Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.36

УСТОЙЧИВОСТЬ СТАЦИОНАРНЫХ ВРАЩЕНИЙ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ДВУМЯ УПРУГИМИ СТЕРЖНЯМИ

В. Н. Рубановский

(Москва)

На примере задачи об устойчивости стационарных вертикальных вращений тяжелого «камертона» с одной неподвижной точкой показано, что метод исследования устойчивости стационарных движений механических систем, опирающийся на решение задачи минимума измененной потенциальной энергии системы [1–6], одинаково применим для исследования как «тривиальных», так и «нетривиальных» стационарных движений, характеризуемых тем, что для них деформируемые элементы системы находятся соответственно в недеформированном и деформированном состояниях. Приведены два способа решения указанной задачи; получены и проанализированы достаточные условия устойчивости, которые налагают определенные ограничения снизу на жесткость стержней и ограничения сверху и снизу на величину угловой скорости исследуемого равномерного вращения системы.

В работе В. В. Румянцева [1] дана общая постановка задачи о движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость. Доказанная здесь теорема об устойчивости, являющаяся обобщением теоремы Рауса на системы с распределенными параметрами, приводит вопрос об устойчивости стационарных движений к задаче минимума (измененной) потенциальной энергии W системы. В [2–5] дано решение ряда задач об устойчивости стационарных движений твердого тела с упругими стержнями и жидкостью в потенциальных силовых полях. В [6] приведены и проиллюстрированы на решении конкретных механических задач два способа установления условий положительной определенности второй вариации $\delta^2 W$ при исследовании устойчивости стационарных движений механических систем, состоящих из абсолютно твердых тел и материальных точек и связанных с ними деформируемых упругих и жидких тел.

Задача об устойчивости стационарных движений механических систем с распределенными параметрами исследовалась в ряде других работ [7–10] (см. библиографию в [7–10]). В [9] рассмотрена задача об устойчивости «нетривиального» положения относительного равновесия на круговой орбите абсолютно твердого тела с упругими стержнями, при этом «тривиальные» и «нетривиальные» положения равновесия системы характеризуются тем, что для них упругие стержни находятся соответственно в недеформированном и деформированном состояниях. В работах [7, 8], а также в [2–6] исследовалась устойчивость лишь тривиальных положений относительного равновесия твердых тел с упругими стержнями. Отмечено [9], что использованный ранее метод, основанный на использовании прямого метода Ляпунова, неприменим для решения задачи об устойчивости нетривиального положения относительного равновесия системы, и для ее решения предложен другой метод, основанный на разложении упругих перемещений стержней в ряды по некоторой полной системе функций. Однако в указанных рядах оставлено лишь конечное число первых членов без какого-либо математического обоснования и, по существу, система с распределенными параметрами приведена к некоторой системе с конечным числом степеней свободы [9].

1. Рассмотрим в однородном поле сил тяжести движение твердого тела с одной неподвижной точкой, к которому прикреплены два тонких прямолинейных упругих стержня.

Введем две прямоугольные системы координат: инерциальную $Oxyz$ с началом в неподвижной точке O тела и осью z, направленной вертикально вверх, и подвижную $Ox_1x_2x_3$, оси которой направим по главным осям эллипсоида инерции твердого тела для точки O. Пусть $\mathbf{i}_\nu$ $(\nu = 1, 2, 3)$ — единичные векторы осей x_ν, а $\boldsymbol{\gamma}$ — орт оси z с проекциями γ_ν на оси x_ν.

Будем предполагать, что два одинаковых стержня длины l одним концом защемлены в теле в точках N_1 и N_2 с координатами N_1 $(0, a, b)$ и N_2 $(0, -a, b)$, в недеформированном состоянии лежат в плоскости $x_1=0$ и свободными концами направлены в одну сторону параллельно оси x_3, причем плоскости, проходящие через геометрические оси стержней и параллельные плоскостям $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$, служат плоскостями симметрии стержней.

