Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.3

ТЕОРИЯ МАЛЫХ ДЕФОРМАЦИЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННЫХ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

Л. М. Зубов

(Ростов-на-Дону)

На основе трехмерной теории наложения малой деформации на конечную строятся уравнения, описывающие малые деформации предварительно напряженных оболочек. Строго выведены уравнения равновесия предварительно напряженных оболочек. Для добавочных перемещений приняты гипотезы Кирхгофа. Получено выражение энергии оболочки, после чего формулируются определяющие уравнения для оболочек из произвольного упругого материала при любом начальном напряженном состоянии. Развитый подход позволяет формулировать также определяющие уравнения оболочек из гипоупругого и упругопластического материалов. Определяющие соотношения конкретизируются для случая малой начальной деформации. Из вариационного принципа выводятся граничные условия и условия сопряжения с абсолютно твердыми включениями. Особо рассматривается случай добавочных внешних сил, порожденных следящим характером гидростатической нагрузки. Результаты могут быть использованы, в частности, в задачах устойчивости оболочек.

1. Соотношения теории малых деформаций, наложенных на конечную деформацию. Условия равновесия деформированной материальной среды можно записать в следующей форме:

$$\iint\limits_{O_*} \mathbf{N}\cdot \mathrm{T}dO + \iiint\limits_{V_*} \rho \mathbf{b} d\tau = 0 \tag{1.1}$$

$$\iint\limits_{O_*} \mathbf{R} \times (\mathbf{N}\cdot \mathrm{T})\, dO + \iiint\limits_{V_*} \rho \mathbf{R} \times \mathbf{b} d\tau = 0 \tag{1.2}$$

Здесь T — тензор напряжений Коши, R — радиус-вектор точки деформированного тела, V_* — произвольный объем, выделенный в теле, O_* — поверхность, его ограничивающая, $\mathbf{N}$ — вектор единичной нормали к поверхности O_*, ρ — плотность материала в деформированном состоянии, $\mathbf{b}$ — вектор массовых сил.

Рассмотрим некоторое состояние равновесия, называемое начальным и задаваемое вектором $\mathbf{R}^\circ$, и бесконечно близкое к нему состояние равновесия, задаваемое вектором $\mathbf{R} = \mathbf{R}^\circ + \eta \mathbf{w}$, где η — малый параметр. Дифференцируя (1.1), (1.2) по параметру η и положив $\eta = 0$, получим

$$\iint\limits_{O_*} \mathbf{N}^\circ \cdot \Theta dO + \iiint\limits_{V_*} \rho^\circ \mathbf{k}\, d\tau = 0 \tag{1.3}$$

$$(1.4)\qquad \iint\limits_{O_*} (\mathbf{N}^\circ\cdot \mathbf{T}^\circ \times \mathbf{w} + \mathbf{N}^\circ\cdot \Theta \times \mathbf{R}^\circ)\, dO + \iiint\limits_{V_*} \rho^\circ (\mathbf{k} \times \mathbf{R}^\circ + \mathbf{b}^\circ \times \mathbf{w})\, d\tau = 0$$

$$(1.5)\qquad \Theta = \mathbf{T}^\cdot + \mathbf{T}^\circ \nabla\cdot \mathbf{w} - \nabla \mathbf{w}^T\cdot \mathbf{T}^\circ, \quad \mathbf{T}^\cdot = \left[\frac{d}{d\eta}\mathbf{T}(\mathbf{R}^\circ + \eta \mathbf{w})\right]_{\eta=0}$$
$$\mathbf{b} = \mathbf{b}^\circ + \eta \mathbf{k}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{b}^\cdot$$

Здесь Θ — тензор, введенный в работах [1, 2], ∇ — набла-оператор в метрике начального деформированного состояния, $\mathbf{k}$ — добавочная массовая сила. Из произвольности V_* в (1.3), (1.4) и уравнений равновесия начального состояния

$$(1.6)\qquad \nabla\cdot \mathbf{T}^\circ + \rho^\circ \mathbf{b}^\circ = 0$$

следуют уравнения

$$(1.7)\qquad \nabla\cdot\Theta + \rho^\circ \mathbf{k} = 0, \quad \Theta - \Theta^T = \mathbf{T}^\circ\cdot\nabla \mathbf{w} - \nabla \mathbf{w}^T\cdot \mathbf{T}^\circ$$

Второе соотношение (1.7) вытекает также непосредственно из (1.5). В дальнейшем значок градус, относящийся к величинам в начальном деформированном состоянии, опускается.

В случае мертвых внешних сил потенциальная энергия, накапливаемая в предварительно напряженном упругом теле при малой деформации, задается выражением [3]

$$(1.8)\qquad \Pi = \iiint\limits_V W\, d\tau, \quad W = \frac{1}{2}\Theta\cdot\cdot \mathbf{L}^T, \quad \mathbf{L} = \nabla \mathbf{w}$$

Разложив тензор $\mathbf{L}$ на симметричную и антисимметричную составляющие

$$(1.9)\qquad \mathbf{L} = \varepsilon - \Omega, \quad \Omega = \mathbf{E} \times \boldsymbol{\omega}$$

где ε — линейный тензор деформаций, $\boldsymbol{\omega}$ — линейный вектор поворота, $\mathbf{E}$ — единичный тензор, представление (1.5) тензора Θ как линейной функции тензоров ε и Ω перепишем следующим образом

$$(1.10)\qquad \Theta = \mathbf{P} + \mathbf{U}, \quad \mathbf{U} = {}^1/_2(\mathbf{T}\cdot\varepsilon - \varepsilon\cdot\mathbf{T}) - \mathbf{T}\cdot\Omega$$
$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T = \mathbf{T}^\cdot + \mathbf{T}\nabla\cdot\mathbf{w} - \mathbf{L}^T\cdot\mathbf{T} - \mathbf{T}\cdot\mathbf{L} + {}^1/_2(\varepsilon\cdot\mathbf{T} + \mathbf{T}\cdot\varepsilon)$$

