Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.3

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ БЕСКОНЕЧНОЙ КРУГОВОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Д. И. Шерман

(Москва)

Под действием внешних усилий, не меняющихся вдоль образующей оболочки, ее поперечные сечения деформируются одинаково. В этом случае допустимо ограничиться изучением напряженного состояния упругого концентрического кольца. Этой классической задаче посвящено большое количество работ. В них преимущественно трактуются случаи нетонких колец. Исключение составляют работы Ю. А. Устинова [1, 2], где рассматривалось напряженное состояние весьма тонкого кольца, подверженного действию нормальных усилий. В данной работе другим способом также анализируется поле напряжений в тонком кольце, появляющееся при действии как нормальных, так и касательных внешних усилий.

1. Область, занимаемую концентрическим кольцом, назовем S, а ограничивающие ее наружную и внутреннюю окружности — соответственно L_2 и L_1. Краевые условия для первой основной задачи возьмем в известной форме

$$\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = f_2(t) \text{ на } L_2 \tag{1.1}$$

$$\varphi_1(t) + t\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\psi_1(t)} = f_1(t) + C_1 \text{ на } L_1 \tag{1.2}$$

где $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ — искомые функции, регулярные в области S, а $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — некоторые функции, задаваемые на соответствующих кривых L_1 и L_2. Рассмотрение этой задачи с позиции ранее рекомендованного метода [3] приводит к интегральному уравнению Фредгольма для вспомогательной плотности, вводимой по усмотрению на внутренней либо внешней границе кольца.

Укажем схематически процесс вывода уравнения.

Записав условие (1.1) на окружности L_2 в виде

$$\varphi_1(t) + \overline{\chi_1(t)} = f_2(t), \quad \chi_1(z) = \frac{R_2^2}{z}\varphi_1'(z) + \psi_1(z) \tag{1.3}$$

введем на L_2 вспомогательную функцию $\omega(t)$ согласно равенству

$$\varphi_1(t) - \overline{\chi_1(t)} = 2\omega(t) \tag{1.4}$$

Регулярная в кольце S функция

$$\varphi(z) = \varphi_1(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\omega(t) + {}^1/_2 f_2(t)}{t - z}\,dt \tag{1.5}$$

аналитически продолжима вне контура L_2; она регулярна всюду вне L_1 и обращается в нуль на бесконечности. Для нее вне контура L_2 справедливо равенство

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\omega(t) + {}^1/_2 f_2(t)}{t - z}\, dt \tag{1.6}$$

Аналогичным образом заключаем, что функция

$$\chi(z) = \chi_1(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\overline{-\omega(t)} + {}^1/_2 f_2(t)}{t - z}\, dt \tag{1.7}$$

продолжима вне контура L_2 и дается вне этого контура формулой

$$\chi(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\overline{-\omega(t)} + {}^1/_2\overline{f_2(t)}}{t - z}\, dt \tag{1.8}$$

Преобразовав условие (1.2) к виду

$$\varphi_1(t) - \frac{R_1^2 - R_2^2}{\bar t}\overline{\varphi_1'(t)} + \overline{\chi_1(t)} = f_1(t) + C_1 \quad \text{на} \quad L_1$$

и учитывая соотношения (1.6) — (1.8), имеем на L_1

$$\varphi(t_0) + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\bar t_0}\overline{\varphi'(t_0)} + \overline{\chi(t_0)} = f_1(t_0) + C_1 -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\omega(t) + {}^1/_2 f_2(t)}{t - t_0}\, dt + \frac{R_1^2 - R_2^2}{\bar t_0}\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\overline{\omega'(t)} + {}^1/_2\overline{f_2'(t)}}{\bar t - \bar t_0}\, \overline{dt} -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{L_2} \frac{\omega(t) - {}^1/_2 f_2(t)}{\bar t - \bar t_0}\, \overline{dt}$$

Отсюда после несложных выкладок найдем функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Чтобы записать их в наиболее компактной форме, введем следующие (и далее используемые) величины:

$$P(z) = P_1(z) + P_2(z), \quad P_2(z) = P_2^{(1)}(z) + P_2^{(2)}(z)$$
$$Q(z) = Q_1(z) + Q_2(z), \quad Q_2(z) + Q_2^{(1)}(z) + Q_2^{(2)}(z)$$
$$G(z) = G^{(1)}(z) + G^{(2)}(z), \quad T(z) = T^{(1)}(z) + T^{(2)}(z)$$