Обозначим через

$$\boldsymbol{u}_j(t, s) = u_{j1}(t, s)\,\boldsymbol{i}_1 + u_{j2}(t, s)\,\boldsymbol{i}_2 + u_{j3}(t, s)\,\boldsymbol{i}_3$$
$$0 \leqslant s \leqslant l \quad t \geqslant t_0 \quad (j = 1, 2)$$

векторы упругих перемещений точек осей стержней. Условие нерастяжимости стержней приводит к соотношениям [11]

$$u_{j3}' = -{}^1/_2\,(u_{j1}'^2 + u_{j2}'^2), \quad j = 1, 2 \quad (u' = \partial u / \partial s) \tag{1.1}$$

а условие защемления в теле одного конца стержней — к граничным условиям

$$u_{j1} = u_{j2} = 0, \quad u_{j1}' = u_{j2}' = 0 \quad \text{при } s = 0,\ t \geqslant t_0 \tag{1.2}$$

Из (1.1) следует, что u_{13} и u_{23} — величины второго порядка малости, если за величины первого порядка приняты u_{j1}, u_{j2} и u_{j1}', u_{j2}' $(j = 1, 2)$. Отметим, что равенства (1.1) представляют собой условие нерастяжимости стержней лишь с точностью до членов второго порядка малости относительно указанных величин.

Для потенциальной энергии упругой деформации стержней примем выражение [11]

$$\Pi_d = \frac{1}{2}\int_0^l [EI_2(u_{11}''^2 + u_{21}''^2) + EI_1(u_{12}''^2 + u_{22}''^2)]\,ds \tag{1.3}$$

Здесь E — модуль Юнга; I_1 и I_2 — моменты инерции профиля стержня относительно прямых, проведенных через его центр тяжести параллельно осям x_1 и x_2 соответственно; EI_1 и EI_2 — жесткости на изгиб.

Потенциальная энергия силы тяжести равна

$$\begin{aligned}\Pi_g = {} & Mg\,(x_{10}\gamma_1 + x_{20}\gamma_2 + x_{30}\gamma_3) + \\ & + g\sigma\rho\int_0^l [\gamma_1(u_{11} + u_{21}) + \gamma_2(u_{12} + u_{22}) - {}^1/_2\gamma_3(l - s)(u_{11}'^2 + \\ & + u_{12}'^2 + u_{21}'^2 + u_{22}'^2)]\,ds\end{aligned} \tag{1.4}$$

где M — масса всей системы; x_{10}, x_{20}, x_{30} — координаты центра масс системы в ее недеформированном состоянии; g — ускорение силы тяжести; σ — площадь поперечного сечения стержней; ρ — плотность стержней. Отметим, что при выводе выражения (1.4) использованы соотношения (1.1) и (1.2).

Рассматриваемая система допускает интегралы энергии $T + \Pi = \mathrm{const}$ и площадей $\mathbf{G}\cdot\boldsymbol{\gamma} = k = \mathrm{const}$, где T и $\Pi = \Pi_d + \Pi_g$ — кинетическая и потенциальная энергии системы, а $\mathbf{G}$ — вектор кинетического момента системы относительно точки O.

Введем в рассмотрение прямоугольную систему осей координат $Ozz'z''$, вращающуюся вокруг оси z с некоторой угловой скоростью Ω. Обозначая через $\mathbf{G}_r$ вектор кинетического момента системы относительно точки O в ее движении относительно осей $Ozz'z''$, интеграл площадей представим в виде $\mathbf{G}_r\cdot\boldsymbol{\gamma} + J\Omega = k$, где J — момент инерции системы относительно оси z

$$
\begin{aligned}
(1.5)\qquad J = {} & J_1\gamma_1^2 + J_2\gamma_2^2 + J_3\gamma_3^2 + \sigma\rho\int_0^l \{(u_{11}^2 + u_{21}^2)(1-\gamma_1^2) + \\
& + (u_{12}^2 + u_{22}^2)(1-\gamma_2^2) - (l-s)\,[b + {}^1/_2\,(l+s)]\,(u_{11}'^2 + u_{12}'^2 + \\
& + u_{21}'^2 + u_{22}'^2)(1-\gamma_3^2) - 2\,(u_{11}u_{12} + u_{21}u_{22})\,\gamma_1\gamma_2 + \\
& + a\,(l-s)\,(u_{11}'^2 + u_{12}'^2 - u_{21}'^2 - u_{22}'^2)\,\gamma_2\gamma_3 - 2\,(b+s)\,[(u_{11}+u_{21})\,\gamma_1 + \\
& + (u_{12}+u_{22})\,\gamma_2]\,\gamma_3 + 2a\,[(u_{12}-u_{22})(1-\gamma_2^2) + (u_{21}-u_{11})\,\gamma_1\gamma_2]\}\,ds
\end{aligned}
$$

а J_1, J_2, J_3 — главные моменты инерции системы в ее недеформированном состоянии относительно осей x_1, x_2, x_3.

