

О ДВУМЕРНЫХ ЭЛЕКТРОГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЯХ С УЧЕТОМ ИНЕРЦИИ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

А. Б. Ватажин, В. И. Грабовский

(Москва)

Исследуются электрогазодинамические течения в безынерционном приближении и течения с учетом сил инерции. Определяются условия, при которых существенны инерционные эффекты. Построены простейшие аналитические решения системы уравнений электрогазодинамики, описывающие движение заряженных частиц в однородном внешнем электрическом поле при наличии тангенциального разрыва газодинамической скорости на границе полупространства. Продемонстрирована возможность образования обратных токов — возвращения частиц на эмиттер. Полученные результаты сопоставляются с данными, соответствующими безынерционному приближению. Разработан численный метод решения полной системы уравнений электрогазодинамики, учитывающей инерцию частиц. Предложенным методом исследовано расширение электрогазодинамических струй в каналах. Представлены результаты численных расчетов при разных значениях определяющих параметров. Выделено влияние инерционных эффектов.

Во многих приложениях (электронно-ионная технология, электрически заряженные реактивные струи, авиационных двигателей) твердые или жидкие частицы в газодинамическом потоке оказываются электрически заряженными, и необходимо изучать двухфазные электрогазодинамические течения. Общие уравнения, описывающие электрогазодинамическое течение смеси, состоящей из нейтрального газа, частиц и ионов, были даны в работе [1].

В случае, когда инерция заряженных частиц невелика, изучение двухфазных течений может проводиться на основе методов, разработанных для решения уравнений электрогазодинамики с законом Ома, записанным в безынерционном приближении [2-4]. Исследование таких двумерных течений позволило выявить ряд интересных качественных закономерностей (расширение электрических струй, обратные токи и т. д.) [3, 4]. При учете инерции заряженных частиц изучение пространственных (в простейшем случае — двумерных) течений значительно усложняется, и работы в этом направлении практически отсутствуют. Ниже представлены некоторые результаты исследования двумерных электрогазодинамических течений с учетом инерции заряженных частиц.

1. Общие уравнения для течения смеси нейтрального газа, заряженных частиц и ионов (фазы 1—3) имеют сложный вид [1]. Однако применительно к конкретным приложениям система уравнений может быть упрощена. В дальнейшем будет предполагаться, что фазовые переходы (газ 1 — жидкие частицы 2) отсутствуют, вектор потока тепла равен нулю (обмен теплотой между фазами при этом может иметь место), разность химических потенциалов фаз незначительна, все частицы имеют одинаковый размер и одинаковый заряд.

Уравнения импульсов и неразрывности для фаз 2 и 3 и уравнения Максвелла имеют следующий вид:

$$(1.1) \quad \begin{aligned} dV_2 / dt &= k (V_1 - V_2) / \rho_2 + q_2 E / \rho_2 + A, \quad A = -\nabla p / \rho_2^\circ \\ j_3 &= q_3 V_3 = q_3 (V_1 + b_3 E) \\ \partial \rho_2 / \partial t + \operatorname{div} (\rho_2 V_2) &= 0, \quad \rho_2 = m_2 n_2 \\ \partial q_3 / \partial t + \operatorname{div} (q_3 V_3) &= 0 \\ \operatorname{rot} E &= 0, \quad \operatorname{div} E = \frac{4\pi}{\epsilon} (q_3 + Zen_2) \end{aligned}$$

$$(1.2) \quad \begin{aligned} k &= 1/2 \rho_1^\circ \pi a^2 n_2 v_{12} c_f (R), \quad R = 2\rho_1^\circ v_{12} a / \mu_1, \quad v_{12} = |V_1 - V_2| \\ (k &= 6\pi a \mu_1 n_2 \text{ при } R \ll 1) \end{aligned}$$

Здесь V_i и ρ_i — скорость и плотность фазы ($i = 1, 2, 3$), m_i и n_i — масса одной частицы и концентрация частиц фазы i , q_3 — объемный электрический заряд фазы 3, $q_2 = Zen_2$ — объемный электрический заряд частиц (e — заряд электрона, Z — число единичных зарядов на частице), ρ_2° — плотность вещества частиц, b_3 — подвижность ионов, p — газодинамическое давление, E — электрическое поле, ϵ — диэлектрическая постоянная среды. Формулы (1.2) представляют собой закон сопротивления частиц, движущихся относительно газа 1. В этих соотношениях ρ_1° — истинная плотность газа, μ_1 — коэффициент динамической вязкости газа, $c_f = c_f(R)$ — коэффициент сопротивления, R — число Рейнольдса.

Полная система уравнений, помимо соотношений (1.1), (1.2), включает уравнение импульсов для нейтрального газа 1, уравнения энергии для всех трех фаз и термодинамические связи между параметрами. При записи первого и второго уравнений (1.1) предполагалось, что на частицы и ионы действуют силы трения только со стороны нейтрального газа 1.

Введем следующие безразмерные параметры, характеризующие течение такой смеси (L и v_* — характерные длина и относительная скорость между фазами 1 и 2):

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \delta &= \rho_2 / \rho_2^\circ = m_2 n_2 / \rho_2^\circ, \quad N_2 = \rho_2 / \rho_1 \\ N_3 &= q_3 E L / (\rho_1 v_1^2), \quad N_4 = q_2 E / (k v_*) \\ \tau &= \tau_p / T (\tau_p = \rho_2 / k, \quad T = L / v_*) \end{aligned}$$

Величина δ характеризует относительный объем, занимаемый частицами (объем, занимаемый ионами 3, предполагается несущественным). Если $\delta \ll 1$, то объемом частиц можно пренебречь (тогда $\rho_1 = \rho_1^\circ$), и величина A в первом уравнении (1.1) оказывается малой по сравнению с другими членами.