Из них $P(z)$ и $Q(z)$ регулярны вне L_1 и задаются там равенствами

$$P_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{f_1(t)}{t - z}\, dt, \quad Q(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_1} \frac{\overline{f_1(t)}}{t - z}\, dt, \quad \lambda = \frac{R_1^2}{R_2^2}. \tag{1.9}$$

$$P_2^{(1)}(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_{L_2} \frac{f_2(t)\, dt}{t - z/\lambda}, \quad P_2^{(2)}(z) = -\frac{1-\lambda}{4\pi i}\int_{L_2} \frac{t\overline{f_2'(t)}}{t - z/\lambda}\, dt$$

$$Q_2^{(1)}(z) = \frac{1}{4\pi i}\int_{L_2} \frac{\overline{f_2(t)}}{t - z/\lambda}\, dt$$

$$Q_2^{(2)}(z) = -\frac{R_1^2 - R_2^2}{z}\frac{1}{4\pi i}\int_{L_2} \frac{f_2'(t)}{\dots}\, dt$$

Остальные же $G(z)$ и $T(z)$ зависят от неизвестной $\omega(t)$, причем их составляющие таковы:

$$G^{(1)}(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\omega(t)}{t - z/\lambda}dt, \quad G^{(2)}(z) = -\frac{1-\lambda}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{t\overline{\omega'(t)}}{t - z/\lambda}dt \tag{1.10}$$

$$T_{(z)}^{(1)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\overline{\omega(t)}}{t - z/\lambda}dt$$

$$T^{(2)}(z) = -\frac{R_1^2 - R_2^2}{z}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\omega'(t)}{t}dt$$

При помощи соотношений (1.9), (1.10) придем к равенствам

$$\varphi(z) = P(z) + G(z), \quad \frac{R_1^2 - R_2^2}{z}\varphi'(z) + \chi(z) = Q(z) + T(z)$$

Из них для функции $\chi(z)$ находим

$$\chi(z) = [Q(z) + T(z)] - \frac{R_1^2 - R_2^2}{z}[P'(z) + G'(z)]$$

Переходя теперь к равенству (1.4) на контуре L_2 и учитывая (1.6) и (1.7), получим для плотности $\omega(t)$ следующее интегральное уравнение

$$\omega(t_0) = \varphi(t_0) - \overline{\chi(t_0)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\omega(t)}{t}dt +$$
$$+ \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_2}f_2(t)\left[\frac{dt}{t - t_0} + \frac{\overline{dt}}{\bar{t} - \bar{t}_0}\right]$$

Проделав полагающиеся выкладки, получим для $\omega(t)$ такое интегральное уравнение:

$$\omega(t_0) = G(t_0) - T(t_0) - (1-\lambda)\,t_0\overline{G'(t_0)} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2}\frac{\omega(t)}{t}dt + R(t_0) \tag{1.11}$$

где $R(t_0)$ — известная функция, даваемая равенством

$$R(t_0) = P(t_0) - \overline{Q(t_0)} - (1-\lambda)\,t_0\overline{P'(t_0)} +$$
$$+ \frac{1}{4\pi i}\int\limits_{L_2}f_2(t)\left[\frac{dt}{t - t_0} + \frac{\overline{dt}}{\bar{t} - \bar{t}_0}\right]$$

Некоторые интегралы, входящие в правую часть (1.18), содержат производные от плотности $\omega(t)$; выполнив в них интегрирование по частям, придем, наконец, к уравнению Фредгольма относительно $\omega(t)$.

Плотность $w(t)$, содержащаяся в интегралах фредгольмового уравнения (1.11),— непрерывная комплексная функция комплексного переменного t; между тем, параметр, характеризующий близость границ кольца, присутствует лишь в ядре интегрального уравнения (1.11). Затруднительно непосредственно вынести этот параметр из-под знаков интегралов. Однако это удается сделать путем расчленения искомой плотности на пару слагаемых в соответствии с формулой $w(t) = \varphi^*(t) + \overline{\chi^*(t)}$, где $\varphi^*(z)$ и

$\chi^*(z)$ — некие функции, регулярные в круге, ограниченном L_2. При таком разделении плотности все упомянутые интегралы берутся в замкнутой форме через составные функции $\varphi^*(z)$ и $\chi^*(z)$ (и сопряженные с ними) от аргументов, зависящих от малого параметра, за который естественно принять величину $\varepsilon = 1 - R_1 / R_2$. Вычислив подобным путем все интегралы с плотностью $w(t)$ в уравнении (1.1), заменим последнее неким функциональным соотношением; оно же разбивается на два соотношения, включающие подраздельно функции, регулярные соответственно внутри и вне L_2. В каждом из этих соотношений такие функции могут быть разложены в ряды по малому параметру. Неожиданно оказалось, что прямое сопоставление этих разложений приводит, в свою очередь, к разложению с начальными членами порядка $O(\varepsilon^3)$; это наводит на мысль, что, вероятно, разыскиваемые $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ с утончением кольца будут возрастать по модулю как $O(\varepsilon^{-3})$.

