

## ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА О ВДАВЛИВАНИИ УПРУГОГО ЦИЛИНДРА В УПРУГИЙ СЛОЙ

А. Н. Златин, Я. С. Уфлянд

(Ленинград)

Дается обобщение задачи о вдавливании кругового штампа в случае, когда упругий штамп контактирует с неограниченным упругим слоем. Применение интегрального преобразования Ханкеля в области слоя и свойства обобщенной ортогональности собственных функций в области упругого цилиндра (штампа) позволяет свести задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, допускающей эффективные решения методом усечения.

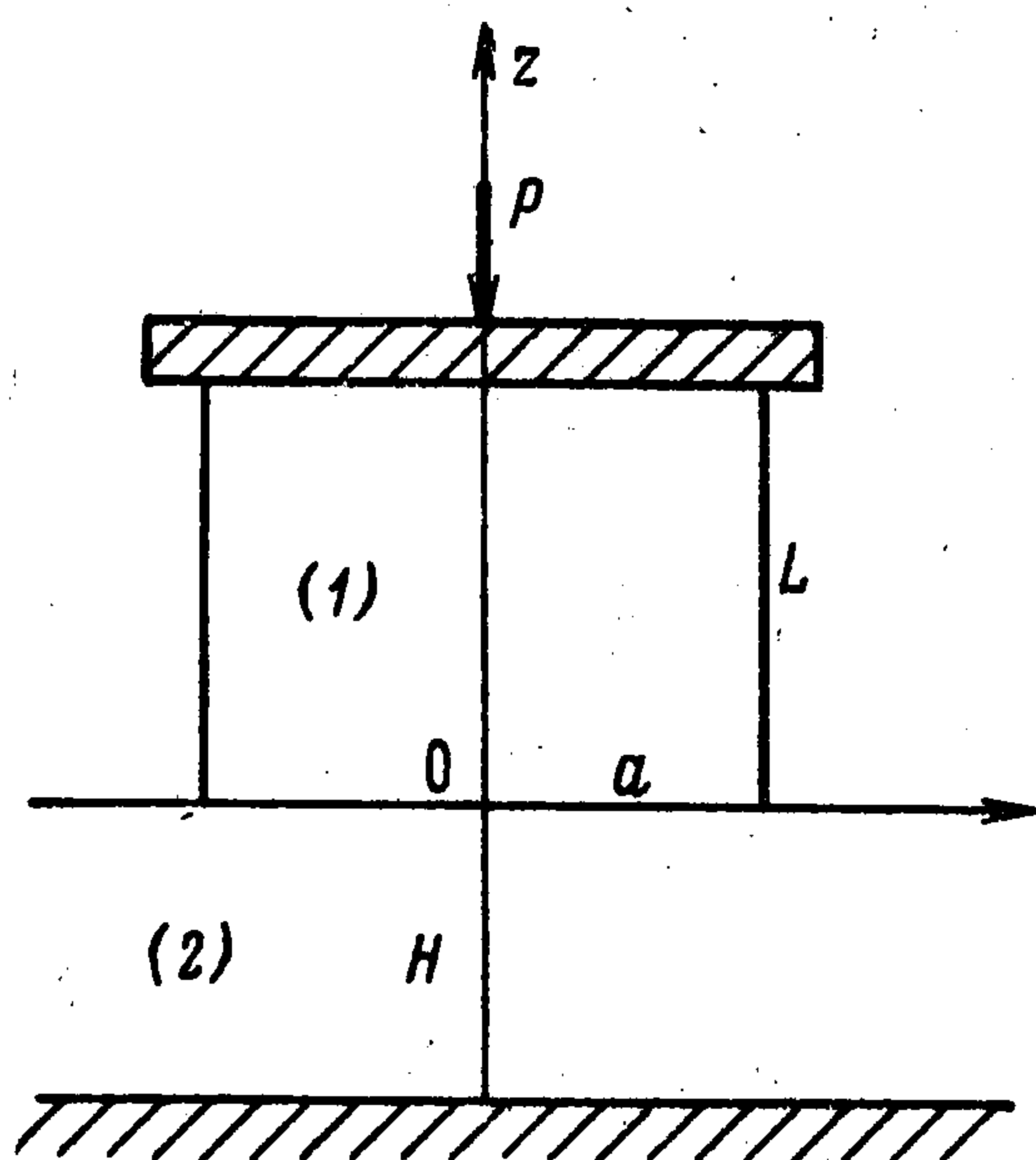
За последние десятилетия классическая задача о жестком штампе, вдавливаемом в упругое полупространство, подверглась обобщениям в нескольких направлениях. Так, в ряде работ рассматривалось вдавливание жесткого штампа в упругий слой (см., например, [1]), с другой стороны, изучалась [2] задача о контакте упругого цилиндра и полупространства. Наконец, в работе [3] исследовалась и более общая задача о вдавливании упругого цилиндра в упругий слой. Задача была сведена к бесконечным линейным алгебраическим системам, эффективно разрешимым для достаточно толстых слоев, так как решение разлагалось в ряды по степеням малого параметра — отношения радиуса цилиндра к толщине слоя. В данной работе та же задача сводится к бесконечным системам иного типа, пригодным для любых соотношений геометрических параметров. Приводятся результаты численных расчетов жесткости рассматриваемой системы.