Параметр N_2 характеризует отношение сил трения, действующих на газ 1 со стороны частиц, к силам инерции для газа 1 (при условии, что $|(\mathbf{V}_1 \nabla) \mathbf{V}_1| \sim |(\mathbf{V}_2 \nabla) \mathbf{V}_2|$). Если мал параметр N_2 , то влиянием частиц на движение нейтрального газа можно пренебречь. Если при этом также мал параметр электрогазодинамического взаимодействия N_3 , равный отношению силы трения, действующей на газ 1 со стороны ионов 3,

к инерционным членам, то течение газа определяется обычными уравнениями газовой динамики, и поле газодинамической скорости при нахождении параметров для фаз 2 и 3 должно рассматривать как известно.

Параметр τ является отношением релаксационного времени τ_p (времени, за которое выравниваются скорости частиц 2 и газа 1) к характерному времени T задачи. Если $\tau \ll 1$, то инерцией частиц можно пренебречь. При $\tau \gg 1$ скорость частиц в результате трения о газ не изменяется (замороженное течение).

Наконец, величина N_4 характеризует отношение электростатических сил к силам трения в уравнении движения частиц (1.1).

Рассмотрим течение смеси при следующих значениях параметров:

$$(1.4) \quad \begin{aligned} a &= 10^{-3} \text{ см}, \quad L = 10 \text{ см}, \quad \mu_1 = 1.78 \cdot 10^{-4} \text{ г / (см} \cdot \text{сек)} \\ v_* &= 10^4 \text{ см / сек}, \quad v_1 \approx v_*, \quad n_2 \sim 10^4 \text{ см}^{-3}, \quad n_3 \approx 10^9 \text{ см}^{-3} \\ \rho_1^\circ &= 1.225 \cdot 10^{-3} \text{ г / см}^3, \quad \rho_2^\circ = 1 \text{ г / см}^3, \quad E \sim 10^4 \text{ в / см} \end{aligned}$$

Условия (1.4) соответствуют течению смеси нейтрального газа, жидких частиц радиуса 10 мк и ионов через электрическое поле, например, в зоне коронного разряда. Такие условия создаются в экспериментах на электрогазодинамических установках.

Для определения параметров (1.3) необходимо оценить электрический заряд, сосредоточенный на жидкой капле. Принимая, что зарядка капля обусловлена высасыванием ионов на ее поверхности вследствие возникновения поля поляризации, для предельного заряда капли получаем оценку (формула Потенье [5])

$$(1.5) \quad eZ_{\max} = 3\epsilon E a^2$$

Считая, что ионы несут заряд e , имеем

$$(1.6) \quad q_3 = en_3$$

Используя (1.3)–(1.6), находим (величина τ определяется в стоксовом приближении)

$$(1.7) \quad \begin{aligned} Z &= 2.62 \cdot 10^6, \quad q_2 = 1 \text{ ед. CGSE / см}^3 \\ q_3 &= 0.48 \text{ ед. CGSE / см}^3, \quad \delta = 4.18 \cdot 10^{-5}, \quad \tau = 1.25 \\ N_2 &= 3.42 \cdot 10^{-2}, \quad N_3 = 1.31 \cdot 10^{-3}, \quad N_4 = 0.1 \end{aligned}$$

Оценки параметров показывают, что $\rho_1 \approx \rho_1^\circ$, величиной A в первом уравнении (1.1) можно пренебречь, инерция заряженных частиц существенна, а распределение газодинамических параметров должно находиться из обычных газодинамических уравнений. Последнее обстоятельство позволяет считать известными величины V_1 , $\rho_1 = \rho_1^\circ$, μ_1 , b_3 . Система уравнений (1.1), (1.2) оказывается замкнутой: ее решение позволяет определить величины V_2 , q_2 , q_3 и E .

Стационарные электрогазодинамические уравнения при условиях (1.7) имеют следующий вид (ϕ — электрический потенциал):

$$(1.8) \quad \begin{aligned} (V_2 \nabla) V_2 &= K (V_1 - V_2) + \kappa E; \quad \kappa = Ze / m_2; \quad a, m_2, Z = \text{const} \\ K &= \frac{1}{2} \rho_1^\circ \pi a^2 v_{12} c_f (R) / m_2 \quad (K = 6\pi a \mu_1 / m_2 \quad \text{при } R \ll 1) \\ \text{div } q_2 V_2 &= 0, \quad \text{div } q_3 (V_1 + b_3 E) = 0 \\ \text{div } E &= 4\pi (q_2 + q_3) / \epsilon, \quad E = -\nabla \phi \end{aligned}$$

В случае, когда ионы в потоке отсутствуют, система уравнений, описывающая движение нейтрального газа и заряженных частиц, преобразуется к виду

$$(1.9) \quad (\mathbf{V}_2 \nabla) \mathbf{V}_2 = K (\mathbf{V}_1 - \mathbf{V}_2) + \kappa \mathbf{E}, \quad \operatorname{div} q_2 \mathbf{V}_2 = 0, \quad \Delta \varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} q_2$$

Система (1.9) состоит из уравнения эллиптического типа относительно электрического потенциала и уравнений гиперболического типа относительно скорости \mathbf{V}_2 и заряда q_2 . Характеристиками являются траектории заряженных частиц.