Очевидно, качественно аналогичное явление (при достоверности сделанного заключения) должно наблюдаться и при анализе получаемого по-иному решения для кольца, например, средствами рядов Фурье. Извлеченный отсюда сходный результат убедит в корректности принятого ранее более общего метода исследования, основанного на использовании интегрального уравнения Фредгольма.

Примечание. В работе [4] рассмотрена замкнутая круговая цилиндрическая оболочка (конечной длины) со свободными поперечными краями. Исходя из двумерных уравнений общей теории, авторы показали, что в этом случае прогиб w имеет порядок ε^{-3}, т. е. тот же, что получаемый здесь для компонент вектора смещения. (При достаточно жестко закрепленных краях оболочки прогиб $w = O(\varepsilon^{-1})$).

2. Далее, следуя Н. И. Мусхелишвили, будем пользоваться формой решения задачи для концентрического кольца в полярных координатах в терминах теории функций комплексного переменного. Искомые функции Колосова — Мусхелишвили берутся в виде рядов Лорана с подлежащими определению коэффициентами [5]

$$\Phi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k, \quad \Psi(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k' z^k$$

причем для внешних усилий, задаваемых общим комплексным рядом Фурье, коэффициенты a_k ($k = \pm 2, \pm 3, \ldots$) даются явными выражениями

$$a_n = \frac{(1+n)(R_2^2 - R_1^2) B_n - (R_2^{-2n+2} - R_1^{-2n+2}) \bar{B}_n}{(1-n^2)(R_2^2 - R_1^2)^2 - (R_2^{2n-2} - R_1^{2n+2})(R_2^{-2n+2} - R_1^{-2n+2})}$$

Знаменатель этой дроби после некоторых преобразований приведем к форме

$$R^4 (1-\lambda)^2 [(1-n^2) + P_n(\lambda)] = R^4 (1-\lambda)^4 q_n(\lambda) \tag{2.2}$$

$$P_n(\lambda) = \frac{(1-\lambda^{n+1})(1-\lambda^{n-1})}{\lambda^{n-1}(1-\lambda)^2}, \quad q_n(\lambda) = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\lambda^{-k} \left(\frac{1-\lambda^k}{1-\lambda}\right)^2$$

