции (может быть, неоднозначной) от аргументов t_*, t^*, $g[l;\ t_*]$, U и λ является корректным. Будем также называть (формально) экстремальной срезкой $p^\circ(l,\ t^*,\ t_*,\ g[l;\ t_*],\ U^*,\ \lambda)$ всякую функцию $p^*(l)$, которая определяет функцию

$$h^*(l)=g[l;\ t_*]+g(l;\ t^*,\ t_*,\ U)-p^*(l)$$

содержащуюся в выпуклой замкнутой оболочке функций

$$h(l)=g[l;\ t_*]+g(l;\ t^*,\ t_*,\ U)-p^\circ(l;\ t^*,\ t_*,\ g[l;\ t_*],\ U,\ \lambda)$$

где уже срезки $p^\circ(l)$ определены из условия минимума (3.1). Здесь функция $g[l;\ t_*]$ и $\lambda(l)$ зафиксированы, а U — произвольная программа $U[t_*,\ t^*)$.

Пусть теперь W — некоторое замкнутое множество в пространстве $\{t,\ H\}$. Символом $W(t)$ будем обозначать пересечение W с гиперплоскостью $t=\mathrm{const}$. Скажем, что множество W образует стабильный мост, приходящий на L в момент ϑ, если выполнены следующие условия:

1) каково бы ни было $\varepsilon>0$, если $w[l;\ \vartheta]\in W(\vartheta)$ и $w[l;\ \vartheta]\leqslant g[l;\ \vartheta]$, $\|w[l;\ \vartheta]-g[l;\ \vartheta]\|_H\leqslant\varepsilon$, где $g[l;\ \vartheta]$ — опорная функция для какой-то возможной реализации области $G[\vartheta]$, то $w[l;\ \vartheta]\in L^{(\varepsilon)}$;

2) для любого достаточно малого $\alpha>0$ найдется $\delta>0$, удовлетворяющее условию: пусть выбраны какие-либо значения $t_*\in[t_0,\ \vartheta)$, $t^*\in(t_*,\ \vartheta]$, $t^*-t_*\leqslant\delta$, элемент $w[l;\ t_*]\in W(t_*)$ и неотрицательная функция $\lambda(l)\in H$, удовлетворяющие следующему условию: функция $g[l;\ t_*]=\lambda(l)+w[l;\ t_*]$ является опорной функцией для какой-либо возможной области $G[t_*]$, наконец, пусть выбрана какая-либо опорная функция $g[l;\ t^*]$, удовлетворяющая условию (2.4) при каком-то выборе программы U^*; тогда найдется по крайней мере одна программа $U[t_*,\ t^*)$, которая обеспечит неравенство

$$\|w^*[l;\ t^*]-w[l;\ t^*]\|_H\leqslant\alpha(t^*-t_*)$$

$$w^*[l;\ t^*]=\min\{g[l;\ t^*];\ w[l;\ t_*]+g(l;\ t^*,\ t_*,\ U)-$$
$$-p^\circ(l;\ t^*,\ t_*,\ g[l,\ t_*],\ U,\ \lambda)\}$$

$$w[l;\ t^*]\in W(t^*),\quad w[l;\ t^*]\leqslant g[l;\ t^*] \tag{3.2}$$

по крайней мере для одной отвечающей этой программе $U\,[t_*,\ t^*)$ экстремальной срезки $p^\circ\,(l;\ t^*,\ t_*,\ g\,[l;\ t_*],\ U,\ \lambda)$.

4. Экстремальная стратегия. Построим теперь экстремальную стратегию U. Пусть W — некоторый стабильный мост, приходящий на L в момент ϑ. Будем называть экстремальной стратегией U° к этому мосту W стратегию

$$U^\circ = \{U^g,\ U^w,\ p^w,\ w\,(l;\ \tau_{i+1})\}$$

которая определяется следующим образом. Пусть в момент $t = \tau_i$ ($i = 0,\ 1, \ldots$) реализовались некоторые значения

$$g\,[l;\ \tau_i],\ w\,[l;\ \tau_i] \in W\,(\tau_i),\ \lambda[l;\ \tau_i] = g\,[l;\ \tau_i] - w\,[l;\ \tau_i] \geqslant 0$$