Для анализа систем (1.8) и (1.9) необходимо задать следующие граничные условия:

$$(1.10) \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{20}, \quad q_2 = q_{20}, \quad q_3 = q_{30}, \quad \varphi = \varphi_0 \text{ на } \Gamma^\circ, \quad \varphi = \varphi_+ \text{ на } \Gamma^\infty$$

Здесь Γ° — поверхность (линия), на которой фиксируются распределения параметров на входе в исследуемую зону течения. На поверхности Γ^∞ задается только электрический потенциал: распределения \mathbf{V}_2 , q_2 и q_3 на Γ^∞ находятся в результате решения задачи (поток газа направлен к Γ^∞). Вместо задания потенциалов на поверхностях Γ° и Γ^∞ можно сформулировать условия, представляющие собой комбинации потенциала φ и его производных. Однако на каждой поверхности необходимо исследовать только одно такое соотношение. К системе соотношений (1.10) необходимо добавить условие на бесконечности (если только Γ° и Γ^∞ в совокупности не составляют замкнутую поверхность).

Ниже представлены некоторые решения системы (1.9), (1.10) в стоксовом приближении для силы сопротивления частиц.

2. Образование обратных токов. Пусть распределение газодинамической скорости имеет следующий вид (см. фиг. 1):

$$(2.1) \quad \mathbf{V}_1 = (U = \text{const}, 0, 0), \quad y \leq 0; \quad \mathbf{V}_1 \equiv 0, \quad y > 0$$

На линии $x = 0$, $y \leq 0$ в поток вводятся положительно заряженные частицы, обладающие скоростью

$$(2.2) \quad \mathbf{V}_2 = \mathbf{V}_{20} = (Uu_0, Uv_0, 0)$$

Течение происходит во внешнем электрическом поле

$$(2.3) \quad \mathbf{E} = (E_* E_x, E_* E_y, 0), \quad E_* = \text{const} \\ E_x = \text{const} < 0, \quad E_y = \text{const} > 0$$

Будем предполагать, что собственные электрические поля, обусловленные введением в поток заряженных частиц, намного меньше приложенных полей. В этом случае распределение скорости $\mathbf{V}_2 = (Uu, Uv, 0)$ в области $x > 0$ описывается следующими уравнениями:

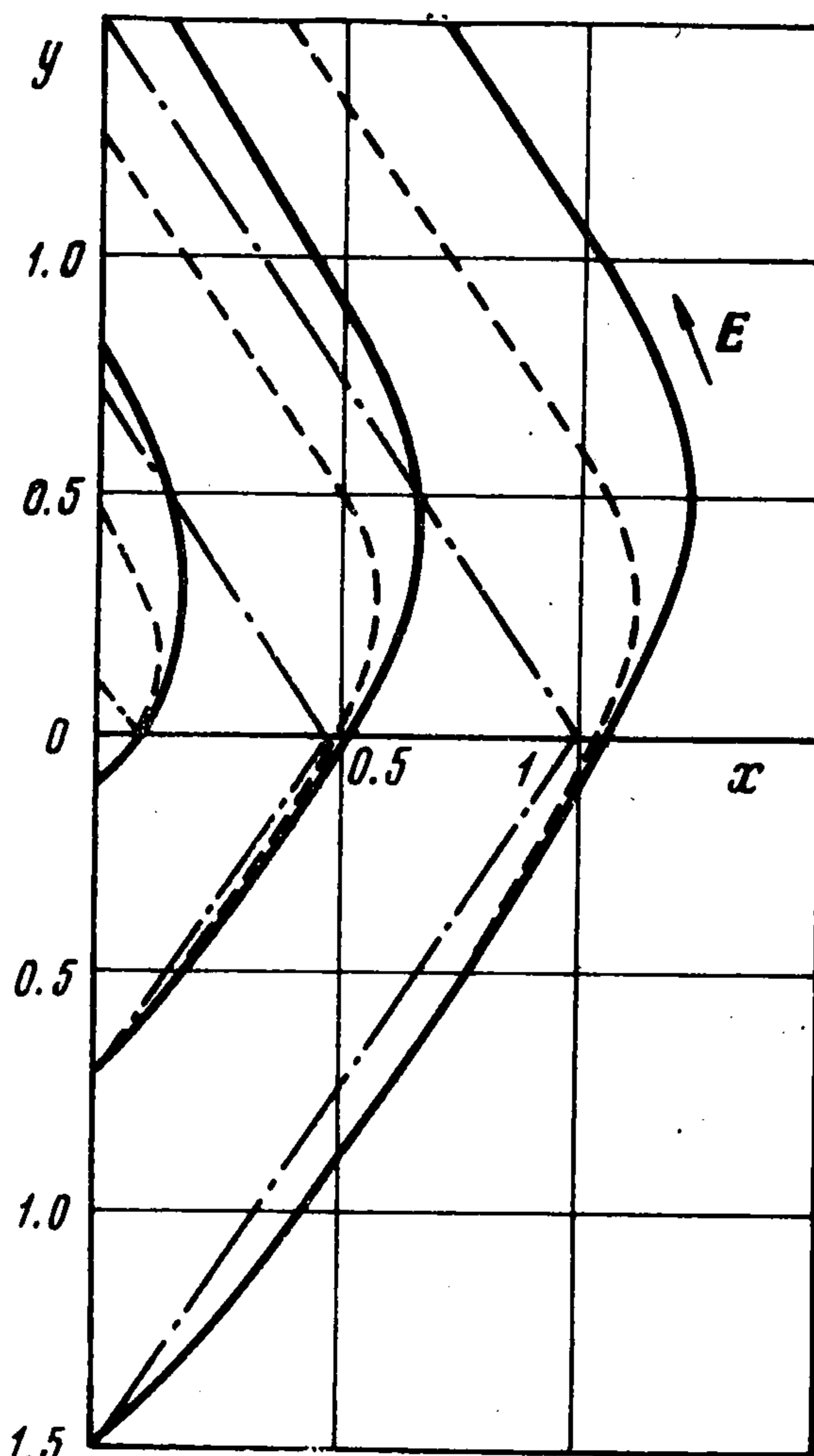
$$(2.4) \quad \tau du / dt = u_\infty - u, \quad \tau dv / dt = v_\infty - v \\ \tau = U / (LK), \quad N_4 = E_* Ze / (m_2 UK) \\ u_\infty = \begin{cases} 1 + u'_\infty, & y < 0 \\ u'_\infty, & y > 0 \end{cases} \quad (u'_\infty = N_4 E_x, \quad v_\infty = N_4 E_y)$$