Симметричный тензор $\mathbf{P}$, будучи объективной производной [4] объективного тензора $\mathbf{T}$, не зависит от тензора вращения Ω. Плотность потенциальной энергии принимает следующий вид:

$$(1.11)\qquad W = W^P + W^U, \quad W^P = {}^1/_2\mathbf{P}(\varepsilon)\cdot\cdot\varepsilon$$
$$W^U = {}^1/_2\mathbf{U}\cdot\cdot\mathbf{L}^T = \operatorname{tr}(\Omega\cdot\mathbf{T}\cdot\varepsilon - {}^1/_2\Omega\cdot\mathbf{T}\cdot\Omega) = {}^1/_8\operatorname{tr}(3\mathbf{L}^T\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{L} - 2L^T\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{L}^T - \mathbf{L}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{L}^T)$$

Разумеется, тензор $\mathbf{P}$ зависит еще и от начальной деформации. Для идеально упругого тела справедливы формулы

$$(1.12)\qquad \Theta = \partial W / \partial \mathbf{L}, \quad \mathbf{U} = \partial W^U / \partial \mathbf{L}, \quad \mathbf{P} = \partial W^P / \partial \varepsilon$$

Первое из соотношений (1.12) получено в [3], второе непосредственно проверяется с помощью (1.11), третье следует из первого и второго.

Соотношения (1.10) — (1.12) показывают, что удельная энергия малых смещений предварительно напряженного тела состоит из энергии чистой деформации $W^P(\varepsilon)$ и энергии W^U, обусловленной поворотом элемента объема при малых смещениях. Для упругого тела коэффициенты квадратичной формы $W^P(\varepsilon)$ полностью определяются законом состояния материала и начальной деформацией. Энергия W^U никак не зависит от свойств материала и целиком определяется начальными напряжениями.

Свойства материала могут быть заданы также непосредственно в форме линейной зависимости тензора P от тензора ε с коэффициентами, зависящими от начальных напряжений (теория пластического течения), причем это представление будет различным в случаях активного нагружения и разгрузки.

Для абсолютно твердого тела имеем $\varepsilon = 0$, $\omega = \mathrm{const}$. Поэтому потенциальная энергия малых смещений твердого тела при мертвых внешних силах, согласно (1.11), представляется в виде

$$\Pi = -\frac{1}{2}\iiint\limits_V \operatorname{tr}(\omega \times \mathrm{T} \times \omega)\, d\tau = \frac{1}{2}\omega\cdot\iiint\limits_V (\mathrm{E}\operatorname{tr}\mathrm{T} - \mathrm{T})\, d\tau\cdot\omega \tag{1.13}$$

В абсолютно твердом теле тензор напряжений не определен, однако, воспользовавшись уравнениями равновесия (1.6), можно выразить интеграл в (1.13) через внешние силы

$$\iiint\limits_V (\mathrm{E}\operatorname{tr}\mathbf{T} - \mathrm{T})\, d\tau = \iiint\limits_V (\rho\mathbf{b}\cdot\mathbf{R}\mathrm{E} - \rho\mathbf{b}\mathbf{R})\, d\tau + \iint\limits_O (\mathbf{F}\cdot\mathbf{R}\mathrm{E} - \mathbf{F}\mathbf{R})\, dO \equiv \Phi \tag{1.14}$$

Здесь $\mathbf{F}$ — вектор поверхностных сил. Так как система сил $\mathbf{F}$ и $\mathbf{b}$ статически эквивалентна нулю, тензор Φ симметричен. Из (1.13), (1.14) имеем

$$\Pi = {}^1/_2\,\omega\cdot\Phi\cdot\omega \tag{1.15}$$

Как известно [3], условие стационарности функционала Π эквивалентно уравнениям нейтрального равновесия. Применительно к (1.15) получаем $\delta\Pi = \omega\cdot\Phi\cdot\delta\omega$. Из условия $\delta\Pi = 0$ приходим к уравнению для определения оси равновесия [5], т. е. такого вектора ω, при повороте вокруг которого твердое тело остается в равновесии: $\Phi\cdot\omega = 0$.

2. Уравнения равновесия предварительно напряженной оболочки. Пусть поверхность O, отнесенная к гауссовым координатам q^1, q^2, есть срединная поверхность оболочки в начальном деформированном состоянии. Векторы основного и взаимного базисов на поверхности задаются формулами

$$\mathbf{R}_\alpha = \partial\mathbf{R}_0 / \partial q^\alpha, \quad \mathbf{R}^\beta\cdot\mathbf{R}_\alpha = \delta_\alpha^{\ \beta}, \quad \mathbf{R}^\beta\cdot\mathbf{N} = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2)$$

Здесь $\mathbf{R}_0$ — радиус-вектор точки поверхности, $\mathbf{N}$ — вектор единичной нормали к поверхности. Первый и второй фундаментальные тензоры поверхности введем соотношениями

$$G = G_{\alpha\beta}\mathbf{R}^\alpha\mathbf{R}^\beta = \mathrm{E} - \mathbf{NN}, \quad \mathbf{B} = B_{\alpha\beta}\mathbf{R}^\alpha\mathbf{R}^\beta = -\nabla_2\mathbf{N} = \mathbf{B}^T \tag{2.1}$$
$$G_{\alpha\beta} = \mathbf{R}_\alpha\cdot\mathbf{R}_\beta, \quad B_{\alpha\beta} = -\mathbf{R}_\beta\cdot\partial N / \partial q^\alpha, \quad \nabla_2 = \mathbf{R}^\alpha\partial / \partial q^\alpha$$

Здесь ∇_2 — набла-оператор на поверхности. Евклидов тензор второго ранга Y будем называть принадлежащим поверхности, если он удовлетворяет соотношению $\mathrm{N}\cdot\mathrm{Y} = \mathrm{Y}\cdot\mathrm{N} = 0$. Очевидно, что тензоры G и B принадлежат поверхности.