Величину Ω выберем так, чтобы в любой момент времени имело место равенство $\mathbf{G}_r\cdot\boldsymbol{\gamma} = 0$. Тогда будем иметь $J\Omega = k$ и интеграл энергии можно представить в виде $T_r + W = \mathrm{const}$, где T_r — кинетическая энергия относительного движения системы, а W — измененная потенциальная энергия системы

$$
(1.6)\qquad W = \frac{k^2}{2J} + \Pi
$$

Далее вместо W будем рассматривать функционал $W_* = W + {}^1/_2\,\lambda\cdot(\gamma^2 - 1)$, где λ — неопределенный множитель Лагранжа. Из (1.3), (1.4) и (1.6) получаем следующее выражение для W_*:

$$
\begin{aligned}
(1.7)\qquad W_* = {} & \frac{k^2}{2J} + Mg\,(x_{10}\gamma_1 + x_{20}\gamma_2 + x_{30}\gamma_3) + {}^1/_2\lambda\,(\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2-1) + \\
& + \sigma\rho\int_0^l \{g\,[\gamma_1\,(u_{11}+u_{21}) + \gamma_2\,(u_{12}+u_{22}) - {}^1/_2\gamma_3\,(l-s)\,(u_{11}'^2 + \\
& + u_{12}'^2 + u_{21}'^2 + u_{22}'^2)] + {}^1/_2\,[E_*I_2\,(u_{11}''^2 + u_{21}''^2) + E_*I_1\,(u_{12}''^2 + u_{22}''^2)]\}\,ds \\
& (E = \sigma\rho E_*)
\end{aligned}
$$

2. Уравнения стационарных движений системы и естественные граничные условия получим, вычислив и приравняв нулю первую вариацию

δW_*. Эти уравнения имеют вид

$$Mgx_{10} - \Omega^2 (J_1 - \lambda_*) \gamma_1 + \sigma\rho \int_0^l \{[g + \Omega^2 (b + s) \gamma_3] (u_{11} + u_{21}) + \tag{2.1}$$
$$+ \Omega^2 [(u_{11}^2 + u_{21}^2) \gamma_1 + (u_{11}u_{12} + u_{21}u_{22}) \gamma_2 + a (u_{11} - u_{21}) \gamma_2]\} ds = 0$$

$$Mgx_{20} - \Omega^2 (J_2 - \lambda_*) \gamma_2 + \sigma\rho \int_0^l \{[g + \Omega^2 (b + s) \gamma_3] (u_{12} + u_{22}) +$$
$$+ \Omega^2 [(u_{11}u_{12} + u_{21}u_{22}) \gamma_1 + a (u_{11} - u_{21}) \gamma_1 + (u_{12}^2 + u_{22}^2) \gamma_2 +$$
$$+ 2a (u_{12} - u_{22}) \gamma_2 + \frac{1}{2} a (l - s) (u_{21}'^2 + u_{22}'^2 - u_{11}'^2 - u_{12}'^2) \gamma_3]\} ds = 0$$

$$Mgx_{30} - \Omega^2 (J_3 - \lambda_*) \gamma_3 + \sigma\rho \int_0^l \Big\{-\frac{1}{2} (l - s) [g + \Omega^2 (2b + l + s) \gamma_3] \times$$
$$\times (u_{11}'^2 + u_{12}'^2 + u_{21}'^2 + u_{22}'^2) + \Omega^2 [(b + s) (u_{11} + u_{21}) \gamma_1 +$$
$$+ (b + s) (u_{12} + u_{22}) \gamma_2 + \frac{1}{2} a (l - s) (u_{21}'^2 + u_{22}'^2 - u_{11}'^2 - u_{12}'^2) \gamma_2]\} \times$$
$$\times ds = 0$$

$$E_* I_2 u_{11}^{IV} + \{[a\Omega^2\gamma_2\gamma_3 + g\gamma_3 - {}^1/_2\Omega^2 (2b + l + s)(1 - \gamma_3^2)] \times$$
$$\times (l - s) u_{11}'\}' + \Omega^2 [u_{12}\gamma_1\gamma_2 - u_{11} (1 - \gamma_1^2)] + \{g + \Omega^2 [a\gamma_2 +$$
$$+ (b + s) \gamma_3]\} \gamma_1 = 0$$