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим осесимметричную задачу о вдавливании без трения упругого цилиндра радиуса  $a$  и высоты  $L$  в упругий слой толщины  $H$ , покоящийся на неподвижном основании (фигура). Введем цилиндрические координаты  $r, \varphi, z$  и будем предполагать, что верхний торец цилиндра перемещается поступательно на величину  $w_0$ , а поверхности  $z = L$  и  $z = -H$  находятся в условиях скользящей заделки. (Остальные части поверхностей тел считаются свободными от напряжений).

Удобно перейти к безразмерным координатам, относя все линейные размеры к радиусу

$$\rho = \frac{r}{a}, \quad x = \frac{z}{a}, \quad l = \frac{L}{a}, \quad h = \frac{H}{a}$$

Помечая величины, относящиеся к цилиндру, индексом 1, а к слою — индексом 2, получим граничные условия задачи и



условия сопряжения в следующем виде:

$$(1.1) \quad \sigma_\rho^{(1)}(1, x) = \tau_{x\rho}^{(1)}(1, x) = 0, \quad 0 \leq x \leq l$$

$$(1.2) \quad w^{(1)}(\rho, l) = w_* = \frac{w_0}{a}, \quad \tau_{x\rho}^{(1)}(\rho, l) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$$(1.3) \quad \tau_{x\rho}^{(2)}(\rho, -h) = w^{(2)}(\rho, -h) = 0, \quad 0 \leq \rho < \infty$$

$$(1.4) \quad \tau_{x\rho}^{(2)}(\rho, 0) = 0, \quad 0 \leq \rho < \infty$$

$$(1.5) \quad \sigma_x^{(2)}(\rho, 0) = 0, \quad 1 < \rho < \infty$$

$$(1.6) \quad \tau_{x\rho}^{(1)}(\rho, 0) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$$(1.7) \quad \sigma_x^{(1)}(\rho, 0) = \sigma_x^{(2)}(\rho, 0), \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$$(1.8) \quad w^{(1)}(\rho, 0) = w^{(2)}(\rho, 0), \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

Здесь  $(u, 0, w)$  — компоненты вектора перемещений;  $\sigma_x, \sigma_\rho, \tau_{x\rho}$  — составляющие тензора напряжений. В дальнейшем используются также обозначения  $\nu_{1,2}$  и  $G_{1,2}$  для коэффициентов Пуассона и модулей сдвига.

