Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 533.6.011

О РАСПРОСТРАНЕНИИ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЗВУКОВОМ ПОТОКЕ И В ПОКОЯЩЕМСЯ ГАЗЕ

П. А. Вельмисов

(Ульяновск)

Получены приближенные уравнения для нестационарных малых возмущений постоянного звукового потока и покоящегося газа, которые в отличие от аналогичного уравнения, применявшегося для описания околозвуковых неустановившихся течений газа, правильно описывают распространение возмущения от точечного источника по всем направлениям [1].

1. Рассмотрим потенциальные течения идеального совершенного газа. Такие течения описываются уравнением

$$(1.1)\qquad \begin{gathered}(\Phi_t+V^2)_t+\Phi_x{}^2\Phi_{xx}+\Phi_y{}^2\Phi_{yy}+\Phi_z{}^2\Phi_{zz}+2\Phi_x\Phi_y\Phi_{xy}+\\ +2\Phi_x\Phi_z\Phi_{xz}+2\Phi_y\Phi_z\Phi_{yz}=a^2(\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz})\\ a^2=\rho^{\varkappa-1}=P^{(\varkappa-1)/\varkappa}=\frac{\varkappa+1}{2}-(\varkappa-1)\left(\Phi_t+\frac{1}{2}V^2\right)\\ V=(\Phi_x{}^2+\Phi_y{}^2+\Phi_z{}^2)^{1/2}\end{gathered}$$

Здесь Φ, x, y, z, t, V, a, P, ρ — безразмерные потенциал скоростей, декартовы координаты, время, скорость газа, скорость звука, давление, плотность (отнесенные соответственно к $a_*{}^2t_0$, a_*t_0, t_0, a_*, P_*, ρ_*, где звездочкой обозначены параметры в звуковом потоке $u=\Phi_x=a_*$, $\Phi_y=0$).

Рассмотрим околозвуковые течения газа. Для описания таких течений можно использовать линейную теорию

$$(1.2)\qquad \begin{gathered}\Phi=x+\gamma\Phi_1+\gamma^2\Phi_2+\ldots,\quad \Phi_{1tt}+2\Phi_{1xt}=\Phi_{1yy}+\Phi_{1zz}\\ \gamma\ll 1\end{gathered}$$

Однако линейная теория имеет некоторые недостатки. В частности, линейное разложение (1.2) имеет различные области нерегулярности, для которых второй член разложения $\gamma^2\Phi_2$ становится одного порядка с первым членом $\gamma\Phi_1$.

В качестве примера приведем два таких разложения для одномерных течений

$$(1.3)\qquad \Phi=x+\gamma\beta_1(\nu)+\gamma^2\left[-\frac{\varkappa+1}{8}\beta_1'^2(\nu)x+\beta_2(\nu)\right]+\ldots,\quad \nu=2t-x$$

$$(1.4)\qquad \Phi=x+\gamma\alpha_1(x)+\gamma^2\left[-\frac{\varkappa+1}{8}\alpha_1'^2(x)\nu+\alpha_2(x)\right]+\ldots$$

Эти разложения описывают течение в канале, возникающее при движении поршня $x = t + \gamma h_1(t) + \ldots$ в околозвуковом потоке. Так же, как и для малых возмущений в покоящемся газе ([2], стр. 247)

$$\Phi = \gamma\Phi_1 + \gamma^2\Phi_2 + \ldots, \quad \Phi_1(x, t) = \alpha\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{2}}t + x\right) + \\ + \beta\left(\sqrt{\frac{\varkappa+1}{2}}t - x\right)$$

для которых в решениях для Φ_2 и $\Phi_1 = \alpha_1(x) + \beta_1(\nu)$ в (1.2) оставлены функции, зависящие только от ν, для (1.3) (здесь $\Phi_1 = \beta_1$ — уходящая волна) и только от x для (1.4) ($\Phi_1 = \alpha_1$ — приходящая волна). Функции α_k, β_k определяются из условий на поршне.

Разложения (1.3) и (1.4) становятся нерегулярными соответственно при $\nu \sim 1$, $x \sim 1/\gamma$ и при $x \sim 1$, $\nu \sim 1/\gamma$, т. е. нетрудно показать, что при больших значениях времени $t \sim 1/\gamma$ в окрестности ударных волн, в первом приближении совпадающих с характеристиками, $x = 2t + \gamma x_1(t)$ для (1.3) (распространяется вниз по течению в звуковом потоке) и $x = \gamma x_1(t) + \ldots$ для (1.4) (распространяется вверх по течению).