Оболочка представляет собой область, ограниченную двумя поверхностями, расположенными по разные стороны от срединной поверхности O на одинаковом расстоянии $h / 2$ от нее, и линейчатой поверхностью Σ, образованной движением нормали к срединной поверхности по ее граничному контуру. Положение точки оболочки задается радиус-вектором

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + z\mathbf{N}, \quad -h / 2 \leqslant z \leqslant h / 2$$

Толщина оболочки h может быть переменной.

Можно показать справедливость следующих формул, выражающих геометрические характеристики оболочки через геометрические характеристики срединной поверхности:

$$\mathbf{m}d\Sigma = A\,(\mathrm{G} - z\mathrm{B})^{-1}\cdot\mathbf{m}_0 dS dz, \quad A = \det(\mathrm{G} - z\mathrm{B}) \tag{2.2}$$
$$d\tau = A dO dz \tag{2.3}$$
$$\nabla\varphi\,(q^1, q^2, z) = (\mathrm{G} - z\mathrm{B})^{-1}\cdot\nabla_2\varphi + \mathrm{N}\partial\varphi / \partial z \tag{2.4}$$
$$(\mathrm{N}dO)_\pm = A\,(\pm h / 2)[\pm\mathrm{N} \mp 1 / 2\,(\mathrm{G} \mp h / 2\mathrm{B})^{-1}\ \nabla_2 h] dO \tag{2.5}$$

Здесь $\mathbf{m}$ — единичная нормаль к поверхности Σ, $\mathbf{m}_0$ — внешняя нормаль к граничному контуру срединной поверхности ($\mathbf{m}_0\cdot\mathrm{N} = 0$), dO — элемент срединной поверхности, dS — элемент дуги контура, φ — произвольная функция координат (не обязательно скалярнозначная), $(\mathrm{N}dO)_\pm$ — направленный элемент площади поверхностей $z = \pm h / 2$. Под тензором Y^{-1}, обратным тензору Y, принадлежащему поверхности, понимается тензор, также принадлежащий поверхности и удовлетворяющий соотношению

$$\mathrm{Y}^{-1}\cdot\mathrm{Y} = \mathrm{Y}\cdot\mathrm{Y}^{-1} = \mathrm{G}$$

Пусть помимо внешних сил, обусловливающих начальное состояние равновесия, на оболочку действуют малые добавочные внешние поверхностные силы, распределенные по поверхностям $z = \pm h / 2$, и добавочные силы, распределенные по объему оболочки. Внутри каждого участка оболочки, опирающегося на элемент dO срединной поверхности, заменим эту систему добавочных сил ей статически эквивалентной системой сил и моментов, сосредоточенных на срединной поверхности с интенсивностями соответственно $\mathbf{f}$ и $\boldsymbol{\mu} \times \mathrm{N}$ ($\boldsymbol{\mu}\cdot\mathrm{N} = 0$) на единицу площади. Применим к оболочке условия равновесия (1.3), (1.4), взяв в качестве V_* участок оболочки, ограниченный поверхностями $z = \pm h / 2$ и поверхностью Σ_*, пересекающейся со срединной поверхностью по произвольному контуру

Γ_*. **Получим**

(2.6) $$\iint_{\Sigma_*} \mathbf{m}\cdot\Theta d\Sigma + \iint_{O_*} \mathbf{f}\, dO = 0$$

(2.7) $$\iint_{\Sigma_*} \mathbf{m}\cdot\Theta \times \mathbf{R} d\Sigma + \iint_{O_*} (\mathbf{f} \times \mathbf{R} + \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{N})\, dO + \iint_{\Sigma_*} \mathbf{m}\cdot\mathrm{T} \times \mathbf{w} d\Sigma +$$
$$+ \iint_{O_*} \mathbf{N}_+\cdot\mathrm{T} \times \mathbf{w} dO_+ + \iint_{O_{*-}} \mathbf{N}_-\cdot\mathrm{T} \times \mathbf{w} dO_- +$$
$$+ \iint_{O_*} \Big[\int_{-h/2}^{h/2} A\rho\mathbf{b} \times \mathbf{w} dz\Big] dO = 0$$

Применяя формулы (2.2) — (2.5), теорему о дивергенции на поверхности, учитывая дифференциальные уравнения равновесия для начальных напряжений (1.6) и пользуясь произвольностью поверхности O_*, из (2.6), (2.7) получим

(2.8) $$\nabla_2\cdot \mathrm{K}' + \mathbf{N}\nabla_2\cdot\mathbf{V} - \mathbf{V}\cdot \mathrm{B} + \mathbf{f} = 0$$

(2.9) $$[\mathrm{K}' + (\mathrm{B}\cdot\mathrm{M}')^T]\cdot\cdot \in_2 \mathbf{N} + (\nabla_2\cdot\mathrm{M}') \times \mathbf{N} - \mathbf{V} \times \mathbf{N} + \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{N} = \mathbf{l} \equiv$$
$$\equiv - \int_{-h/2}^{h/2} A\,[\mathbf{R}^\alpha\cdot(\mathrm{G} - z\mathrm{B})^{-1}\cdot\mathrm{T} \times \partial\mathbf{w} / \partial q^\alpha + \mathbf{N}\cdot\mathrm{T} \times \partial\mathbf{w} / \partial z]\, dz$$
$$\in_2 = - \in_2^T = \in\cdot\mathbf{N} = -\mathrm{G} \times \mathbf{N}, \quad \in = -\mathrm{E} \times \mathrm{E}$$