2. Сведение решения к бесконечной алгебраической системе. Решение для цилиндра строится в виде ряда по однородным решениям задачи о деформации цилиндра со свободной боковой поверхностью, для чего в рассмотрение вводятся комплексные функции [4, 5]

$$\varepsilon_k(\rho) = J_0(p_k)J_0(p_k\rho) + \rho J_1(p_k)J_1(p_k\rho)$$

$$\delta_k(\rho) = \frac{2(1-\nu_1)}{p_k} J_1(p_k)J_0(p_k\rho)$$

обладающие свойством обобщенной ортогональности Шиффа

$$(2.1) \quad \int_0^1 [\varepsilon_k'(\rho) \delta_n'(\rho) + \varepsilon_n'(\rho) \delta_k'(\rho)] \rho d\rho = \begin{cases} 0, & p_n^2 \neq p_k^2 \\ -2N_n, & p_n^2 = p_k^2 \end{cases}$$

Здесь  $p_k$  — корни трансцендентного уравнения

$$(2.2) \quad [2(1-\nu_1) - p^2]J_1^2(p) = p^2 J_0^2(p)$$

причем каждому номеру  $k$  можно поставить в соответствие две пары комплексно-сопряженных корней вида

$$p_k = \pm a_k \pm ib_k, \quad k=1, 2, \dots \quad (a_k, b_k > 0)$$

(корню  $p_0 = 0$  соответствует элементарное решение о деформации цилиндра). В данной задаче, как можно проверить непосредственно, достаточно рассматривать лишь корни, находящиеся в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > 0$ , поэтому в дальнейшем будет принято, что

$$p_k = a_k + ib_k, \quad p_{-k} = a_k - ib_k, \quad k=1, 2, \dots$$

Итак, перемещения и напряжения в цилиндре можно разыскивать в виде рядов, удовлетворяющих условиям (1.1), (1.2) (знак суммирования  $\Sigma'$  распространен на все целые  $k$ , кроме нуля; аргумент  $\rho$  у функций

$\varepsilon_k, \delta_k$  и их производных  $\varepsilon_k', \delta_k'$  опущен)

$$(2.3) \quad \begin{aligned} w^{(1)}(\rho, x) &= w_* + \frac{\sigma_0(x-l)}{2G_1(1+\nu_1)} - \sum_k' C_k(\varepsilon_k - \delta_k) \frac{\text{sh } p_k(l-x)}{\text{ch } p_k l} \\ u^{(1)}(\rho, x) &= -\frac{\sigma_0 \nu_1 \rho}{2G_1(1+\nu_1)} + \sum_k' C_k(\varepsilon_k' + \delta_k') \frac{\text{ch } p_k(l-x)}{\text{ch } p_k l} \\ \sigma_x^{(1)}(\rho, x) &= \sigma_0 - 2G_1 \sum_k' C_k \frac{(\rho \varepsilon_k')'}{\rho} \frac{\text{ch } p_k(l-x)}{\text{ch } p_k l} \\ \tau_{x\rho}^{(1)}(\rho, x) &= -2G_1 \sum_k' C_k \varepsilon_k' p_k \frac{\text{sh } p_k(l-x)}{\text{ch } p_k l} \\ \sigma_\rho^{(1)}(\rho, x) &= 2G_1 \sum_k' C_k \left( \varepsilon_k'' + \delta_k'' - \frac{\nu_1 p_k^2 \delta_k}{1-\nu_1} \right) \frac{\text{ch } p_k(l-x)}{\text{ch } p_k l} \end{aligned}$$

В приведенных формулах слагаемые, соответствующие номерам  $k$  и  $-k$ , — комплексно-сопряженные ( $\varepsilon_k = \overline{\varepsilon_{-k}}$  и т. д.).

Решение для слоя может быть построено в виде интеграла Ханкеля [1]. Приведем здесь лишь выражения для нормального напряжения и перемещения в точках поверхности  $x = 0$

$$(2.4) \quad \sigma_x^{(2)}(\rho, 0) = \int_0^\infty \lambda A(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda$$

$$(2.5) \quad w^{(2)}(\rho, 0) = \frac{1-\nu_2}{G_2} \int_0^\infty A(\lambda) f(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda, \quad 0 \leq \rho < \infty$$

$$f(\lambda) = \frac{\text{sh}^2 \lambda h}{\lambda h + \text{sh } \lambda h \text{ch } \lambda h}$$

(при таком выборе решения условия (1.3), (1.4), удовлетворены).