$$\lambda = (R_1 / R_2)^2$$

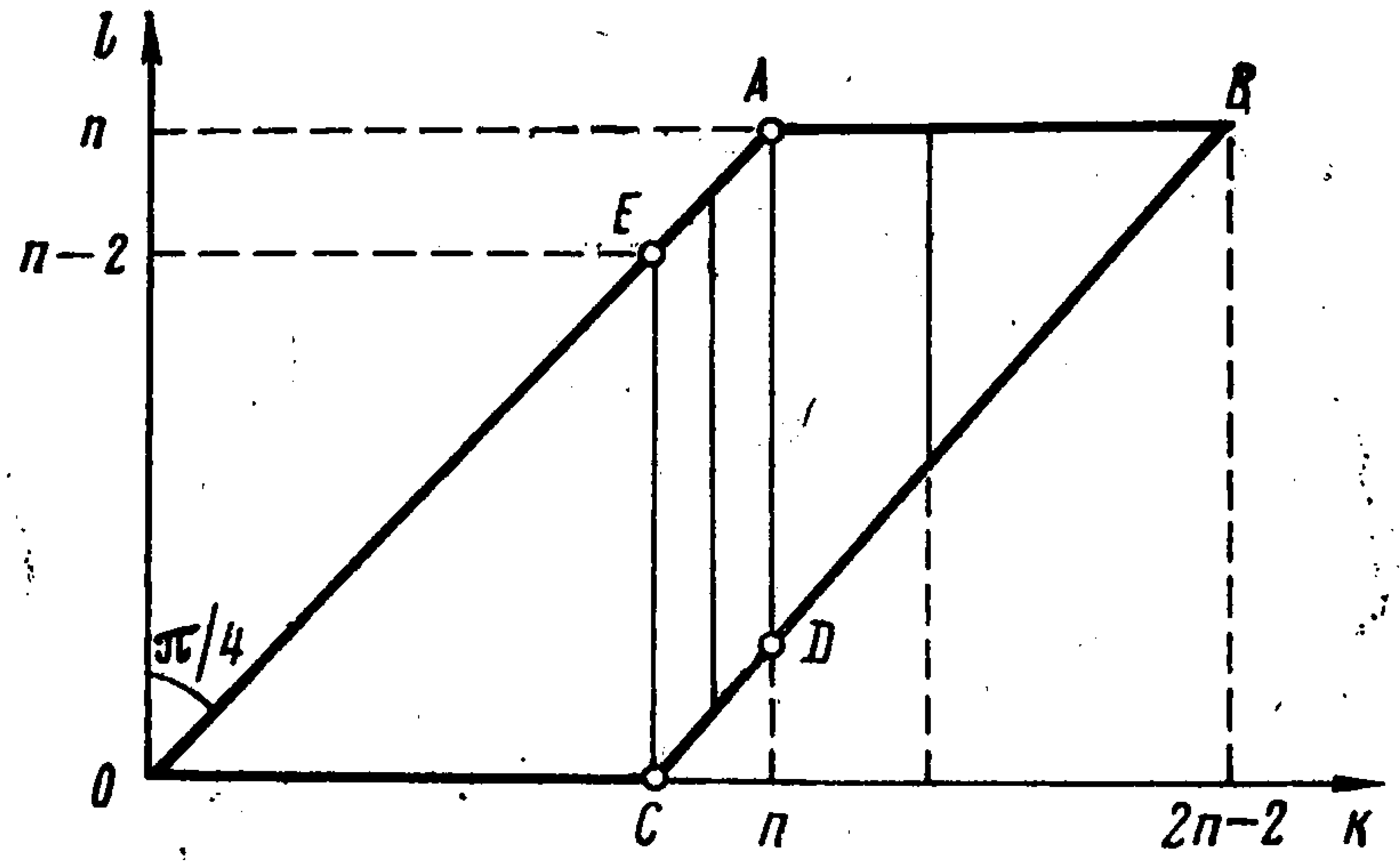
Поясним вкратце вывод формулы (2.2). Непосредственно имеем

$$P_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \sum_{l=0}^{n} \mu_l \lambda^l \sum_{k=0}^{n-2} m_k \lambda^k, \quad \mu_l = m_k = 1$$

или же, положив $e + k = k_1$ и опустив после замены второго индекса суммирования единичный нижний указатель у k_1, получим

$$P_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \sum_{l=0}^{n} \mu_l \sum_{k=l}^{n+l-2} m_{k-l} \lambda^k$$

Как видно, двойное суммирование справа ведется по целочисленным точкам замкнутого параллелограмма $OABC$ (фигура). При взаимном перемещении агрегатов,



составляющих этот парный ряд, суммирование в нем уже придется вести по совокупности (раздельно учитываемых) целочисленных точек треугольника OEC, параллелограмма $ECDA$ и затем треугольника ABD (только единожды беря в расчет целочисленные точки общих границ смежных составных областей). Последовательно проделав это, найдем

$$P_n(\lambda) - \frac{1}{\lambda^{n-1}} \left\{ \sum_{k=0}^{n-2} \lambda^k \sum_{l=0}^{k} \mu_l m_{k-l} + \sum_{k=n-1}^{n-1} \lambda^k \sum_{l=1}^{n-1} \mu_l m_{k-l} + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n}^{2n-2} \lambda^k \sum_{l=k-(n-2)}^{n} \mu_l m_{k-l} \right\}$$

Последнее равенство (поскольку $\mu_l = m_l = 1$) приводится к более простому виду

$$P_n(\lambda) = \frac{1}{\lambda^{n-1}} \left[\sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \lambda^k + (n-1) \lambda^{n-1} + \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1) \lambda^k \right]$$

Далее, первую из сумм справа преобразуем к индексу суммирования $k_1 = -(k - n + 1)$, что дает

$$\frac{1}{\lambda^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} (k+1) \lambda^k = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \lambda^{-k}$$

Во второй сумме совершим замену $k_1 = k - n + 1$, тогда

$$\frac{1}{\lambda^{n-1}} \sum_{k=n}^{2n-2} (2n-k-1) \lambda^k = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \lambda^k, \quad \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) = \frac{(n-1)n}{2}$$

Теперь имеем

$$(1-n^2) + P_n(\lambda) = (1-\lambda)^2 \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) \lambda^{-k} \left(\frac{1-\lambda^k}{1-\lambda} \right)^2$$

что согласуется с формулой (2.2).