Здесь время t и координаты x , y отнесены к величинам L/U и L соответственно, где L — характерный размер области течения.

Величина K соответствует закону сопротивления Стокса. Задача характеризуется пятью параметрами: τ , u_0 , v_0 , u_∞' и v_∞ . Интегрирование системы (2.4) проводится в квадратурах.

На фиг. 1, 2 представлены траектории заряженных частиц (разные τ : сплошные, пунктирные и штрихпунктирные линии соответствуют $\tau = 1$, 0.5, 0 и $u_0 = v_0 = 0.25$). Наличие тормозящего продольного электрического поля вызывает искривление траекторий в области $y > 0$, где отсутствует газодинамическая скорость, и возвращение их на плоскость $x = 0$. В том случае, когда поперечное электрическое поле равно нулю (фиг. 2), заряженные частицы могут попасть на плоскость $y = 0$ только из-за наличия начальной поперечной скорости ($v_0 > 0$). При этом имеются траектории 1 и 2 (для $\tau = 0,5$ и $\tau = 1$ соответственно), разделяющие частицы, которые никогда не подходят к границе $y = 0$, и частицы, достигающие границы и затем возвращающиеся на плоскость $x = 0$ вследствие действия поля $E_x < 0$.

Параметр τ характеризует инерцию заряженных частиц. При $\tau = 0$ траектории частиц — прямые линии, и начальные условия оказываются несущественными.



Фиг. 1

3. Течение в плоском канале с проводящими стенками. Рассмотрим стационарное движение заряженных частиц в полубесконечном пространстве между двумя параллельными и заземленными стенками $y = \pm L/2$, $x > 0$. Однородный поток газа, распространяющийся в этой области, характеризуется скоростью $V_1 = (U = \text{const}, 0, 0)$.

На линии $x = 0$, $|y| \leq h^0/2$, $h^0 < L$, являющейся сеткой-электродом и имеющей потенциал $\phi = 0$, в поток газа вводятся заряженные частицы. На этом участке электрода задаются постоянные плотность и начальная скорость заряженных частиц $q > 0$ и $V_2 = (Uu_0 = \text{const}, 0, 0)$.

Задача симметрична относительно оси $y = 0$, поэтому рассматривается лишь верхняя половина канала $y \geq 0$.

В отличие от задачи, изученной в п. 2, на частицы действуют собственные (индуцированные) электрические поля.

Таким образом, система уравнений (1.9), (1.10) для определения скорости частиц, объемного электрического заряда, а также электрических полей имеет следующий вид:

$$(3.1) \quad \tau \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 1 - u - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \tau \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -v - \frac{\partial \phi}{\partial y}$$

$$(3.2) \quad u \frac{\partial q}{\partial x} + v \frac{\partial q}{\partial y} = -q \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \Delta \varphi = -q$$

$$\tau = m_2 U / (6\pi a L \mu_1)$$

Система уравнений (3.1), (3.2) записана в безразмерной форме; за характерные величины (отмеченные звездочкой) приняты следующие:

$$(3.3) \quad x_* = y_* = L, \quad v_* = U, \quad \varphi_* = UL / b_*, \quad E_* = U / b_*$$

$$q_* = \frac{\varepsilon U}{4\pi L b_*}, \quad b_* = \kappa m_2 / (6\pi a \mu_1)$$

Граничные условия для системы уравнений (3.1), (3.2) следующие:

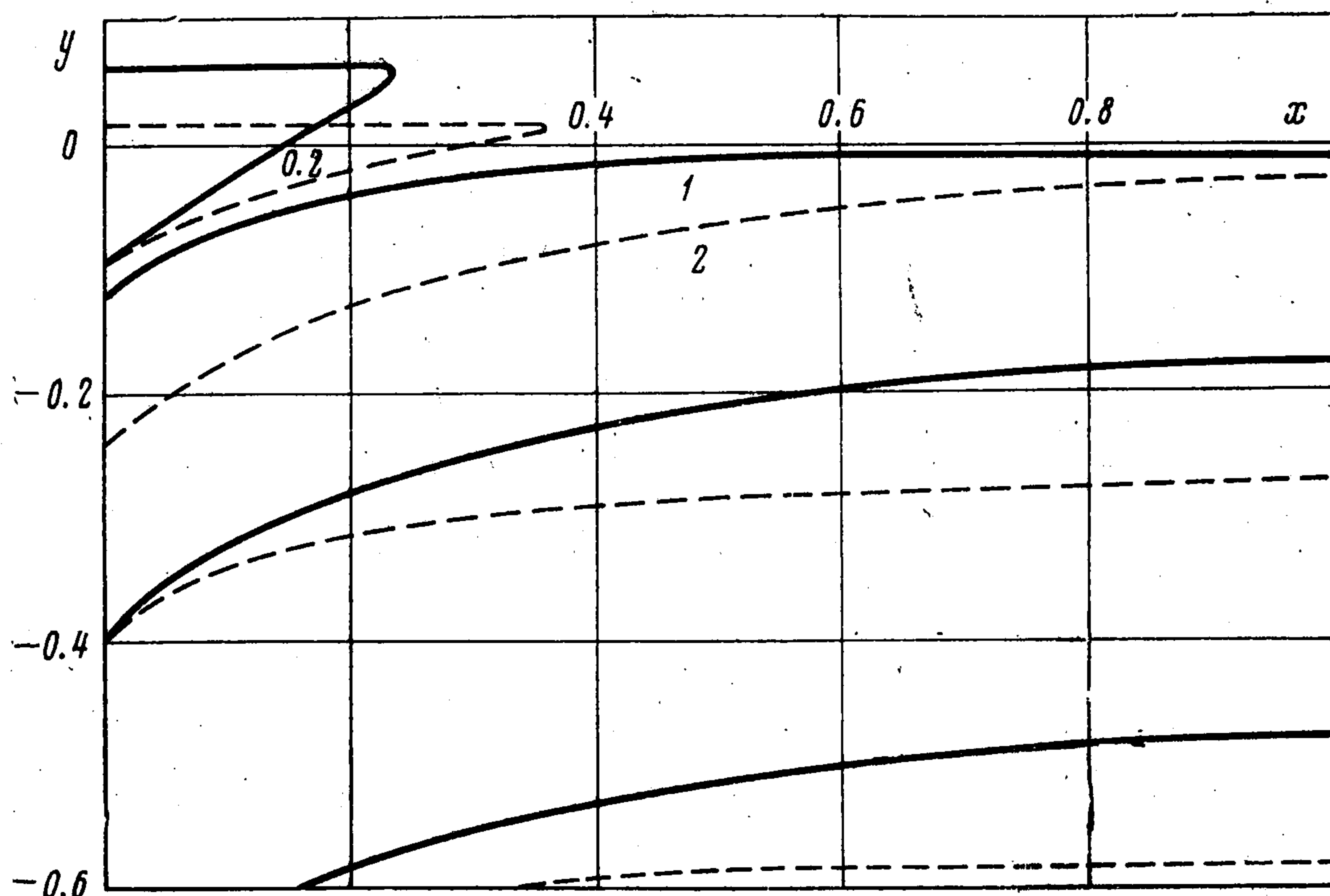
$$(3.4) \quad y = 1/2, \quad x \geq 0: \varphi = 0; \quad x = 0: \varphi = 0; \quad x \rightarrow \infty: \varphi \rightarrow 0$$

$$y \leq h/2, \quad x = 0: q = \beta, \quad u = u_0, \quad v = 0$$

$$y = 0, \quad x \geq 0: \partial \varphi / \partial y = 0$$

Задача характеризуется четырьмя параметрами: τ , u_0 , $h = h^0 / L$ и $\beta = q_0 4\pi b_* L / (\varepsilon U)$.

Решение сформулированной задачи проводится численно с использованием метода последовательных приближений. Суть метода состоит в следующем. По распределению $q = q^{(k)}(x, y)$ в k -м приближении с помощью второго уравнения (3.2) определяется потенциал $\varphi = \varphi^{(k+1)}(x, y)$ в $(k+1)$ -м приближении. Из уравнений (3.1) находятся $u^{(k+1)}$, $v^{(k+1)}$ при использовании $\varphi^{(k+1)}$.



Фиг. 2

Наконец, из первого уравнения (3.2) определяется $q^{(k+1)}$. Если $|q^{(k)} - q^{(k+1)}| < \varepsilon_q$ во всех расчетных точках, решение считается найденным ($\varepsilon_q \ll 1$ задано).

Второе уравнение (3.2) решается методом последовательных смещений Зейделя с ускорением по формуле Л. А. Люстерника, при этом область интегрирования разбивается на прямоугольные ячейки. Уравнения (3.1) и первое уравнение (3.2) интегрируются методом характеристик; граница зоны, где имеется заряд, определяется методом прямых характеристик, а u , v и q во внутренних узлах расчетной сетки находятся с помощью «обратных» характеристик.