(2.10) $$\begin{bmatrix}\mathrm{K}'\\ \mathrm{M}'\end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} A\,(\mathrm{G} - z\mathrm{B})^{-1}\cdot\Theta\cdot\mathrm{G}\begin{bmatrix}1\\ z\end{bmatrix} dz$$
$$\mathbf{V} = \int_{-h/2}^{h/2} A\,(\mathrm{G} - z\mathrm{B})^{-1}\cdot\Theta\cdot\mathbf{N} dz$$

Здесь $\in_2$ — дискриминантный тензор поверхности, $\in$ — трехмерный дискриминантный тензор (тензор Леви-Чивита). Введя обозначение для вектора в правой части (2.9)

(2.11) $$-\mathbf{l} = \gamma\mathbf{N} + \boldsymbol{\lambda} \times \mathbf{N} \quad (\boldsymbol{\lambda}\cdot\mathbf{N} = 0)$$

видим, что уравнение (2.9) распадается на два

(2.12) $$[\mathrm{K}' + (\mathrm{B}\cdot\mathrm{M}')^T] \cdot\cdot \in_2 + \gamma = 0$$

(2.13) $$(\nabla_2\cdot\mathrm{M}')\cdot\mathrm{G} - \mathbf{V} + \boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\lambda} = 0$$

Введя в рассмотрение симметричный тензор К, из (2.12) имеем

(2.14) $$\mathrm{K}' = \mathrm{K} - (\mathrm{B}\cdot\mathrm{M}')^T + {}^1\!/_2\gamma \in_2$$
$$\mathrm{K} = {}^1\!/_2\, [\mathrm{K}' + (\mathrm{B}\cdot\mathrm{M}')^T] + {}^1\!/_2\, [\mathrm{K}'^T + \mathrm{B}\cdot\mathrm{M}']$$

Исключая из уравнений (2.13), (2.8) вектор V и используя (2.14), придем к одному векторному уравнению. Основываясь на тождестве Риччи и свойствах тензора Римана — Кристоффеля поверхности [6], можно доказать, что в это уравнение входит только симметричная часть тензора

$\mathbf{M}'$. Тогда получим окончательно следующее уравнение равновесия предварительно напряженной оболочки:

$$\begin{aligned}
&\nabla_2 \cdot \mathbf{K} - 2\mathbf{B} \cdot (\nabla_2 \cdot \mathbf{M}) - (\mathbf{M} \cdot \nabla_2) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{N}\nabla_2 \cdot [\mathbf{G} \cdot (\nabla_2 \cdot \mathbf{M})] - \\
&- {}^1\!/_2 \in_2 \cdot \nabla_2 \gamma - \mathbf{B} \cdot (\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{N}\nabla_2 \cdot (\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\lambda}) + \mathbf{f} = 0 \\
&\mathbf{M} = {}^1\!/_2 (\mathbf{M}' + \mathbf{M}'^T)
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Эти уравнения — точные следствия необходимых условий равновесия (1.3), (1.4).

Из (1.7), (2.4), (2.11) можно получить следующее соотношение:

$$\int_{-h/2}^{h/2} (\mathbf{N} \cdot \Theta - \Theta \cdot \mathbf{N})\, dz = -\mathbf{N} \times (\tilde{\boldsymbol{\lambda}} \times \mathbf{N}) = -\boldsymbol{\lambda} \tag{2.16}$$

Для малых добавочных смещений точек оболочки примем кинематические гипотезы Кирхгофа

$$\begin{aligned}
&\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 - z\boldsymbol{\vartheta}, \quad \boldsymbol{\vartheta} = -\mathbf{N}^{\cdot} = \mathbf{N} \cdot \nabla_2 \mathbf{w}_0^{\,T} = \nabla_2 w + \mathbf{B} \cdot \mathbf{u} \\
&\mathbf{u} = \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{G}, \quad w = \mathbf{w}_0 \cdot \mathbf{N}
\end{aligned} \tag{2.17}$$

Здесь $\mathbf{w}_0$ — вектор перемещения срединной поверхности. Для тензора $\mathbf{L}$ оболочки, согласно (2.4), после некоторых преобразований получим

$$\mathbf{L} = (\mathbf{G} - z\mathbf{B})^{-1} \cdot [\varepsilon_0 - z(\varkappa - \mathbf{B} \cdot \varepsilon_0)] + \chi \in_2 + \boldsymbol{\vartheta}\mathbf{N} - \mathbf{N}\boldsymbol{\vartheta} \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0 = {}^1\!/_2 [(\nabla_2 \mathbf{u}) \cdot \mathbf{G} + \mathbf{G} \cdot (\nabla_2 \mathbf{u})^T] - \mathbf{B}w \\
&\varkappa = (\nabla_2 \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \mathbf{G} + \mathbf{B} \cdot \nabla_2 \mathbf{w}_0^T, \quad \chi = {}^1\!/_2 \mathbf{N} \cdot (\nabla_2 \times \mathbf{u})
\end{aligned} \tag{2.19}$$

Можно проверить, что тензоры ε_0 и $\varkappa$ принадлежат поверхности O и симметричны. Они определяют соответственно инфинитезимальные изменения метрики и кривизны поверхности. Величина χ характеризует инфинитезимальный поворот элемента поверхности вокруг нормали. Принадлежащий поверхности вектор $\boldsymbol{\vartheta}$ характеризует углы поворота нормали при малых смещениях поверхности.