$$E_* I_1 u_{12}^{IV} + \{[a\Omega^2\gamma_2\gamma_3 + g\gamma_3 - {}^1/_2\Omega^2 (2b + l + s)(1 - \gamma_3^2)] \times$$
$$\times (l - s) u_{12}'\}' + \Omega^2 [u_{11}\gamma_1\gamma_2 - u_{12} (1 - \gamma_2^2)] + g\gamma_2 + \Omega^2 [(b +$$
$$+ s) \gamma_2\gamma_3 - a (1 - \gamma_2^2)] = 0$$

$$E_* I_2 u_{21}^{IV} - \{[a\Omega^2\gamma_2\gamma_3 - g\gamma_3 + {}^1/_2\Omega^2 (2b + l + s)(1 - \gamma_3^2)] \times$$
$$\times (l - s) u_{21}'\}' + \Omega^2 [u_{22}\gamma_1\gamma_2 - u_{21} (1 - \gamma_1^2)] + \{g + \Omega^2 [(b +$$
$$+ s) \gamma_3 - a\gamma_2]\}\gamma_1 = 0$$

$$E_* I_1 u_{22}^{IV} - \{[a\Omega^2\gamma_2\gamma_3 - g\gamma_3 + {}^1/_2\Omega^2 (2b + l + s)(1 - \gamma_3^2)] \times$$
$$\times (l - s) u_{22}'\}' + \Omega^2 [u_{21}\gamma_1\gamma_2 - u_{22} (1 - \gamma_2^2)] + g\gamma_2 + \Omega^2 [(b +$$
$$+ s)\gamma_2\gamma_3 + a (1 - \gamma_2^2)] = 0$$

$$(\Omega = kJ^{-1}, \ \lambda_* = \lambda\Omega^{-2})$$

$$u_{11}'' = u_{12}'' = u_{21}'' = u_{22}'' = 0, \quad u_{11}''' = u_{12}''' = u_{21}''' = u_{22}''' = 0 \quad \text{при } s = l \tag{2.2}$$

К граничным условиям (2.2) следует присоединить еще условия (1.1).

В случае, когда $x_{10} = x_{20} = 0$, уравнения (2.1) и граничные условия (1.1) и (2.2) допускают следующее частное решение:

$$\gamma_1^\circ = \gamma_2^\circ = 0, \ \gamma_3^\circ = 1, \ u_{11}^\circ = u_{21}^\circ \equiv 0, \ u_{12}^\circ = - u_{22}^\circ = u_0(s) \tag{2.3}$$

где $u = u_0 (s)$ — решение краевой задачи

$$E_* I_1 u_0^{IV} + g [(l - s) u_0']' - \Omega_0^2 (u_0 + a) = 0 \tag{2.4}$$
$$u_0 (0) = u_0' (0) = u_0'' (l) = u_0''' (l) = 0$$

При этом

$$\lambda = \lambda_* \Omega^2{}_0 = J_3 \Omega_0^2 - Mgx_{30} + \sigma\rho \int\limits_0^l (l-s)\,[g + \tag{2.5}$$

$$+ \Omega_0^2 (2b + l + s)]\, u_0'^2 ds$$

Решение (2.3) описывает вращение системы вокруг вертикали, совпадающей с осью x_3 эллипсоида инерции твердого тела для его неподвижной точки, с постоянной угловой скоростью $\Omega_0 = k_0 J_0^{-1}$, где k_0 и J_0 — значения постоянной интеграла площадей и момента инерции системы относительно оси z для стационарного движения (2.3).

3. Принимая движение (2.3) за невозмущенное, исследуем его устойчивость (определение устойчивости дано в [2], п. 4).

Условия устойчивости получим из теоремы [1] как достаточные условия положительной определенности второй вариации $\delta^2 W_*$ для решения (2.3) в метрике, по отношению к которой функционал W_* непрерывен [2]; при этом рассмотрим два способа [6] установления положительной определенности $\delta^2 W_*$.

В возмущенном движении положим $\gamma_3 = 1 + \delta\gamma_3$, $u_{12} = u_0(s) + w_{12}$, $u_{22} = -u_0(s) + w_{22}$, а для остальных величин сохраним их прежние обозначения. Из равенства $\gamma^2 = 1$ с точностью до членов выше первого порядка малости следует, что $\delta\gamma_3 = 0$; поэтому при вычислении $\delta^2 W_*$ формально можно считать $\gamma_3 = 1$.