Условия (1.5), (1.7) могут быть записаны в виде

$$\sigma_x^{(2)}(\rho, 0) = \begin{cases} \sigma_x^{(1)}(\rho, 0), & 0 \leq \rho \leq 1 \\ 0, & 1 < \rho < \infty \end{cases}$$

Отсюда, вспоминая третью формулу (2.3) и (2.4), можно получить

$$(2.6) \quad A(\lambda) = \int_0^1 \rho J_0(\lambda \rho) \sigma_x^{(1)}(\rho, 0) d\rho = \sigma_0 \bar{\alpha}_0(\lambda) + 2G_1 \sum_k' C_k \bar{\alpha}_k(\lambda)$$

Здесь

$$(2.7) \quad \alpha_0(\lambda) = \int_0^1 \rho J_0(\lambda \rho) d\rho$$

$$\alpha_k(\lambda) = -\int_0^1 J_0(\lambda \rho) (\rho \varepsilon_k')' d\rho = -\lambda \int_0^1 J_1(\lambda \rho) \rho \varepsilon_k' d\rho, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Остались невыполненными условия (1.6), (1.8), принимающие вид

$$(2.8) \quad 2G_1 \sum_k' C_k \varepsilon_k' p_k \text{th } p_k l = 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

$$w_* - \frac{\sigma_0 l}{2G_1(1+\nu_1)} - \sum_k' C_k (\varepsilon_k - \delta_k) p_k \text{th } p_k l = w^{(2)}(\rho, 0), \quad 0 \leq \rho \leq 1$$

где  $w^{(2)}(\rho, 0)$  определяется через коэффициенты  $\sigma_0, C_k$  формулами (2.5), (2.6).

Соотношение обобщенной ортогональности (2.1) позволяет свести равенства (2.8) к бесконечной системе путем применения следующего приема. Домножая уравнения (2.8) соответственно на функции  $v_1 \rho^2 [2G_1(1 + v_1)]^{-1}$  и  $\rho$ , вычитая их и интегрируя по  $\rho$  на участке  $[0, 1]$ , после некоторых выкладок приходим к равенству

$$\sigma_0 \frac{l}{4G_1(1+v_1)} + \int_0^1 w^{(2)}(\rho, 0) \rho d\rho = \frac{1}{2} w_*$$

Аналогично, домножая уравнения (2.8) на  $(\varepsilon_n' + \delta_n')\rho$  и  $2G_1(\rho\varepsilon_n)'$ , вычитая и интегрируя, имеем

$$2C_n N_n p_n \operatorname{th} p_n l - \int_0^1 w^{(2)}(\rho, 0) (\rho\varepsilon_n)' d\rho = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Учитывая (2.5), (2.6), после некоторых формальных вычислений приходим к бесконечной системе уравнений

$$(2.9) \quad \begin{cases} a_0 X_0 + g \sum_k b_{0k} X_k = \frac{1}{4} & \left( g = \frac{G_1}{G_2} \right) \\ a_n X_n + g \sum_k b_{nk} X_k = 0, & n = \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases}$$

Здесь

$$(2.10) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{l}{4(1+v_1)} \\ a_n &= p_n N_n \operatorname{th} p_n l, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots \\ b_{nk} &= (1-v_2) \int_0^\infty \alpha_n(\lambda) \alpha_k(\lambda) f(\lambda) d\lambda; \quad n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

Знак  $\sum$  распространяется на все целые  $k$ ; величины  $X_0, X_k$  связаны с основными неизвестными  $\sigma_0, C_k$  соотношениями

$$X_0 = \frac{\sigma_0}{2G_1 w_*}, \quad X_k = \frac{C_k}{w_*}, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Предельный переход  $h \rightarrow 0$  или  $G_2 \rightarrow \infty$  дает

$$X_0 = a_0 / 4, \quad X_n = 0, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Этот результат определяет элементарное решение задачи о сжатии цилиндра гладкими жесткими плоскостями

$$\sigma_x^{(1)}(\rho, x) = 2G_1(1+v_1)w_* / l$$

Отсюда вытекает, что система (2.9) наиболее эффективно разрешима для малых  $h$  (например способом итераций).