Выберем программу

$$U^g\,([\tau_i,\ \tau_{i+1});\ g\,[l;\ \tau_i],\ w\,[l;\ \tau_i])$$

из условия минимума

$$\langle\lambda\,[l;\ \tau_i]\cdot[g\,(l;\ \tau_{i+1},\ \tau_i,\ U^g) - p^\circ\,(l;\ \tau_{i+1},\ \tau_i,\ g\,[l;\ \tau_i],\ U^g,\ \lambda\,[l;\ \tau_i])]\rangle =$$
$$= \min_U \langle\lambda\,[l;\ \tau_i]\cdot[g\,(l;\ \tau_{i+1},\ \tau_i,\ U) - p^\circ(l;\ \tau_{i+1},\ \tau_i,\ g\,[l;\tau_i],\ U,\ \lambda\,[l;\tau_i])]\rangle$$

где $p^\circ\,(l)$ — экстремальные срезки, определенные содержательно условием минимума (3.1). Выбранная программа $U^g\,[\tau_i,\ \tau_{i+1})$ определяет вместе со срезкой $p\,[l;\ \tau_{i+1}]$, выбираемой вторым игроком, движение $g\,[l;\ \tau_{i+1}]$

$$g\,[l;\ \tau_{i+1}] = g\,[l;\ \tau_i] + g\,(l;\ \tau_{i+1},\ \tau_i,\ U^g) - p\,[l;\ \tau_{i+1}]$$

Теперь программа $U^w\,([\tau_i,\ \tau_{i+1}),\ g\,[l;\ \tau_i],\ w\,[l;\ \tau_i],\ g\,[l;\ \tau_{i+1}])$ выбирается по свойству 2) стабильного моста W из условия (см. (3.2))

$$w\,[l;\ \tau_{i+1}] \in W\,(\tau_{i+1}),\ w\,[l;\ \tau_{i+1}] \leqslant g\,[l;\ \tau_{i+1}] \tag{4.1}$$

где

$$\|w\,[l;\ \tau_{i+1}] - w^*\,[l;\ \tau_{i+1}]\|_H \leqslant \alpha\,(\delta)\ [\tau_{i+1} - \tau_i]$$
$$w^*\,[l;\ \tau_{i+1}] = \min\ \{g\,[l;\ \tau_{i+1}],\ w\,[l;\ \tau_i] + g\,(l;\ \tau_{i+1},\ \tau_i,\ U^w) -$$
$$-p^\circ\,(l;\ \tau_{i+1},\ \tau_i,\ g\,[l;\ \tau_i]$$
$$U^w,\ \lambda\,[l;\ \tau_i])\},\ \alpha\,(\delta) \to 0$$

при $\delta = \max_i\,(\tau_{i+1} - \tau_i) \to 0$. При этом, стало быть, срезка $p^w\,(l;\ \tau_{i+1},\ \tau_i,\ g\,[l;\ \tau_i],\ w\,[l;\ \tau_i],\ g\,[l;\ \tau_{i+1}])$, определяющая движение модели

$$w^*\,[l;\ \tau_{i+1}] = w\,[l;\ \tau_i] + g\,(l;\ \tau_{i+1},\ \tau_i,\ U^w) - p^w\,(l;\ \tau_{i+1},\ \tau_i,\ g\,[l;\ \tau_i],\ w\,[l;\ \tau_i],\ g\,[l;\ \tau_{i+1}]) \tag{4.2}$$

определяется равенством

$$p^w = p^\circ\,(l;\ \tau_{i+1},\ \tau_i,\ g\,[l;\ \tau_i],\ U^w,\ \lambda\,[l;\ \tau_i]] + p_*^\circ\,(l)$$

где $p_*^\circ\,(l)$ — неотрицательная функция, задаваемая условиями (4.1), (4.2).