Из (1.7), (1.5), (2.3) — (2.5) находим

$$\begin{aligned}\delta^2 W_* = {} & \Omega_0^2 [(\lambda_* - J_1)\gamma_1^2 + (\lambda_* - J_2)\gamma_2^2] + \\ & + \sigma\rho \int\limits_0^l \{E_* I_2 (u_{11}''^2 + u_{21}''^2) + E_* I_1 (w_{12}''^2 + w_{22}''^2) - \\ & - g(l-s)(u_{11}'^2 + u_{21}'^2 + w_{12}'^2 + w_{22}'^2) - \Omega_0^2 (u_{11}^2 + u_{21}^2 + w_{12}^2 + w_{22}^2) + \\ & + 2[g + \Omega_0^2 (b+s)]\,[(u_{11} + u_{21})\gamma_1 + (w_{12} + w_{22})\gamma_2] - \\ & - 2\Omega_0^2 [a(l-s) u_0' (w_{12}' + w_{22}') - (2a + u_0) u_0 \gamma_2]\,\gamma_2\}\, ds + \\ & + 4J_0^{-1} \Omega_0^2 \left\{\sigma\rho \int\limits_0^l (a + u_0)(w_{12} - w_{22})\, ds\right\}^2\end{aligned} \tag{3.1}$$

Выражение (3.1) представим в виде

$$\delta^2 W_* = U(\gamma_1, \gamma_2, u_{11}, u_{21}, w_{12}, w_{22}) + U_1 (u_{11}, u_{21}) + U_2 (w_{12}, w_{22}) \tag{3.2}$$

$$\begin{aligned}U = {} & 4J_0^{-1} \Omega_0^2 \left\{\sigma\rho \int\limits_0^l (a + u_0)(w_{12} - w_{22})\, ds\right\}^2 + \\ & + (\lambda_* - J_1)\,\Omega_0^2 \left\{\gamma_1 + (\lambda_* - J_1)^{-1} \Omega_0^{-2} \sigma\rho \int\limits_0^l [g + \Omega_0^2 (b+s)] \times \right. \\ & \left. \times (u_{11} + u_{21})\, ds\right\}^2 + (\lambda_* - J_2 + A)\,\Omega_0^2 \times\end{aligned} \tag{3.3}$$

$$\times \left\{\gamma_2 + (\lambda_* - J_2 + A)^{-1} \Omega_0^{-2} \sigma\rho \int_0^l \{[g + \Omega_0^2 (b+s)] (\omega_{12} + w_{22}) - \right.$$

$$\left. - a\Omega_0^2 (l-s) u_0' (w_{12}' + w_{22}')\} ds \right\}^2$$

(3.4)
$$U_1 = \sigma\rho \int_0^l \{E_* I_2 (u_{11}''^2 + u_{21}''^2) - g(l-s)(u_{11}'^2 + u_{21}'^2) -$$

$$- \Omega_0^2 (u_{11}^2 + u_{21}^2)\} ds - (\lambda_* - J_1)^{-1} \Omega_0^{-2} \times$$

$$\times \left\{\sigma\rho \int_0^l [g + \Omega_0^2 (b+s)] (u_{11} + u_{21}) ds\right\}^2$$

(3.5)
$$U_2 = \sigma\rho \int_0^l \{E_* I_1 (w_{12}''^2 + w_{22}''^2) - g(l-s)(w_{12}'^2 + w_{22}'^2) -$$

$$- \Omega_0^2 (w_{12}^2 + w_{22}^2)\} ds - (\lambda_* - J_2 + A)^{-1} \Omega_0^{-2} \times$$

$$\times \left\{\sigma\rho \int_0^l \{g + \Omega_0^2 (b+s) + a\Omega_0^2 [(l-s) u_0']'\} (w_{12} + w_{22}) ds\right\}^2$$

(3.6)
$$A = 2\sigma\rho \int_0^l (2a + u_0) u_0 ds$$

Пусть выполнены условия $\lambda_* - J_1 > 0$, $\lambda_* - J_2 + A > 0$, представляющие собой достаточные условия устойчивости равномерного вертикального вращения (2.3) тяжелого твердого тела с двумя одинаковыми недеформируемыми стержнями, изогнутыми по закону (2.3), (2.4). Тогда, используя неравенство Коши — Буняковского, из (3.4) и (3.5) получим неравенства

(3.7)
$$U_1 \geqslant \sigma\rho \int_0^l \{E_* I_2 (u_{11}''^2 + u_{21}''^2) - g(l-s)(u_{11}'^2 + u_{21}'^2) -$$

$$- \Omega_0^2 (u_{11}^2 + u_{21}^2) - (\lambda_* - J_1)^{-1} \Omega_0^{-2} h_1 (u_{11} + u_{21})^2\} ds$$