Заметим, что вместо переменных x, ν в (1.3), (1.4) можно ввести переменные ξ_1, ξ_2, $x = p\xi_1 + q\xi_2$, $\nu = l\xi_1 + m\xi_2$, $ql \neq pm$. Тогда разложения (1.3) и (1.4) можно переписать в таком виде, что они будут нерегулярные соответственно при $\xi_k = s_1/\gamma$, $l\xi_1 + m\xi_2 = \theta_1$ и $\xi_k = s_2/\gamma$, $p\xi_1 + q\xi_2 = \theta_2$ (в частности, при больших значениях времени $t \sim 1/\gamma$, если $\xi_1 \sim 1/\gamma$, $m = -q$ или $\xi_2 \sim 1/\gamma$, $l = -p$). Здесь $\gamma \ll 1$; s_k, θ_k — переменные, имеющие порядок единицы; ξ_k — одна из переменных ξ_1, ξ_2. Это замечание будет учтено при выборе и растяжении переменных в процессе вывода уравнений для двумерных или трехмерных возмущений.

Для изучения течения в областях нерегулярности разложений (1.3), (1.4) необходимо ввести новые разложения

$$\Phi = x + \gamma\psi_1(s_k, \theta_k) + \gamma^2\psi_2(s_k, \theta_k) + \ldots \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в (1.1), нетрудно получить уравнения для ψ_1 и общие решения этих уравнений и, сращивая ψ_1 с помощью метода сращиваемых асимптотических разложений [2, 3] с линейным решением $\Phi = \alpha_1(x) + \beta_1(\nu)$, построить равномерно пригодное решение. Характерный вид уравнений для ψ_1 дает, например, уравнение, полученное при $\xi_1 = x = \gamma^{-1}s$, $\theta_1 = \nu = 2t - x$

$$-\psi_{1s\nu} = (\varkappa + 1)\psi_{1\nu}\psi_{1\nu\nu}$$

2. Исходя из результатов для одномерных течений, получим для двумерных или трехмерных возмущений такие нелинейные уравнения, решения которых для одномерного случая можно было бы срастить с решением уравнения (1.2) при $\Phi_1 = \Phi_1(x, t)$. Очевидно, одним из таких уравнений, на основании изложенного выше, является уравнение состоящее в одномерном случае из членов $\psi_{\xi\eta}$, $\psi_\xi\psi_{\xi\xi}$ (учитывая замечание о виде переменных для одномерных разложений, введем здесь $\xi = dx + bt$, $\eta = kx +$

$+\ nt$), и наряду с ними содержащее члены с производными по y, z. Это требование приводит в общем случае к следующему разложению:

$$\Phi = x + \delta \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(\xi^\circ, \eta^\circ, y^\circ, z^\circ)\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^k, \quad \xi = \varepsilon\xi^\circ, \quad \eta = \varepsilon^2\delta^{-1}\eta^\circ \tag{2.1}$$

$$y = \varepsilon^{3/2}\delta^{-1/2}y^\circ, \quad z = \varepsilon^{3/2}\delta^{-1/2}, z^\circ, \quad \delta/\varepsilon \ll 1$$

Здесь δ, ε — некоторые постоянные положительные параметры, в зависимости от порядка значений которых будем получать различные области течения; ξ°, η°, y°, z° — новые переменные порядка единицы. Подставляя (2.1) в (1.1) и исходя из условия нетривиальности уравнения для ψ_0, находим, что $b = -2d$ или $b = 0$. Для ψ_0 имеем уравнение (верхний индекс $^\circ$ у переменных опустим и переобозначим здесь и далее $\psi_0 = \psi$)

$$2(bn + dn + bk)\psi_{\xi\eta} + (\varkappa + 1)d^2(b + d)\psi_\xi\psi_{\xi\xi} = \psi_{yy} + \psi_{zz} \tag{2.2}$$

Задавая уравнение звуковой поверхности ($a^2 = V^2$) в виде

$$\xi = \varepsilon \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(\eta^\circ, y^\circ, z^\circ)\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^k, \quad \xi^\circ = \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k(\eta^\circ, y^\circ, z^\circ) \tag{2.3}$$

в первом приближении для определения функции $\xi^\circ = \xi_0(\eta^\circ, y^\circ, z^\circ)$ получим уравнение $\psi_\xi(\xi_0, \eta, y, z) = 0$.