Построенная таким образом экстремальная стратегия U° вместе со срезками $p\,[l;\ \tau_i]$, выбираемыми вторым игроком, определяет движение $g\,[l;\ \tau_i]$ системы и поводыря $w\,[l;\ \tau_i]$ при $i = 0,\ 1, \ldots$ из позиции $\{g\,[l;\ t_0],\ w\,[l;\ t_0]\}$, причем в момент $t_0 = \tau_0$ выбираем $w\,[l;\ \tau_0] = g\,[l;\ \tau_0]$. Из условий стабильности моста W по выбору всех перечисленных выше функций вытекает, что экстремальная к этому мосту стратегия U° обеспечивает сохранение $w[l; \tau_i] \in W(\tau_i)$ при всех значениях τ_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$, т. е. вплоть до момента $\tau_n = \vartheta$, если только $w[l; \tau_0] \in W(\tau_0)$.

5. Основной результат. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. Пусть $g[l; t_0] \in W(t_0)$, где W — стабильный мост, приходящий на L в момент ϑ. Тогда стратегия U°, экстремальная к этому мосту, разрешает задачу 2.1.

Доказательство теоремы 5.1 подобно доказательству аналогичных теорем для игр с полной информацией из книги [1] опирается на оценку

$$\| g[l; \tau_{i+1}] - w^*[l; \tau_{i+1}] \|_H{}^2 \leqslant \| g[l; \tau_i] - w[l; \tau_i] \|_H{}^2 + o(\tau_{i+1} - \tau_i)$$

где $o(\delta)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем δ. Доказательство оценки (5.1) также лишь в деталях отличается от доказательства аналогичной оценки из [1] (стр. 417—419).

6. Аппроксимационная схема управления. Здесь и далее примем для определенности, что условие (2.4) имеет вид неравенства (2.3). Опишем аппроксимационные процедуры, отвечающие программам $U^g[\tau_i, \tau_{i+1}]$, назначаемым соответственно в случаях 1°—4° экстремальными чистой, смешанной или контрстратегией U° первого игрока. Итак, пусть экстремальная стратегия U° назначает для полуинтервала $[\tau_i, \tau_{i+1})$ некоторую программу $U^g[\tau_i, \tau_{i+1})$. Подразделим полуинтервал $[\tau_i, \tau_{i+1})$ на некоторое достаточно большое количество более мелких полуинтервалов $[\tau_k{}^{(i)}, \tau_{k+1}^{(i)})$ $(k = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, k^{(i)}, \tau_0{}^{(i)} = \tau_i, \tau_{k^{(i)}}^{(i)} = \tau_{i+1})$ и аппроксимируем программу $U^g[\tau_i, \tau_{i+1})$ подходящей элементарной программой. Аппроксимирующая элементарная программа $U_e{}^g[\tau_i, \tau_{i+1})$ должна обеспечить подходящую близость функции $g(l; \tau_{i+1}, \tau_i, U^g)$ и функции $g(l; \tau_{i+1}, \tau_i, U_e{}^g)$. Такая подходящая аппроксимация при введенном определении программы $U^g[\tau_i, \tau_{i+1})$ всегда возможна.

В случаях 1°, 3° и 4° пусть указанная элементарная программа $U_e{}^g[\tau_i, \tau_{i+1})$ определяется кусочно-постоянной по времени t функцией $u^{(i)}[t]$ или $u^{(i)}(t, v)$ соответственно. Тогда при осуществлении управления реальной системой на нее в действительности подается управление $u = u^{(i)}[t]$ (или $(u^{(i)}(t, v[t]))$ на полуинтервале $[\tau_i, \tau_{i+1})$. И это управление для любого наперед выбранного значения $\varepsilon > 0$ при выборе достаточно малых шагов $\delta^{(i)} = \max_k (\tau_{i+1} - \tau_i)$ и $\delta^{(i)} = \max_k (\tau_{k+1}^{(i)} - \tau_k{}^{(i)})$ обеспечит вложение

$$x[\vartheta] \in M^{(\varepsilon)} \tag{6.1}$$

В случае 2° пусть аппроксимирующая элементарная программа $U_e{}^g[\tau_i, \tau_{i+1})$ определяется кусочно-постоянной по времени функцией $\mu_t{}^{(i)}(du)$. Тогда при осуществлении управления реальной системой на нее на деле подается кусочно-постоянное управление $u[t] = u_k{}^{(i)}$ на полуинтервалах $[\tau_k{}^{(i)}, \tau_{k+1}^{(i)})$, где $u_k{}^{(i)}$ — результат случайного испытания по выбору вектора u с распределением вероятностей $\mu_k{}^{(i)}(du) = \mu_t{}^{(i)}(du)$ $(\tau_k{}^{(i)} \leqslant t < \tau_{k+1}^{(i)})$.