Надо иметь в виду, что гипотезы Кирхгофа (2.17) не следует рассматривать как требование отсутствия поперечной деформации $\varepsilon_{33} = \mathbf{N} \cdot \varepsilon \cdot \mathbf{N}$. Эта деформация должна быть определена из условия

$$\theta_{33} = \mathbf{N} \cdot \Theta \cdot \mathbf{N} = 0 \tag{2.20}$$

С учётом этого обстоятельства и при использовании представления (2.18) после вычислений получим из (2.11)

$$\begin{aligned}
&\gamma = \operatorname{tr} [\mathbf{S} \cdot \in_2 \cdot \varepsilon_0 - \mathbf{D} \cdot \in_2 \cdot (\varkappa - \varepsilon_0 \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{S}\chi - \mathbf{D} \cdot \mathbf{B}\chi] + \\
&+ \boldsymbol{\vartheta} \cdot \in_2 \cdot \mathbf{Q} - \boldsymbol{\vartheta} \cdot \in_2 \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{q}
\end{aligned} \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\lambda} = -\mathbf{Q} \cdot \varepsilon_0 + \mathbf{q} \cdot (\varkappa - \mathbf{B} \cdot \varepsilon_0) - \chi \mathbf{Q} \cdot \in_2 + \\
&+ \chi \mathbf{q} \cdot \mathbf{B} \cdot \in_2 + \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{S} - \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{D} + \boldsymbol{\psi}\boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{\xi}
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\begin{bmatrix} \mathrm{S} \\ \mathrm{D} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} A(\mathrm{G} - z\mathrm{B})^{-1} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{G} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} dz, \quad \psi = \int_{-h/2}^{h/2} A\mathrm{N} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{N} dz \quad . \tag{2.23}$$

$$\xi = \int_{-h/2}^{h/2} A\mathrm{N} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{G}\varepsilon_{33} dz, \quad \begin{bmatrix} \mathrm{Q} \\ \mathrm{q} \end{bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} A(\mathrm{G} - z\mathrm{B})^{-1} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{N} \begin{bmatrix} 1 \\ z \end{bmatrix} dz$$

Здесь S и D — соответственно тензоры начальных усилий и моментов в оболочке, Q — вектор перерезывающих сил в начальном напряженном состоянии. Соотношения (2.21), (2.22) — точные следствия гипотез Кирхгофа.

3. Удельная энергия деформации и определяющие уравнения предварительно напряженной оболочки. Потенциальная энергия деформации оболочки, приходящаяся на единицу площади срединной поверхности, согласно (1.8), (2.3), (1.11), задается выражением

$$a = \int_{-h/2}^{h/2} A(W^P + W^U)\, dz = a^P + a^U \tag{3.1}$$

Для вариации энергии из (1.12), (2.10), (2.18), (2.20), (2.12), (2.16) получим

$$\delta a = \mathrm{K} \cdot\cdot\, \delta\varepsilon_0 - \mathrm{M} \cdot\cdot\, \delta\varkappa + \gamma\delta\chi + \boldsymbol{\lambda} \cdot \delta\boldsymbol{\vartheta} \tag{3.2}$$

Из (3.2) следуют определяющие уравнения предварительно напряженной оболочки

$$\mathrm{K} = \partial a(\varepsilon_0, \varkappa, \chi, \boldsymbol{\vartheta}) / \partial\varepsilon_0, \quad \mathrm{M} = -\partial a(\varepsilon_0, \varkappa, \chi, \boldsymbol{\vartheta}) / \partial\varkappa \tag{3.3}$$

Энергия a^U вычисляется с помощью (1.11), (2.18) и с точностью до членов, содержащих интегралы σ_1, для любого материала имеет вид:

$$\begin{aligned} a^U = {} & \mathrm{S} \cdot\cdot\, (\chi \in_2 \cdot\, \varepsilon_0 + {}^1/_2\chi^2\mathrm{G} + {}^1/_2\boldsymbol{\vartheta\vartheta}) + \mathrm{D} \cdot\cdot\, ({}^3/_4\mathrm{B} \cdot \varepsilon_0{}^2 + \\ & + {}^1/_4\varepsilon_0{}^2 \cdot \mathrm{B} - \varepsilon_0 \cdot \mathrm{B} \cdot \varepsilon_0 - \chi \in_2 \cdot\, \varkappa + \chi \in_2 \cdot\, \varepsilon_0 \cdot \mathrm{B} - {}^1/_2\chi^2\mathrm{B} - \\ & - {}^1/_2\boldsymbol{\vartheta\vartheta} \cdot \mathrm{B}) + \mathrm{Q} \cdot (-\varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{\vartheta} - \chi \in_2 \cdot\, \boldsymbol{\vartheta}) + \mathrm{q} \cdot (\varkappa \cdot \boldsymbol{\vartheta} - \mathrm{B} \cdot \varepsilon_0 \cdot \boldsymbol{\vartheta} + \\ & + \chi\mathrm{B} \cdot \in_2 \cdot\, \boldsymbol{\vartheta}) + {}^1/_2\psi\boldsymbol{\vartheta} \cdot \boldsymbol{\vartheta} + \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\vartheta} + \sigma \cdot\cdot\, ({}^3/_2\varkappa \cdot \mathrm{B} \cdot \varepsilon_0 - {}^1/_2\varepsilon_0 \cdot \varkappa \cdot \mathrm{B} - \\ & - \mathrm{B} \cdot \varepsilon_0 \cdot \varkappa + {}^3/_4\mathrm{B}^2 \cdot \varepsilon_0{}^2 + {}^3/_4\mathrm{B} \cdot \varepsilon_0{}^2 \cdot \mathrm{B} - {}^3/_2\varepsilon_0 \cdot \mathrm{B}^2 \cdot \varepsilon_0) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\sigma = \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{G} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{G} z^2 dz, \quad \sigma_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \mathrm{G} \cdot \mathrm{T} \cdot \mathrm{G} z^3 dz$$

Следует отметить, что отброшенные в (3.4) члены, так же как члены, содержащие тензор σ, не зависят от χ, $\boldsymbol{\vartheta}$.