(3.8)
$$U_2 \geqslant \sigma\rho \int_0^l \{E_* I_1 (w_{12}''^2 + w_{22}''^2) - g(l-s)(w_{12}'^2 + w_{22}'^2) -$$

$$- \Omega_0^2 (w_{12}^2 + w_{22}^2) - (\lambda_* - J_2 + A)^{-1} \Omega_0^{-2} h_2 (w_{12} + w_{22})^2\} ds$$

(3.9)
$$h_1 = \sigma\rho \int_0^l [g + \Omega_0^2 (b+s)]^2 ds,$$

$$h_2 = \sigma\rho \int_0^l \{g + \Omega_0^2 (b+s) + a\Omega_0^2 [(l-s) u_0']'\}^2 ds$$

Рассмотрим теперь следующую вариационную задачу. Найти минимум $\varkappa l^{-4}$ функционала

(3.10)
$$F(u) = \int_0^l u''^2 ds \left\{\int_0^l (u^2 + \sigma u'^2) ds\right\}^{-1}$$

в классе непрерывно-дифференцируемых до четвертого порядка включительно функций $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant l$, удовлетворяющих условиям $u(0) = u'(0) = 0$.

Отсюда, полагая $s = lx$, для определения постоянной $\varkappa$ получаем задачу на собственные значения

$$\frac{d^4u}{dx^4} + \varkappa\left(\nu\frac{d^2u}{dx^2} - u\right) = 0 \quad (\nu = \sigma l^{-2})$$

$$u(0) = \left(\frac{du}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)_{x=1} = 0, \quad \left(\frac{d^3u}{dx^3}\right)_{x=1} + \nu\varkappa\left(\frac{du}{dx}\right)_{x=1} = 0$$

характеристическое уравнение которой имеет вид

$$\Delta(\varkappa) = \alpha^2 + \beta^2 + \nu\varkappa(\beta^2 - \alpha^2) + [(1 + \alpha^2)\beta^2 + \nu\varkappa(1 - \beta^2)]\times \times\cos\alpha\,\mathrm{ch}\,\beta - \alpha\beta(\beta^2 - \alpha^2 + 2\nu\varkappa)\sin\alpha\,\mathrm{sh}\,\beta = 0 \tag{3.11}$$

$$2\alpha = \nu\varkappa + \sqrt{4\varkappa + \nu^2\varkappa^2}, \quad 2\beta = -\nu\varkappa + \sqrt{4\varkappa + \nu^2\varkappa^2}$$

Значение $\varkappa$ равно наименьшему (положительному) корню уравнения (3.11).

Из (3.10) следует неравенство

$$\int_0^l u''^2 ds \geqslant \varkappa l^{-4}\int_0^l (u^2 + \sigma u'^2)\, ds \tag{3.12}$$

с учетом которого из (3.7) и (3.8) получаем неравенства

$$U_1 \geqslant \sigma\rho\int_0^l \{[E_* I_2 l^{-4}\sigma\varkappa - g(l - s)](u_{11}'^2 + u_{21}'^2) +$$
$$+ [E_* I_2 l^{-4}\varkappa - \Omega_0^2 - (\lambda_* - J_1)^{-1}\Omega_0^{-2}h_1](u_{11}^2 + u_{21}^2) -$$
$$- 2(\lambda_* - J_1)^{-1}\Omega_0^{-2}h_1 u_{11}u_{21}\}\, ds$$

$$U_2 \geqslant \sigma\rho\int_0^l \{[E_* I_1 l^{-4}\sigma\varkappa - g(l - s)](w_{12}'^2 + w_{22}'^2) +$$
$$+ [E_* I_1 l^{-4}\varkappa - \Omega_0^2 - (\lambda_* - J_2 + A)^{-1}\Omega_0^{-2}h_2](w_{12}^2 + w_{22}^2) -$$
$$- 2(\lambda_* - J_2 + A)^{-1}\Omega_0^{-2}h_2 w_{12}w_{22}\}\, ds$$

Отсюда с учетом (3.2) — (3.5) следует, что неравенства

$$E_* I_2 l^{-4}\sigma\varkappa > gl, \quad E_* I_1 l^{-4}\sigma\varkappa > gl \tag{3.13}$$

$$\lambda_* - J_1 > 2h_1\Omega_0^{-2}(E_* I_2 l^{-4}\varkappa - \Omega_0^2)^{-1} > 0 \tag{3.14}$$

$$\lambda_* - J_2 + A > 2h_2\Omega_0^{-2}(E_* I_1 l^{-4}\varkappa - \Omega_0^2)^{-1} > 0$$

являются достаточными условиями положительной определенности функционала $\delta^2 W_*$. Согласно теореме [1] заключаем, что (3.13) и (3.14) представляют собой достаточные условия устойчивости [2] невозмущенного движения (2.3).