Это управление в предположении стохастической независимости управлений $u[t]$ и $v[t]$ на малых полуинтервалах времени $[\tau_k{}^{(i)}, \tau_{k+1}^{(i)})$ (подобно тому, как в [1] стр. 334—336) для любых наперед выбранных значений $\varepsilon > 0$ и $p < 1$ при выборе достаточно малых шагов δ и $\delta^{(i)}$ обеспечит вложение (6.1) с вероятностью, не меньшей p. При этом еще при осуществлении описанного способа управления реализации $g[l, \tau_k{}^{(i)}]$ следует увеличивать на достаточно малую величину $\alpha(\tau_k{}^{(i)} - \tau_{k-1}^{(i)}) \| l \|$.

7. Альтернатива. Итак, согласно изложенному выше, для решения задачи 2.1 и практического осуществления управления u, приводящего движение $x[t]$ в заданный момент времени $t = \vartheta$ в наперед заданную малую окрестность $M^{(\varepsilon)}$ множества M, достаточно уметь строить стабильный мост W в пространстве $\{t, H\}$, приходящий на L

в момент ϑ. Поэтому, как и в случаях дифференциальной игры с полной информацией [1], возникает вопрос о существовании подходящего моста W в случае, когда задача 2.1 имеет решение, и вопрос об эффективных методах построения нужного моста W.

Положительный ответ на первый вопрос будет дан ниже. Эффективное построение стабильных мостов в рассматриваемом здесь случае игры с неполной информацией, как и в аналогичных случаях игр с полной информацией [1], возможно или на основе метода экстремального прицеливания (см. [1], стр. 149—206) или в форме априори стабильных мостов (см. [1], стр. 207—233). Однако видоизменение этих методов для приложения их к рассматриваемым здесь задачам сближения в позиционной дифференциальной игре с неполной информацией выходит за рамки этой статьи и составит предмет другой работы.

Вопрос о существовании стабильного моста W в пространстве $\{t, H\}$ разрешается в связи со следующей теоремой об альтернативе (см. аналогичный случай в [1], стр. 68), которую приведем без доказательства.

Теорема 7.1. При данных M и ϑ для всякого начального состояния $g\,[t_0;\ l]$ $(t_0 < \vartheta)$ справедливо одно из двух утверждений: или задача 2.1 имеет решение, или (в противном случае) существует значение $\varepsilon > 0$, такое, что при всяком выборе разбиения $\Delta = \{\tau_i\}$ с достаточно малым шагом и управления $u\,[t]$, выбираемого первым игроком последовательно на полуинтервалах $[\tau_i,\ \tau_{i+1})$, второй игрок может так распорядиться срезками $p\,[l;\ \tau_i]$ в движении $g\,[l;\ \tau_i]$ (2.6), чтобы исключить включение $G\,[\vartheta] \subset M^{(\varepsilon)}$.

Доказательство этой теоремы об альтернативе, как и в случае игры с полной информацией (см. [1], стр. 65—70), проводится следующим образом. Уберем из области $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ в пространстве $\{t, H\}$ все те точки $\{t, h\,(l)\}$, для каждой из которых, как для исходного состояния $g\,[l,\ t] = h\,(l)$, выполняется второе утверждение теоремы 7.1 по крайней мере при одном значении $\varepsilon > 0$, а также уберем все точки $\{t, h\,(l)\}$, для которых не выполняется условие (2.3). Оставшееся множество точек W и образует стабильный мост, ведущий на M в момент ϑ. При этом условия 1), 2) стабильности W (см. стр. 202) выполняются в усиленном смысле. А именно: 1°) если $w\,[l;\ \vartheta] \in W\,(\vartheta)$, то $w\,[l,\ \vartheta] \in L$; 2°) пусть выбраны какие-либо значения $t_* \in [t_0,\ \vartheta)$, $t^* \in (t_*,\ \vartheta]$, элемент $w\,[l;\ t_*] \in W\,(t_*)$ и неотрицательная функция $\lambda\,(l) \in H$, тогда найдется по крайней мере одна программа $U\,[t_*,\ t^*)$, которая обеспечит вложение $w\,[l;\ t^*] \in W\,(t^*)$ для движения