Получим приближенные условия на ударной волне. Условия для нормальных и касательных составляющих скорости при переходе через фронт волны имеют вид

$$(U - V_n)(U - V_n^*) = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa + 1}(U - V_n^*)^2 + \frac{2}{\varkappa + 1}a^{*2}, \quad V_\tau = V_\tau^* \tag{2.4}$$

Здесь U — скорость ударной волны по нормали к фронту волны, V_n, V_τ — нормальная и касательная к фронту волны составляющие скорости газа; звездочка сверху соответствует течению перед ударной волной. Скорость звука a^* определяется по второй формуле (1.1) при $\Phi = \Phi^*$. Задавая ударную волну в виде (2.3) и подставляя (2.1), (2.3) в (2.4), в первом приближении при $\xi^\circ = \xi_0(\eta^\circ, y^\circ, z^\circ)$ получим (верхний индекс $^\circ$ опускаем)

$$2(bn + dn + bk)\frac{\partial\xi_0}{\partial\eta} + \left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi_0}{\partial z}\right)^2 = \frac{d^2}{2}(b + d)(\varkappa + 1) \times \tag{2.5}$$

$$\times (\psi_\xi + \psi_\xi^*), \quad \psi = \psi^*$$

Значения функций ψ, ψ^* и их производных в (2.5) берутся при $\xi = \xi_0$. Если $\psi^* \equiv \psi$, то (2.5) — уравнение характеристик для (2.2).

Обсудим вопрос о выборе постоянных k, n ($\eta = kx + nt$). Для этого определим форму фронта возмущения, возникающего в точке $x = y = 0$ при $t = 0$ в однородном околозвуковом потоке $\psi^* = \omega\xi$. Рассмотрим для простоты плоское течение. Подставляя $\psi^* = \psi = \omega\xi$ в (2.5), находим решение полученного уравнения

$$\xi = A\eta + By^2\eta^{-1}, \quad A = \frac{(\varkappa + 1)d^2(b + d)\omega}{2(bn + dn + bk)} \tag{2.6}$$

$$2B = bn + dn + bk \neq 0$$

Переходя к физическим переменным x, y, t, (2.6) запишем в виде

$$(dk - rk^2)x^2 + (dn + bk - 2rkn)xt + (bn - rn^2)t^2 = By^2 \qquad (2.7)$$
$$r = \frac{\varepsilon}{\delta} A$$

Положим сначала в (2.7) $d = n = 1$, $b = k = 0$. Именно для таких переменных рассматривалось до сих пор нелинейное околозвуковое уравнение [1]. Тогда получаем известный факт [1], что распространение возмущения описывается параболой

$$x = f(y, t) = \frac{\omega}{2}(\varkappa + 1)\frac{\delta}{\varepsilon}t + \frac{1}{2}y^2t^{-1}$$

т. е. возмущение распространяется вниз по течению с бесконечной скоростью. Для этих переменных, кроме того, $t = \mathrm{const}$ — характеристика для (2.2) [1]. Эти два факта — большой недостаток уравнений (2.2), (2.5), записанных в переменных x, y, z, t. Нетрудно показать, что в этом случае функция $x = f(y, t)$ — первый член разложения по малому параметру δ / ε функции, определяющей точную границу возмущения, которая является окружностью.

Потребуем, чтобы кривая (2.7) была окружностью при $\omega = 0$. Такое требование естественно, так как при $\omega = 0$ или $\delta / \varepsilon = 0$ получаем, согласно (2.1), точное решение точного уравнения (1.1) $\Phi = x$. Это требование приводит к условию $n = -2k$, если $b = 0$, и к условию $n = 0$, если $b = -2d$. Тогда уравнение линии возмущения, возникшего в точке $x = y = 0$ при $t = 0$, имеет вид $(x - t)^2 + y^2 = t^2$. Это расширяющаяся окружность, которая сносится вниз по течению звуковым потоком.

Если в (2.7) $\omega \neq 0$, то получаем эллипс, слабо (на величину порядка δ / ε) отличающийся от этой окружности. Если течение пространственное, то границей возмущения служит поверхность $\xi = A\eta + B\eta^{-1}(y^2 + z^2)$. Если $\omega = 0$, то это сфера $(x - t)^2 + y^2 + z^2 = t^2$. Таким образом, необходимо положить в (2.1) $\xi = dx$, $\eta = k(x - 2t)$ или $\eta = kx$, $\xi = d(x - 2t)$. Характеристикой теперь является не $t = \mathrm{const}$, а $x = \mathrm{const}$ или $x - 2t = \mathrm{const}$. Заметим, что в одномерной нелинейной теории оба указанных дефекта отсутствуют, и поэтому можно пользоваться любыми переменными.