Условия (3.13) налагают определенные ограничения снизу на величины жесткостей стержней, а условия (3.14) налагают на Ω_0^2 ограничения как снизу, так и сверху. Последнее обстоятельство характерно для систем с распределенными параметрами [2, 4, 6]. Постоянные λ_*, A, h_1 и h_2 в (3.13) и (3.14) вычисляются по формулам (2.5), (3.6) и (3.9) при известном решении $u = u_0(s)$ задачи (2.4).

4. Приведем другой способ [6] решения задачи минимума функционала $\delta^2 W_*$.

Выражение (3.1) будем рассматривать как функционал при фиксированных значениях величин γ_1, γ_2, которые будут играть роль параметров. Определим функции u_{11}, u_{21}, w_{12}, w_{22}, для которых (3.1) имеет стационарное значение. Из условия стационарности (4.1) получаем краевые задачи

$$E_* I_2 u_{11}^{\mathrm{IV}} + g[(l-s)u_{11}']' - \Omega_0^2 u_{11} + [g + \Omega_0^2(b+s)]\gamma_1 = 0 \tag{4.1}$$
$$u_{11}(0) = u_{11}'(0) = u_{11}''(l) = u_{11}'''(l) = 0$$

$$E_* I_2 u_{21}^{\mathrm{IV}} + g[(l-s)u_{21}']' - \Omega_0^2 u_{21} + [g + \Omega_0^2(b+s)]\gamma_1 = 0 \tag{4.2}$$
$$u_{21}(0) = u_{21}'(0) = u_{21}''(l) = u_{21}'''(l) = 0$$

$$E_* I_1 w_{12}^{\mathrm{IV}} + g[(l-s)w_{12}']' - \Omega_0^2 w_{12} + 4J_0^{-1}\Omega_0^2(a+u_0)\sigma\rho \times \tag{4.3}$$
$$\times \int_0^l (a+u_0)(w_{12}-w_{22})\,ds + g\gamma_2 + \Omega_0^2\{b+s+a[(l-s)u_0']'\}\gamma_2 = 0$$
$$w_{12}(0) = w_{12}'(0) = w_{12}''(l) = w_{12}'''(l) = 0$$

$$E_* I_1 w_{22}^{\mathrm{IV}} + g[(l-s)w_{22}']' - \Omega_0^2 w_{22} - 4J_0^{-1}\Omega_0^2(a+u_0)\sigma\rho \times \tag{4.4}$$
$$\times \int_0^l (a+u_0)(w_{12}-w_{22})\,ds + g\gamma_2 + \Omega_0^2\{b+s+a[(l-s)u_0']'\}\gamma_2 = 0$$
$$w_{22}(0) = w_{22}'(0) = w_{22}''(l) = w_{22}'''(l) = 0$$

При выполнении условий

$$E_* I_1 l^{-4}\varkappa > \Omega_0^2, \quad E_* I_1 l^{-4}\varkappa\sigma > gl \tag{4.5}$$

решения задач (4.3) и (4.4) совпадают: $w_{12} \equiv w_{22}$.

Действительно, вычитая (4.4) из (4.3), получаем для $w = w_{12} - w_{22}$ линейную однородную краевую задачу

$$E_* I_1 w^{\mathrm{IV}} + g[(l-s)w']' - \Omega_0^2 w + 4J_0^{-1}\Omega_0^2(a+u_0)\sigma\rho \int_0^l (a+u_0)w\,ds = 0 \tag{4.6}$$
$$w(0) = w'(0) = w''(l) = w'''(l) = 0$$

Умножая почленно это уравнение на w и интегрируя по s от 0 до l, приходим к равенству

$$\Phi(w) \equiv \int_0^l [E_* I_1 w''^2 - g(l-s)w'^2 - \Omega_0^2 w^2]\,ds + 4J_0^{-1}\Omega_0^2\sigma\rho\left\{\int_0^l (a+u_0)w\,ds\right\}^2 = 0$$

для левой части которого на основе (3.12) имеем оценку

$$\Phi(w) \geqslant \int_0^l [(E_* I_1 l^{-4} \sigma\varkappa - gl) w'^2 + (E_* I_1 l^{-4}\varkappa - \Omega_0^2) w^2]\, ds$$

Отсюда следует, что при выполнении условий (4.5) задача (4.6) имеет тривиальное решение $w \equiv 0$ и, следовательно, $w_{12} \equiv w_{22}$.