3. Численное решение. Необходимые для численной реализации найденного решения корни характеристического уравнения (2.2) при  $\nu_1 = 0.3$  были взяты из работы [6]; функции Бесселя комплексного аргумента определялись путем использования интегрального представления [7]

$$J_q(z) = \frac{(z/2)^q}{\Gamma(q+1/2)\Gamma(1/2)} \int_{-1}^1 e^{izt} (1-t^2)^{q-1/2} dt, \quad \text{Re } q > -\frac{1}{2}$$

и рекуррентной формулы

$$J_0(z) = \frac{2}{z} J_1(z) - J_2(z)$$

Квадратуры (2.1), (2.7) оказалось возможным вычислить в явном виде]

$$N_n = (1 - \nu_1) J_1^2(p_n) \left\{ 2 \frac{1 - \nu_1}{p_n^2} J_1(p_n) [J_1(p_n) - p_n J_0(p_n)] + J_0^2(p_n) \right\}$$

$$\alpha_0(\lambda) = \frac{1}{\lambda} J_1(\lambda)$$

$$\alpha_n(\lambda) = \frac{\lambda J_1(\lambda)}{\lambda^2 - p_n^2} \left[ 2(1 - \nu_1) J_1^2(p_n) - \frac{2\lambda^2}{\lambda^2 - p_n^2} p_n J_0(p_n) J_1(p_n) \right] +$$

$$+ \frac{2\lambda^2 J_0(\lambda)}{(\lambda^2 - p_n^2)^2} p_n^2 J_1^2(p_n), \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Комплексные коэффициенты  $b_{nk}$  (2.10) бесконечной системы (2.9) определялись методом Симпсона. При численном решении на БЭСМ-4 бесконечной системы использовался метод редукции.

$h \backslash l$	0	1/16	1/8	1/4	1/2	1	2	4	8
0	—	131	65.3	32.7	16.3	8.17	4.08	2.04	1.02
1/4	39.9	30.6	24.8	18.0	11.6	6.78	3.71	1.94	0.996
1/2	21.0	18.1	15.9	12.8	9.19	5.88	3.42	1.86	0.974
1	12.0	11.0	10.1	8.72	6.88	4.84	3.04	1.75	0.940
2	8.10	7.61	7.21	6.50	5.42	4.07	2.72	1.63	0.907
$\infty$	5.44	5.23	5.02	4.66	4.08	3.27	2.34	1.49	0.860

Отношение суммарной осевой силы  $P$  к величине перемещения верхнего торца цилиндра  $w_0$  может быть названо жесткостью рассмотренной упругой системы. Путем интегрирования напряжения  $\sigma_x$  в третьем из соотношений (2.3) по площадке контакта было получено следующее простое представление для жесткости:

$$C = P / w_0 = 2\pi G_1 a X_0$$

В таблице приведены значения безразмерной величины  $C / G_1 a = 2\pi X_0$ , вычисленной для различных значений геометрических параметров при  $G_1 = G_2, \nu_1 = \nu_2 = 0.3$ .

Отметим, что решение задачи об упругом контакте цилиндра и слоя, который сцеплен с неподвижным основанием, также может быть сведено к бесконечной системе уравнений типа (2.9), (2.10), причем в этом случае только функция  $f(\lambda)$  (см. (2.5)) в соответствии с [8] должна быть заменена на

$$f(\lambda) = 1 - \frac{\mu(1+\mu) + 4(1-\nu_2)^2 - (3-4\nu_2)e^{-\mu} \text{sh } \mu}{(3-4\nu_2) \text{sh}^2 \mu + \mu^2 + 4(1-\nu_2)^2}, \quad \mu = \lambda h$$

Авторы благодарят Б. М. Нуллера за ценные замечания, высказанные при обсуждении работы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
  2. Кизыма Я. М. Осесимметричная задача о давлении упругого цилиндра на упругое полупространство. Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 4.
  3. Кизыма Я. М. Давление упругого цилиндра на упругий слой конечной толщины. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 3.
  4. Нуллер Б. М. О соотношении обобщенной ортогональности П. А. Шиффа. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
  5. Нуллер Б. М. Контактная задача для упругого полубесконечного цилиндра. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
  6. Little R. W., Childs S. B. Elastostatic boundary region in solid cylinders. Quart. Appl. Math., 1967, vol. 25.
  7. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
  8. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
-