С помощью соотношений (1.10), (1.11), (2.18), (2.20), можно проверить, что в полном согласии с (3.2), (2.21), (2.22) из (3.4) следуют формулы

$$\gamma = \partial a / \partial\chi, \quad \boldsymbol{\lambda} = \partial a / \partial\boldsymbol{\vartheta}$$

В большинстве практических случаев в выражении (3.4), а следовательно, и в (2.21), (2.22) можно пренебречь слагаемыми, зависящими от ψ, q, σ.

Энергию оболочки a^P можно вычислить, если известен закон состояния материала и начальная деформация. Для упругого материала $\mathrm{P}(\varepsilon) = \mathrm{C} \cdot\cdot\, \varepsilon$, где тензор четвертого ранга C зависит от начальной деформации.

В случае изотропного материала тензор C является функцией тензора деформаций Альманзи [1] начального состояния и может быть представлен в виде разложения по степеням тензора Альманзи, причем нулевой член этого разложения имеет вид (λ, μ — постоянные Ламе)

$$\overset{\circ}{C}_{mnlk} = \lambda\delta_{mn}\delta_{kl} + \mu(\delta_{mk}\delta_{nl} + \delta_{ml}\delta_{nk})$$

Если главные относительные удлинения в начальном состоянии малы, перемещения и повороты могут быть конечными), то в упомянутом разложении можно сохранить только нулевой член. Последовательное вычисление остальных членов разложения невозможно без знания упругих постоянных материала второго и более высоких порядков.

При малой начальной деформации можно принять, что тензор P связан с тензором ε законом Гука

$$\mathrm{P}(\varepsilon) = \lambda \operatorname{tr}\varepsilon\, \mathrm{E} + 2\mu\varepsilon \tag{3.5}$$

Примем следующий характер распределения начальных касательных напряжений по толщине

$$\mathbf{N}\cdot\mathrm{T}\cdot\mathrm{G} \approx \frac{3}{2h}\left[1 - \left(\frac{2z}{h}\right)^2\right]\mathbf{Q}$$

Тогда после вычислений по формулам (3.1), (3.5), (1.11), (2.18), (2.20), с достаточной степенью точности [7] будем иметь

$$\begin{aligned} a^P &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)}[\operatorname{tr}^2\varepsilon_0 - 2(1-\nu)\det\varepsilon_0] + \\ &+ \frac{Eh^3}{24(1-\nu^2)}[\operatorname{tr}^2\varkappa - 2(1-\nu)\det\varkappa] + \frac{3(1+\nu)(1-2\nu)}{5Eh(1-\nu)}(\boldsymbol{\vartheta}\cdot\mathbf{Q})^2 \\ \xi &= -\frac{\nu}{1-\nu}\mathbf{Q}\operatorname{tr}\varepsilon_0 - \frac{6(1+\nu)(1-2\nu)}{5Eh(1-\nu)}\mathbf{QQ}\cdot\boldsymbol{\vartheta} \end{aligned} \tag{3.6}$$

Здесь E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона. Из (3.3), (3.4), (3.6), пренебрегая членами, содержащими ψ, $\mathbf{q}$, σ, получим представления тензоров K и M

$$\begin{aligned} \mathrm{K} &= \frac{Eh}{(1-\nu^2)}[(1-\nu)\varepsilon_0 + \nu\mathrm{G}\operatorname{tr}\varepsilon_0] + \\ &+ \frac{1}{2}\chi(\mathrm{S}\cdot\in_2 - \in_2\cdot\mathrm{S}^T + \mathbf{B}\cdot\mathrm{D}\cdot\in_2 - \in_2\cdot\mathrm{D}^T\cdot\mathbf{B}) - \\ &- \frac{1}{2}(\mathrm{D}+\mathrm{D}^T)\cdot\varepsilon_0\cdot\mathrm{B} - \frac{1}{2}\mathrm{B}\cdot\varepsilon_0\cdot(\mathrm{D}+\mathrm{D}^T) + \\ &+ \frac{3}{8}(\mathrm{D}\cdot\mathbf{B} + \mathrm{B}\cdot\mathrm{D}^T)\cdot\varepsilon_0 + \frac{3}{8}\varepsilon_0\cdot(\mathrm{D}\cdot\mathbf{B} + \mathrm{B}\cdot\mathrm{D}^T) + \\ &+ \frac{1}{8}(\mathrm{D}^T\cdot\mathrm{B} + \mathbf{B}\cdot\mathrm{D})\cdot\varepsilon_0 + \frac{1}{8}\varepsilon_0\cdot(\mathrm{D}^T\cdot\mathbf{B} + \mathbf{B}\cdot\mathrm{D}) - \\ &- \frac{1}{2}(\boldsymbol{\vartheta}\mathbf{Q} + \mathbf{Q}\boldsymbol{\vartheta}) - \frac{\nu}{1-\nu}\mathbf{Q}\cdot\boldsymbol{\vartheta}\mathrm{G} \\ \mathrm{M} &= -\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}[(1-\nu)\varkappa + \nu\mathrm{G}\operatorname{tr}\varkappa] - \frac{1}{2}\chi(\in_2\cdot\mathrm{D}^T - \mathrm{D}\cdot\in_2) \end{aligned} \tag{3.7}$$

Уравнения равновесия (2.15) вместе с соотношениями (2.21), (2.22) и определяющими уравнениями (3.7) образуют полную систему уравнений предварительно напряженной оболочки в случае малой начальной деформации. Можно убедиться в том, что применительно к задаче изгиба плиты, предварительно нагруженной в своей плоскости, эта система уравнений сводится к классическому уравнению Брайана [8].