$$w\,[l;\ t^*] = w\,[l;\ t_*] + g\,(l;\ t^*,\ t_*,\ U) - p^\circ(l;\ t^*,\ t_*,\ w\,[l;\ t_*] + \lambda\,(l),\ U\,[t_*,\ t^*),\ \lambda\,(l))$$

Из такого построения стабильного моста W и вытекает справедливость сделанного утверждения о том, что всякий раз, как задача 2.1 для данного начального состояния $g\,[l;\ t_0]$ разрешима, существует стабильный мост W, ведущий на M в момент ϑ, и, следовательно, если только решение задачи 2.1 существует, оно всегда может быть построено в виде экстремальной стратегии U° к подходящему стабильному мосту W. Это решение может быть реализовано в виде аппроксимационной процедуры, описанной в п. 6.

В заключение отметим, что в случае, когда элементами $G^*\,[t^*]$ семейства $\{G^*\,[t^*]\}$ (1.11) являются все возможные точки $x^*\,[t^*]$ из области достижимости $G\,(t^*,\ t_*,\ G\,[t_*] = x\,[t_*],\ U\,[t_*,\ t^*))$ и только они, получаем концепцию позиционной дифференциальной игры с полной информацией в той ее формализации, которая дана в книге [1]. При этом в игре с полной фазовой информацией различие между случаями 2° и 4° стирается и оба эти случая переходят в один и тот же случай минимаксной дифференциальной игры (см. [1], стр. 353—405). Пользуясь случаем, отметим еще, что в самой общей минимаксной позиционной дифференциальной игре для нелинейной системы $dx\,/\,dt = f\,(t,\ x,\ u,\ v)$ результат совершенно не изменяется, если в конструкциях этой игры реализация $v\,[t]$ управления противника в текущий момент времени t будет заменена величиной

$$v^-(t) = \lim \left[\int\limits_\tau^t v\,[\xi]\,\frac{d\xi}{(t-\tau)}\right], \quad \tau \to t - 0 \tag{7.1}$$

при почти всех значениях t, при которых предел (7.1) существует, причем можно полагать $v^-\,(t)$ произвольной величиной $v \in Q$ при тех значениях t, при которых предела (7.1) не существует. В самом деле, согласно известным результатам из теории функций действительного переменного, при всяком выборе измеримой реализации $v[t]$ при почти всех значениях $t \in [t_0, \vartheta]$ справедливо равенство $v[t] = v^-(t)$, и, следовательно, базовые ломаные Эйлера $x_\Delta[t]$, которые удовлетворяют уравнениям

$$dx_\Delta/dt = f(t, x_\Delta[t], u(\tau_i, x_\Delta[\tau_i], v[t]), v[t])$$
$$(\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$$

(см. [1], стр. 355, 365—367), при замене $v[t]$ на $v^-(t)$ не изменяются совершенно, а следовательно, не изменятся совершенно и движения $x[t]$, являющиеся пределами этих ломаных Эйлера. Таким образом, и в минимаксной позиционной дифференциальной игре в рассматриваемых формализациях, строго говоря, не требуется в каждой текущий момент времени t информация о текущей реализации $v[t]$ управления противника в тот же момент, но достаточно лишь знания истории $\{v[\tau]\}$ $(\tau < t)$ этой реализации к моменту t. Впрочем, вследствие ограничения возможных выборов противника измеримыми реализациями $v[t]$ и справедливого для таких реализаций равенства $v[t] = v^-(t)$ при почти всех значениях t это утверждение имеет, пожалуй, формальный смысл.

Поступила 28 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
2. *Красовский Н. Н., Осипов Ю. С.* Задача управления с неполной информацией. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.