В предположении, что на внешней и внутренней окружностях L_2 и L_1 нормальное и касательное напряжения задаются условиями

$$N - iT = e^{in\vartheta} \quad \text{на } L_2, \quad N - iT = 0 \quad \text{на } L_1$$

где n — фиксированное целое положительное число, искомые функции будут выглядеть так:

$$\Phi(z) = \frac{1}{(1-\lambda)^3 q_n(\lambda)}\left[(1+n)\left(\frac{z}{R_2}\right)^n - \frac{1-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}\left(\frac{R_2}{z}\right)^n\right]$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{1-\lambda^{n-1}}\left(\frac{z}{R_2}\right)^{n-2} +$$

$$+ \frac{1}{(1-\lambda)^3 q_n(\lambda)}\left[(1-n)^2 \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda^{n-1}}\left(\frac{z}{R_2}\right)^{n-2} - \right.$$

$$\left. - (1+n)\lambda \frac{1-\lambda^n}{1-\lambda}\left(\frac{R_2}{z}\right)^{n+2}\right]$$

Проделав последовательно все выкладки (для краткости здесь опускаемые), получим

$$\Phi(z) = \frac{3}{2n^2(n-1)\varepsilon^3}\left\{\left[1 - \frac{1+2\delta n}{2}\varepsilon\right]e^{in\vartheta} - \left[1 - \frac{1+2(1-\delta)n}{2}\varepsilon\right]e^{-in\vartheta}\right\}$$

$$\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) = \frac{3}{2(n-1)n\varepsilon^3}\left[\Lambda_1(\delta, \varepsilon)e^{i(n-2)\vartheta} + \Lambda_2(\delta, \varepsilon)e^{-i(n-2)\vartheta}\right]$$

$$z = Re^{i\vartheta} \quad (R_1 \leqslant R < R_2)$$

$$\Lambda_1(\delta, \varepsilon) = (1 - 2\delta)\varepsilon + [(2n-3)\delta^2 - (n-3)\delta - 1/3]\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$\Lambda_2(\delta, \varepsilon) = (1 - 2\delta)\varepsilon - \left[(2n+3)\delta^2 - 3(n+1)\delta + \frac{2n+1}{3}\right]\varepsilon^2 + \ldots,$$

$$\delta = \frac{R_2 - R}{R_2 - R_1}$$

В результате придем к формулам для главных величин компонентов напряжений

$$\left\{\begin{matrix}\sigma_x \\ \sigma_y\end{matrix}\right\} = \frac{3(1-2\delta)}{2n(n-1)\varepsilon^2}\{2\cos n\vartheta \mp [\cos(n-2)\vartheta + \cos(n+2)\vartheta]\} \tag{2.3}$$

$$\tau_{xy} = \frac{3(1-2\delta)}{2n(n-1)\varepsilon^2}[\sin(n-2)\vartheta - \sin(n+2)\vartheta]$$

Что касается компонентов вектора смещения, то они сохраняют порядок функций Гурса, равный $O(\varepsilon^{-3})$ (ибо при наличии в выражениях для них постоянной $\varkappa$, зависящей от упругих свойств среды, вообще говоря, не происходит взаимного сокращения слагаемых, имеющих порядок $O(\varepsilon^{-3})$; здесь наблюдается прямая аналогия с результатами работы [1]).

Примечание. Установим один любопытный факт. Главную часть (выделенной упомянутым образом) величины какой-либо из компонент напряжений дополним величиной, отвечающей добавочному слагаемому во внешней нагрузке, равной $A_m e^{im\vartheta} (m \neq n)$. Тогда в сумме, составленной из основного слагаемого, соответствующего внешнему усилию, определяемому в краевом условии величиной $e^{in\vartheta}$, и указанного добавочного слагаемого, можно, определив нужным образом постоянную A_m, добиться обращения взятой компоненты напряжений в нуль при $\vartheta = \vartheta_0$ (ϑ_0 — наудачу выбранное значение полярного угла). Может случится, что при $\vartheta = \vartheta_0$ величина дополнительно введенной компоненты принимает нулевое значение; иначе говоря, добавляемое выражение (рассматриваемое изолированно) само по себе обладает желаемым свойством и, стало быть, является искомым.