Характеристиками являются линии тока для зарядов

$$(3.5) \quad dy / dx = v / u$$

Соответствующие характеристические соотношения для u , v и q имеют вид

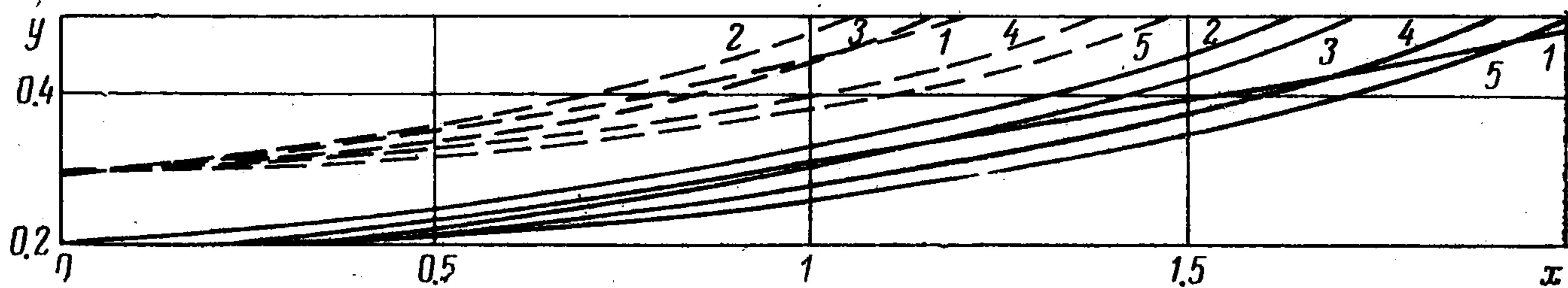
$$(3.6) \quad \begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{1}{\tau u} \left(1 - u - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right), & \frac{dv}{dx} &= \frac{1}{\tau u} \left(-v - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \frac{dq}{dx} &= -\frac{q}{u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Уравнения (3.5), (3.6) решаются на каждом этапе с помощью итерационного процесса. Отдельные обыкновенные дифференциальные уравнения интегрируются методом Эйлера с пересчетом.

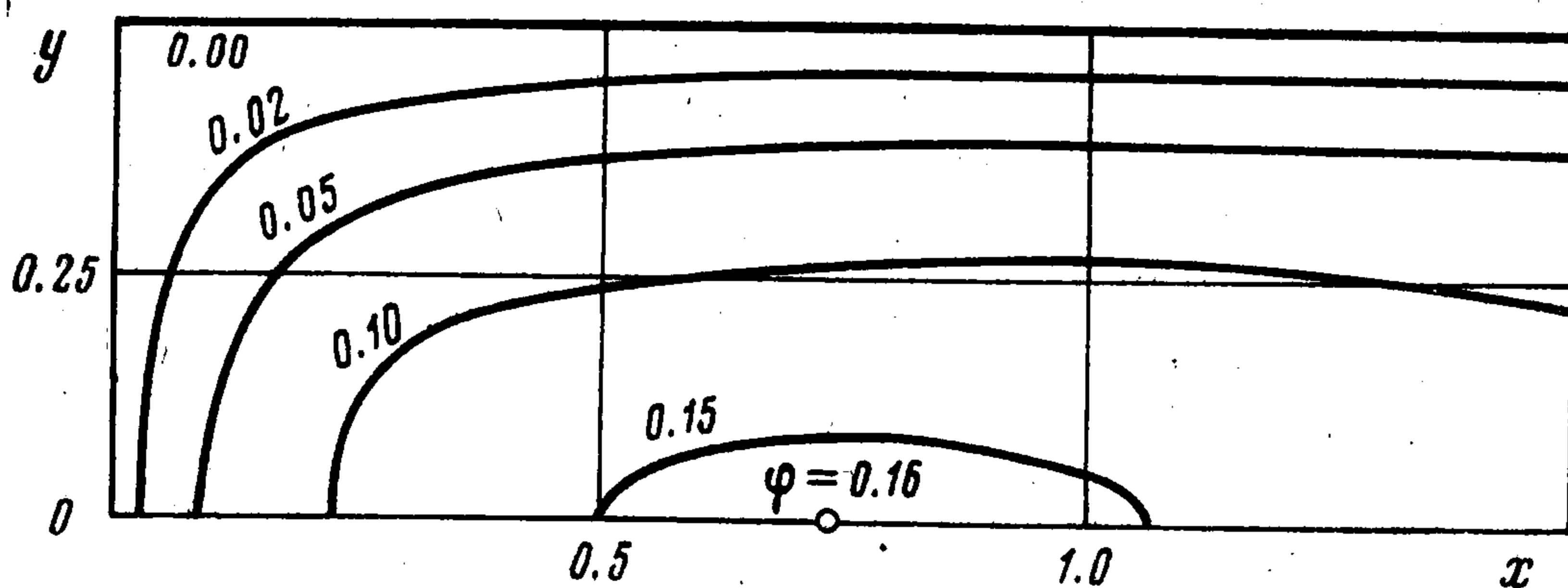
Ниже в качестве примера представлены результаты расчетов, соответствующих $h = 0.4$, $\tau = 1$, $\beta = 2$, $0.4 \leq u_0 \leq 1.8$.

На фиг. 3 показана граница $y = \Gamma(x)$ электрических струй, разделяющая область $y \leq \Gamma(x)$ с заряженными частицами, и область $y > \Gamma(x)$, где заряды отсутствуют, при $u_0 = 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 1.8$ (сплошные кривые 1, 2, 3, 4, 5). Пунктирные линии 1—5 относятся к случаю $h = 0.6$.