Предположим, что коэффициенты $C = (\varkappa + 1)d^2(b + d)$, $2B = bn + dn + bk$ в уравнении (2.2) не обращаются в нуль, и перейдем в (2.2), (2.5) к новым переменным $\theta = \eta / (2B)$, $\Psi = C\psi$, $\Psi^* = C\psi^*$. Тогда решение, описывающее течение в области возмущения (удовлетворяющее условиям непрерывности составляющих скорости при переходе через границу возмущения), можно записать в виде

$$\Psi = \frac{\Omega}{2}\xi + \frac{\xi^2}{2\theta} - \frac{y^2\xi}{2\theta^2} + \frac{\Omega}{4}\frac{y^2}{\theta} + \frac{y^4}{8\theta^3}, \quad \Omega = C\omega$$

В заключение получим приближенные условия на непроницаемой поверхности. Задавая ее в виде

$$(2.8)\qquad y = y_0 + \delta^{3/2}\varepsilon^{-1/2}\sum_{k=0}^{\infty} f_k(\xi^\circ, \eta^\circ, z^\circ)\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^k, \quad y^\circ = y_0^\circ + \left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right)^k f_k$$

где $y_0 = \mathrm{const}$, и подставляя (2.1), (2.8), в точное условие непротекания

$$\Phi_y - \Phi_x\frac{\partial y}{\partial x} - \Phi_z\frac{\partial y}{\partial z} = \frac{\partial y}{\partial t}$$

в первом приближении находим (верхний индекс опускаем)

$$(2.9)\qquad (b + d)\partial f_0(\xi, \eta, z) / \partial\xi = \psi_y(y_0, \xi, \eta, z),\ b \neq -d$$

Аналогичные результаты справедливы и для малых возмущений в покоящемся газе. Отыскивая решение уравнений (1.1), (2.4), записанных в безразмерных переменных (при этом вместо P_*, ρ_*, a_* берем значения параметров в покоящемся газе P_0, ρ_0, $a_0 = \sqrt{(\varkappa + 1) / 2a_*}$) в виде (2.1), (2.3), отбросив в (2.1) в выражении для Φ слагаемое x, в первом приближении получим

$$(2.10)\qquad b = \pm d,\ \ 2(bn - dk)\psi_{\xi\eta} + (\varkappa + 1)bd^2\psi_\xi\psi_{\xi\xi} = \psi_{yy} + \psi_{zz}$$

$$2(bn - dk)\frac{\partial\xi_0}{\partial\eta} + \left(\frac{\partial\xi_0}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi_0}{\partial z}\right)^2 = \frac{\varkappa+1}{2}bd^2(\psi_\xi + \psi_\xi^*), \quad \psi = \psi^*$$

Значения функций в условиях на ударном фронте берутся при $\xi = \xi_0$. Условие непротекания на поверхности (2.8): $b\partial f_0 / \partial\xi = \psi_y$ при $y = y_0$ ($b \neq 0$). Требуя, чтобы фронт возмущения, возникшего в покоящемся газе ($\psi_\xi = \psi_\xi^* = 0$), имел вид окружности $x^2 + y^2 = t^2$ (или сферы $x^2 + y^2 + z^2 = t^2$), находим $n = \mp k$, т. е. $\xi = d(x \pm t)$, $\eta = k(x \mp t)$.

Таким образом, при выводе нелинейных уравнений для малых двумерных или трехмерных неустановившихся возмущений звукового потока или покоящегося газа необходимо использовать характеристические переменные соответствующих линейных уравнений для одномерных течений. Уравнения, записанные в других переменных, очевидно, тоже можно применять, однако их нужно уметь правильно интерпретировать. В частности, их можно использовать для описания течений, для которых нестационарность проявляется лишь во втором приближении. Заметим, что все решения околозвукового уравнения для переменных x, t [1] можно переписать для уравнений (2.2), (2.10), предварительно приведя их к виду [1]. То же самое относится к преобразованиям, не изменяющим вида околозвукового уравнения (например [4]), которые, заметим, не изменяют также вида условий на ударном фронте (или на характеристике). Наконец, для этих уравнений можно просто сформулировать теорему единственности, аналогичную теореме [4].

Поступила 2 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рыжов О. С.* Исследование трансзвуковых течений в соплах Лаваля. М., Изд-во. ВЦ АН СССР, 1965.
2. *Коул Дж.* Методы возмущений в прикладной механике. М., «Мир», 1972.
3. *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкостей. М., «Мир», 1967.
4. *Мамонтов Е. В.* К теории нестационарных околозвуковых течений. Докл. АН СССР, 1969, т. 185, № 3.