Пусть теперь внешние силы, приложенные к наружной границе L_2, задаются многочленом в форме конечного отрезка ряда Фурье

$$N - iT = A_0 e^{in_0\vartheta} + \sum_{\nu=1}^{3q} A_\nu e^{in_\nu\vartheta} \tag{2.4}$$

В нем A_ν — действительные величины (они могут выбираться из тех или иных соображений), n_ν — некоторые (в общем также по усмотрению фиксируемые) целые положительные числа. При этом для главных частей компонентов напряжений имеем

$$\sigma_x \approx \frac{1-2\delta}{\varepsilon^2}\left[A_0 h_0(n_0, \vartheta) + \sum_{\nu=1}^{3q} A_\nu h_\nu(n_\nu, \vartheta)\right]$$

$$\sigma_y \approx \frac{1-2\delta}{\varepsilon^2}\left[A_0 l_0(n_0, \vartheta) + \sum_{\nu=1}^{3q} A_\nu l_\nu(n_\nu, \vartheta)\right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{1-2\delta}{\varepsilon^2}\left[A_0 \omega_0(n_0, \vartheta) + \sum_{\nu=1}^{3q} A_\nu \omega_\nu(n_\nu, \vartheta)\right]$$

Чтобы выделить первое слагаемое, примем $A_0 = 1$, $n_0 = n$ и соответственно $h_0(n_0, \vartheta) = h(n, \vartheta)$, $l_0(n_0, \vartheta) = l(n, \vartheta)$, $\omega_0(n_0, \vartheta) = \omega(n, \vartheta)$. Потребуем далее, чтобы главные части компонентов напряжений одновременно обращались в нули в радиальных сечениях $\vartheta = \vartheta_\nu$ ($\nu = 1, \ldots, q$). Отсюда придем к условиям

$$\begin{gathered} h(n, \vartheta_\nu) + \sum_{\mu=1}^{3q} A_\mu h_\mu(n_\mu, \vartheta_\nu) = 0 \\ l(n, \vartheta_\nu) + \sum_{\mu=1}^{3q} A_\mu l_\mu(n_\mu, \vartheta_\nu) = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, q) \\ \omega(n, \vartheta_\nu) + \sum_{\mu=1}^{3q} A_\mu \omega_\mu(n_\mu, \vartheta_\nu) = 0 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Полученные соотношения образуют систему алгебраических уравнений для определения постоянных A_μ ($\mu = 1, 2, \ldots, 3q$), которые найдем при допущении, что определитель системы отличен от нуля. Когда же этот определитель принимает нулевое значение, нужно с самого начала положить $A_0 = 0$, и тогда вместо (2.5) получим однородную систему $3q$ уравнений той же структуры (и с тем же определителем). Отсюда найдем (отнюдь не все равные нулю) искомые величины A_μ, обеспечивающие соблюдение соотношений

$$\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0|_{\vartheta=\vartheta_\nu} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, q)$$

Из сказанного ясно, что при нагрузке типа (2.4) с определяемыми (как указано выше) коэффициентами A_μ ведущую роль при $\vartheta = \vartheta_\nu$ приобретают величины компонентов напряжений порядка $O(\varepsilon^{-1})$. По всей видимости, следуя тем же соображениям, нетрудно добиться, чтобы все три компонента напряжений не только отличались сниженным показателем роста (при убывающем ε), но и вообще оставались ограниченными в произвольно выбранных q радиальных сечениях с полярными углами ϑ_1, ϑ_2, ... ϑ_q.

Автор признателен А. Л. Гольденвейзеру за обсуждение работы и полезные замечания.

Поступила 7 VII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Устинов Ю. А.* К расчету бандажированных колец. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 3.
2. *Устинов Ю. А.* Концентрация напряжений в полуплоскости и плоскости с круговыми отверстиями при растяжении. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 1.
3. *Шерман Д. И.* О напряжениях в весомой полуплоскости, ослабленной двумя круговыми отверстиями. ПММ, 1951, т. 15, вып. 3.
4. *Гольденвейзер А. Л.*, *Зверяев Е. М.* Напряженное состояние незакрепленных оболочек нулевой кривизны. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
5. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости, М., «Наука», 1965.