4. Краевые условия. Разрешающие уравнения и силовые граничные условия задачи о деформации предварительно напряженного тела могут быть получены из вариационного принципа [3]

$$\delta \iiint_V W d\tau - \iiint_V \rho \mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{w}\, d\tau - \iint_O \mathbf{f} \cdot \delta \mathbf{w}\, dO = 0 \tag{4.1}$$

Пусть срединная поверхность O ограничена гладким контуром Γ, на котором заданы добавочная внешняя сила с интенсивностью $\mathbf{l}$ на единицу длины и момент с интенсивностью $\mathbf{d} \times \mathbf{N}$ ($\mathbf{d} \cdot \mathbf{N} = 0$), а также контуром Γ', по которому к срединной поверхности оболочки примыкает абсолютно твердое ядро. Контур Γ' разделяет поверхность жесткого включения на две части. Для упрощения формул будем предполагать, что добавочные внешние силы приложены только к одной из этих частей, обозначаемой O'.

Из (4.1), (3.2), (1.15) получим

$$\begin{aligned} &\iint_O (\mathrm{K} \cdot\cdot\, \delta\varepsilon_0 - \mathrm{M} \cdot\cdot\, \delta\varkappa + \gamma\delta\chi + \boldsymbol{\lambda} \cdot \delta\boldsymbol{\vartheta} - \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{w}_0 + \boldsymbol{\mu} \cdot \delta\boldsymbol{\vartheta})\, dO - \\ &- \iint_{O'} \mathbf{f} \cdot \delta\mathbf{w}\, dO + \boldsymbol{\omega} \cdot \Phi \cdot \delta\boldsymbol{\omega} - \int_\Gamma (\mathbf{l} \cdot \delta\mathbf{w}_0 - \mathbf{d} \cdot \delta\boldsymbol{\vartheta})\, dS = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь $\boldsymbol{\omega}$ — вектор инфинитезимального поворота жесткого ядра.

Тензор Φ, обусловливающий потенциальную энергию ядра, имеет две составляющие: $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$. Тензор Φ_1 порождается реактивными усилиями, действующими на ядро в начальном напряженном состоянии со стороны оболочки, а Φ_2 вычисляется по (1.14) через внешние силы начального состояния, приложенные к ядру. На основании (1.14), (2.2), (2.23) имеем

$$\begin{aligned} \Phi_1 = &- \int_{\Gamma'} [\mathbf{m}_0 \cdot (\mathrm{S} \cdot \mathbf{R}_0 + \mathbf{QN} \cdot \mathbf{R}_0 + \mathbf{q})\, \mathrm{E} - (\mathbf{m}_0 \cdot \mathrm{S})\, \mathbf{R}_0 - \\ &- (\mathbf{m}_0 \cdot \mathrm{D})\, \mathbf{N} - (\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{Q})\, \mathbf{NR}_0 - (\mathbf{m}_0 \cdot \mathbf{q})\, \mathbf{NN}]\, dS \end{aligned} \tag{4.3}$$

Здесь $\mathbf{m}_0$ — нормаль к контуру Γ', внешняя по отношению к области O, занятой оболочкой. Используя (2.19) и интегрируя по частям, получим вместо (4.2)

$$\begin{aligned} &- \iint_O \Big\{\nabla_2 \cdot \mathrm{K} - \nabla_2 \cdot (\mathrm{M} \cdot \mathbf{B}) - (\nabla_2 \cdot \mathrm{M}) \cdot \mathbf{B} + \frac{1}{2} \nabla_2 \cdot (\gamma \in_2) - \\ &- (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}) \cdot \mathbf{B} + \mathbf{N}\nabla_2 \cdot [\mathrm{G} \cdot (\nabla_2 \cdot \mathrm{M})] + \mathbf{N}\nabla_2 \cdot (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}) + \mathbf{f}\Big\} \cdot \delta\mathbf{w}_0\, dO + \\ &+ \int_\Gamma \Big[\Big\{\mathbf{m}_0 \cdot (\nabla_2 \cdot \mathrm{M}) + \mathbf{m}_0 \cdot (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\mu}) - \mathbf{l} \cdot \mathbf{N} + \frac{\partial M_{mt}}{\partial S} - \frac{\partial d_t}{\partial S}\Big]\delta w + \\ &+ \Big[\mathbf{m}_0 \cdot (\mathrm{K} - 2\mathrm{M} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{d} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{l} \cdot \mathrm{G} + \frac{1}{2} \gamma \mathbf{m}_0 \cdot \in_2\Big] \cdot \delta\mathbf{u} - \\ &- (M_{mm} - d_m)\, \delta\left(\frac{\partial w}{\partial m}\right)\Big\}\, dS + \boldsymbol{\omega} \cdot \Phi \cdot \delta\boldsymbol{\omega} + \end{aligned} \tag{4.4}$$

$$+\int_{\Gamma'}\Big\{\mathbf{m}_0\cdot\Big(\mathrm{K}-2\mathrm{M}\cdot\mathbf{B}+\frac{1}{2}\,\gamma\cdot\in_2\Big)\cdot\delta\mathbf{u}+\Big[\mathbf{m}_0\cdot(\nabla_2\cdot\mathrm{M})+$$

$$+\mathbf{m}_0\cdot(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})+\frac{\partial M_{mt}}{\partial S}\Big]\delta w-M_{mm}\delta\Big(\frac{\partial w}{\partial m}\Big)\Big\}dS-\iint_{O'}\mathbf{f}\cdot\delta\mathbf{w}\,dO=0$$