Электрические струи расширяются вниз по потоку вплоть до смыкания со стенкой канала. В дальнейшем частицы высаживаются из потока на стенку. Отклонение заряженных частиц к стенкам канала вызвано действием на них поперечных индуцированных полей. Если движущиеся



Фиг. 3



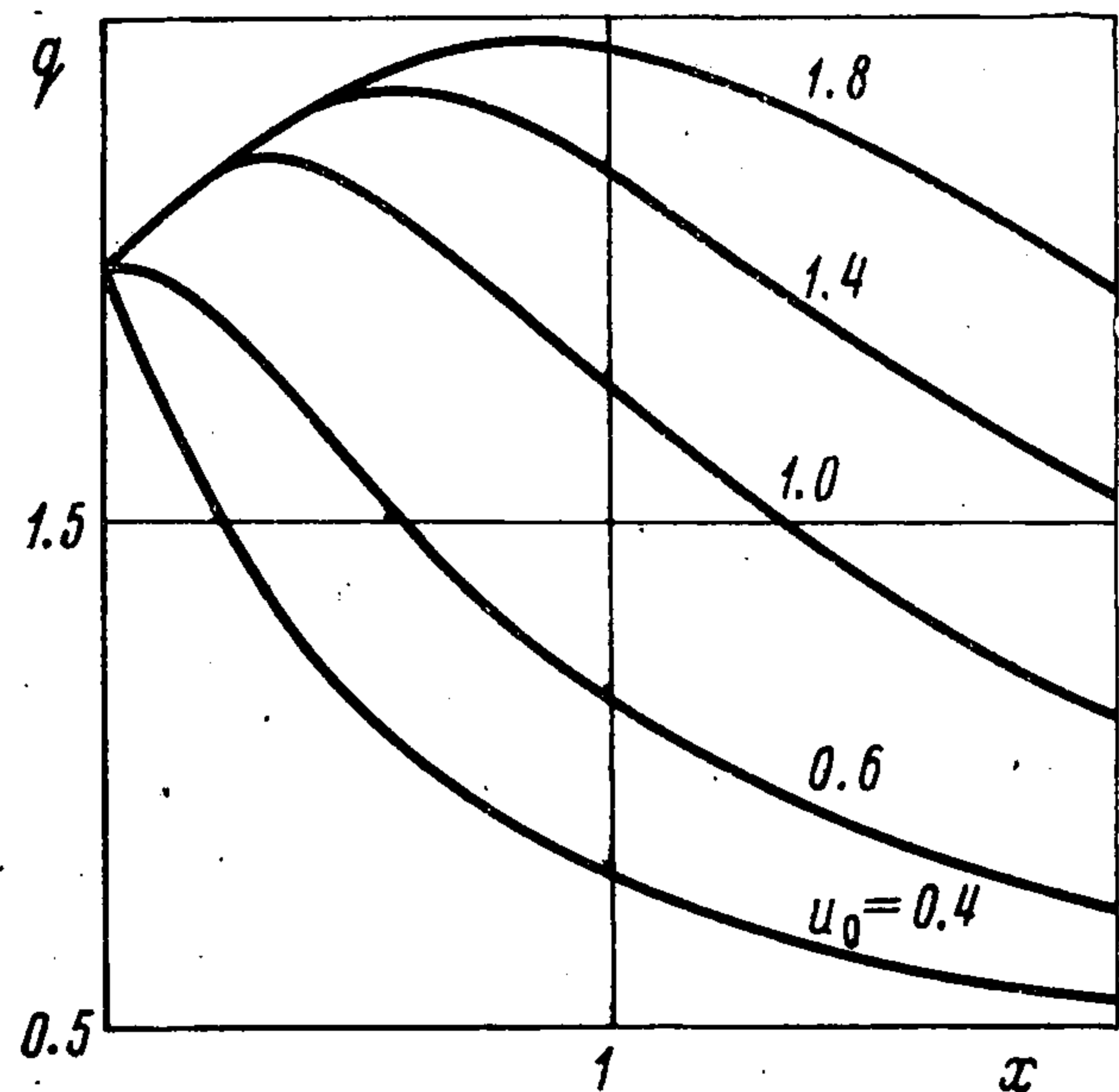
Фиг. 4

частицы — незаряженные, то течение одномерное и струя с частицами имеет постоянное сечение. Рост параметра β приводит к увеличению индуцированных электрических полей и соответственно к большему отклонению частиц к периферии потока.