Кинематические условия сопряжения оболочки с ядром записываются следующим образом:

$$\begin{aligned}&\mathbf{w}_0=\mathbf{v}-\mathbf{R}_0\times\boldsymbol{\omega},\quad \delta\mathbf{w}_0=\delta\mathbf{v}-\mathbf{R}_0\times\delta\boldsymbol{\omega}\\ &\mathbf{m}_0\cdot\boldsymbol{\vartheta}=-\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\omega},\quad \delta(\partial w/\partial m)=-\mathbf{m}_0\cdot\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{v}+\\ &+(-\mathbf{t}+m_0\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{R}_0)\cdot\delta\boldsymbol{\omega},\quad \mathbf{t}=-\mathbf{m}_0\times\mathbf{N}\end{aligned}\tag{4.5}$$

Здесь $\mathbf{v}$ — вектор поступательного перемещения ядра. Приравняв нулю коэффициенты при вариациях $\delta\mathbf{w}_0$ на O, $\delta\mathbf{w}_0$ и $\delta\,(\partial w\,/\,\partial m)$ на Γ, придем к уравнениям равновесия (2.15) и силовым граничным условиям на Γ. Далее, подставив (4.5) в (4.4) и приравняв нулю коэффициенты при вариациях $\delta\mathbf{v}$ и $\delta\boldsymbol{\omega}$, получим условия сопряжения с жестким ядром

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma'}\Big\{\mathbf{m}_0\cdot\Big(\mathrm{K}-2\mathrm{M}\cdot\mathbf{B}+\frac{1}{2}\gamma\in_2+\mathrm{B}M_{mm}\Big)+\\ &+\mathbf{m}_0\cdot(\nabla_2\cdot\mathrm{M}+\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})\,\mathbf{N}+\frac{\partial M_{mt}}{\partial S}\,\mathbf{N}\Big\}dS-\iint_{O'}\mathbf{f}\,dO=0\\ &\int_{\Gamma'}\Big\{\mathbf{m}_0\cdot\Big(\mathrm{K}-2\mathrm{M}\cdot\mathrm{B}+\frac{1}{2}\gamma\in_2+\mathrm{B}M_{mm}\Big)\times\mathbf{R}_0+\\ &+\mathbf{m}_0\cdot\Big(\nabla_2\cdot\mathrm{M}+\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu}+\frac{\partial M_{mt}}{\partial S}\Big)\mathbf{N}\times\mathbf{R}_0-\mathbf{t}M_{mm}\Big\}dS+\\ &+\iint_{O'}\mathbf{R}\times\mathbf{f}\,dO-\boldsymbol{\omega}\cdot\Phi=0\end{aligned}\tag{4.6}$$

Добавочная нагрузка $\mathbf{f}$ не обязательно должна считаться заданной — она может зависеть от вектора смещения $\mathbf{w}$. Если на поверхности тела в начальном деформированном состоянии действует гидростатическое давление интенсивности p, то при переходе к смежному состоянию возникает добавочная поверхностная нагрузка [1]

$$\mathbf{f}=-p(\nabla\cdot\mathbf{w}\mathrm{E}-\nabla\mathbf{w})\cdot\mathbf{N}=p\mathbf{N}\cdot(\nabla_2\mathbf{w}_0^T-\mathrm{E}\nabla_2\cdot\mathbf{w}_0)=p\,(\boldsymbol{\vartheta}-\mathbf{N}\,\mathrm{tr}\,\varepsilon_0)\tag{4.7}$$

Для случая, когда со стороны внешней среды на жесткое ядро действует только равномерно распределенное по поверхности гидростатическое давление величины p, из (1.14), (4.7) получим

$$\begin{aligned}&-\boldsymbol{\omega}\cdot\Phi_2+\iint_{O'}\mathbf{R}\times\mathbf{f}\,dO=p\boldsymbol{\omega}\times\int_{\Gamma'}\mathbf{R}_0\,(\mathbf{t}\cdot\mathbf{R}_0)\,dS\\ &-\iint_{O'}\mathbf{f}\,dO=\frac{1}{2}\,p\boldsymbol{\omega}\times\int_{\Gamma'}\mathbf{t}\times\mathbf{R}_0dS\end{aligned}\tag{4.8}$$

Последние формулы показывают, что в этом случае условия сопряжения (4.6) не зависят от формы поверхности O' жесткого включения.

Из непосредственного проверяемого соотношения

$$p \iint\limits_{O} (\operatorname{tr} \varepsilon_0 \delta w - \boldsymbol{\vartheta} \cdot \delta \mathbf{w}_0)\, dO = \delta \left[\frac{1}{2} p \iint\limits_{O} (w \operatorname{tr} \varepsilon_0 - \boldsymbol{\vartheta} \cdot \mathbf{u})\, dO \right] - \frac{1}{2} p \int\limits_{\Gamma} (\mathbf{t} \times \mathbf{w}_0) \cdot \delta \mathbf{w}_0\, dS \tag{4.9}$$

следуют условия потенциальности нагрузки (4.7) для случая равномерного давления, распределенного по всей срединной поверхности, опирающейся на контур Г. Если кинематические краевые условия на Г таковы, что контурный интеграл в (4.9) обращается в нуль, то элементарная работа нагрузки (4.7) является полной вариацией функционала.

Поступила 27 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Теория упругости. М., «Наука», 1970.
2. *Лурье А. И.* Бифуркация равновесия идеально упругого тела ПММ, 1966, т. 30, вып. 4.
3. *Зубов Л. М.* Вариационные принципы нелинейной теории упругости. Случай наложения малой деформации на конечную. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
4. *Лурье А. И.* О дифференцировании тензоров по времени. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1971.
5. *Аппель П.* Теоретическая механика, т. 1. М., Физматгиз, 1960.
6. *Каган В. Ф.* Основы теории поверхностей в тензорном изложении, т. 1. М.— Л Гостехиздат, 1947.
7. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1951.
8. *Тимошенко С. П.* Устойчивость упругих систем. М., Гостехиздат, 1955.