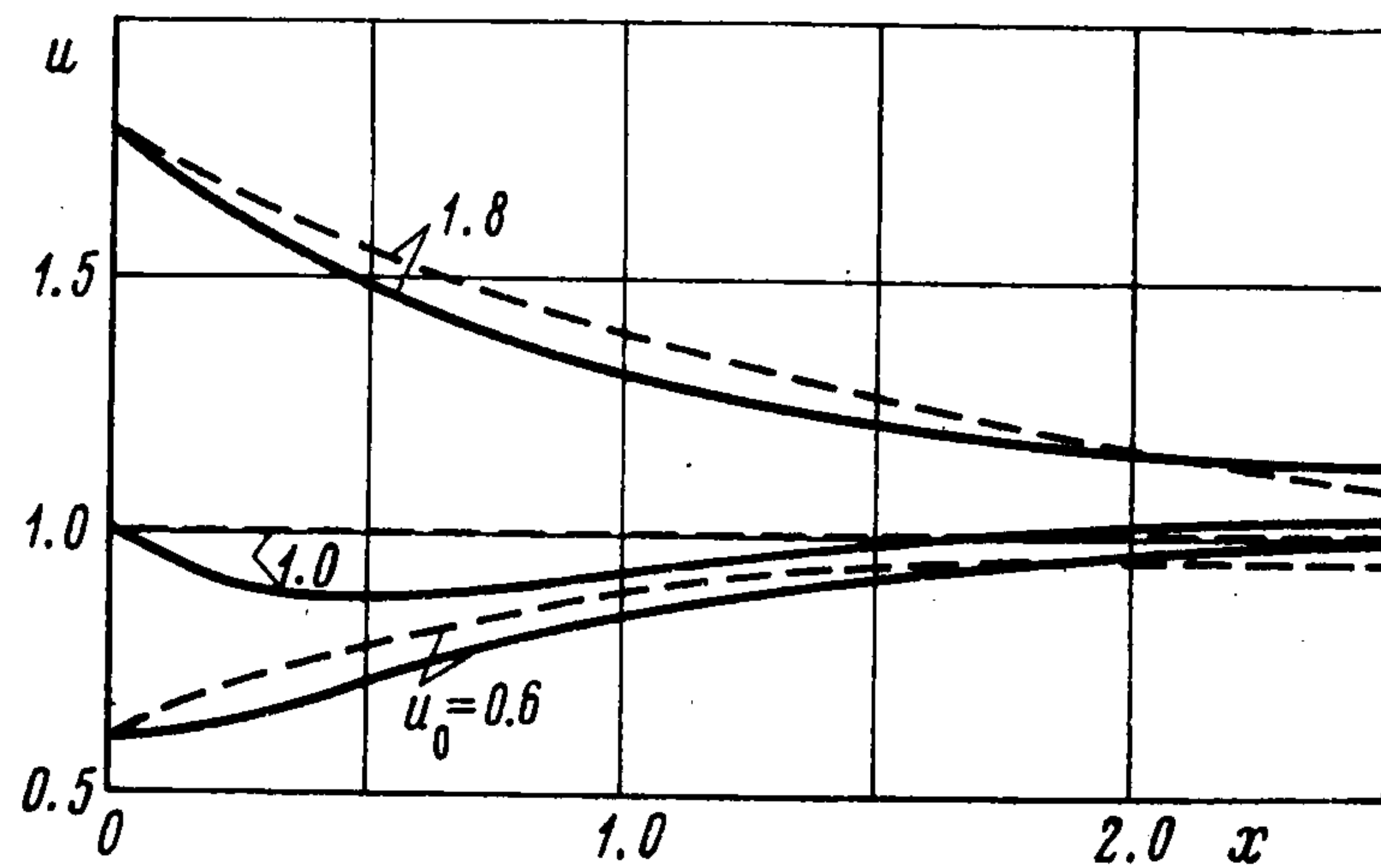
На фиг. 4 в плоскости течения изображены эквипотенциальные линии ($u_0 = 1$, $h = 0.4$), дающие представление о действии электрических сил на заряженные частицы. Точка с наибольшим значением φ расположена

на оси потока и на расстоянии порядка ширины канала от начального сечения.

Как видно из фиг. 3, первоначальный рост параметра u_0 приводит к более интенсивному расширению струи, так как растет выносимый в поток объемный заряд, а значит, и поперечное электрическое поле. Имеется некоторое u_0^* , такое, что при $u_0 > u_0^*$ электрическая струя сужается, т. е. на движение зарядов большее влияние начинает оказывать начальный продольный импульс.



Фиг. 5



Фиг. 6

На фиг. 5 показаны распределения $q(x)$ по оси потока для разных u_0 . Видно, что в общем случае функция $q(x)$ немонотонна. Зона уменьшения (увеличения) q на начальном участке соответствует ускорению (замедлению) частиц.

На фиг. 6 для тех же значений параметров нанесены распределения продольной скорости частиц по оси канала (сплошные линии). Для сравнения пунктирными линиями показаны аналогичные кривые для $\beta = 0$ (частицы не заряжены) с характерным асимптотическим стремлением величины u к значению скорости газа. При $\beta \neq 0$ скорость частицы изменяется немонотонно из-за действия продольного электрического поля (см. фиг. 4). На начальном участке оно оказывает тормозящее воздействие на частицу, а в дальнейшем — ускоряющее. Суммарный эффект зависит от соотношения сил трения и электрических сил.

В заключение отметим, что данная работа обобщает результаты работ [2-4], где рассматривался частный случай с $\tau = 0$, соответствующий пренебрежению инерцией заряженных частиц, что справедливо для легких частиц и ионов.

Учет инерции приводит к тому, что динамические характеристики газа частиц «запаздывают» в установлении к своим равновесным значениям. Это определяет особенности деформации электрической струи, показанные в данной работе.

Поступила 6 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Фарбер Н. Л. Уравнения электрогидродинамики многофазных сред. Об одномерных течениях, разрывных решениях и затухании слабых волн. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 5.
 2. Грабовский В. И. Некоторые вопросы исследования электрогидродинамических струй за срезом источника заряженных частиц. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 1.
 3. Ватажин А. Б., Грабовский В. И. Распространение униполярно заряженных струй в гидродинамических потоках. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
 4. Грабовский В. И. Плоское электрогидродинамическое течение с обратным током. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
 5. Верещагин В. П., Левитов В. И., Мерзабекян Г. З., Пашин М. М. Основы электрогазодинамики дисперсных систем. М., «Энергия», 1974.
-