Решения задач (4.1) — (4.4) представим в виде

$$u_{11} = u_{21} = \gamma_1 u_*, \qquad w_{12} = w_{22} = \gamma_2 w_* \tag{4.7}$$

где u_* и w_* — решения краевых задач

$$E_* I_2 u_*^{\mathrm{IV}} + g[(l-s)u_*']' - \Omega_0^2 u_* + g + \Omega_0^2(b+s) = 0 \tag{4.8}$$

$$u_*(0) = u_*'(0) = u_*''(l) = u_*'''(l) = 0$$

$$E_* I_2 w_*^{\mathrm{IV}} + g[(l-s)w_*']' - \Omega_0^2 w_* + g + \Omega_0^2 \{b + s + {} \\ + a[(l-s)u_0']'\} = 0 \tag{4.9}$$

$$w_*(0) = w_*'(0) = w_*''(l) = w_*'''(l) = 0.$$

Положим в (3.1) $u_{11} = \gamma_1 u_* + v_{11}$, $u_{21} = \gamma_1 u_* + v_{21}$, $w_{12} = \gamma_2 w_* + v_{12}$, $w_{22} = \gamma_2 w_* + v_{22}$; тогда будем иметь

$$\begin{aligned}\delta^2 W_* &= [(\lambda_* - J_1)\Omega_0^2 + P_1]\gamma_1^2 + [(\lambda_* - J_2 + A)\Omega_0^2 + P_2]\gamma_2^2 + \\ &+ \sigma\rho\int_0^l \{E_* I_2(v_{11}''^2 + v_{21}''^2) + E_* I_1(v_{12}''^2 + v_{22}''^2) - g(l-s)(v_{11}'^2 + v_{21}'^2 + \\ &+ v_{12}'^2 + v_{22}'^2) - \Omega_0^2(v_{11}^2 + v_{21}^2 + v_{12}^2 + v_{22}^2)\}\, ds + 4J_0^{-1}\Omega_0^2 \times \\ &\times \left\{\sigma\rho\int_0^l (a + u_0)(v_{12} - v_{22})\, ds\right\}^2\end{aligned} \tag{4.10}$$

где

$$\begin{aligned}P_1 &= 2\sigma\rho\int_0^l [g + \Omega_0^2(b+s)]\, u_* ds \\ P_2 &= 2\sigma\rho\int_0^l \{g + \Omega_0^2(b + s + a[(l-s)u_0']')\}\, w_* ds\end{aligned} \tag{4.11}$$

Принимая во внимание (3.12), из (4.10) получаем неравенство

$$\begin{aligned}\delta^2 W_* &\geqslant [(\lambda_* - J_1)\Omega_0^2 + P_1]\gamma_1^2 + [(\lambda_* - J_2 + A)\Omega_0^2 + P_2]\gamma_2^2 + \\ &+ 4J_0^{-1}\Omega_0^2 \left\{\sigma\rho\int_0^l (a+u_0)(v_{12} - v_{22})\, ds\right\}^2 + \\ &+ \sigma\rho\int_0^l \{[E_* I_2 l^{-4}\sigma\varkappa - g(l-s)](v_{11}'^2 + v_{21}'^2) + [E_* I_1 l^{-4}\sigma\varkappa - g(l-s)] \times \\ &\times (v_{12}'^2 + v_{22}'^2) + (E_* I_2 l^{-4}\varkappa - \Omega_0^2)(v_{11}^2 + v_{21}^2) + \\ &+ (E_* I_1 l^{-1}\varkappa - \Omega_0^2)(v_{12}^2 + v_{22}^2)\}\, ds\end{aligned}$$

Отсюда получаем следующие условия устойчивости движения (2.3) как достаточные условия положительной определенности функциона $\delta^2 W_*$

$$(4.12)\qquad E_* I_2 l^{-4} \sigma \varkappa > gl, \quad E_* I_1 l^{-4} \sigma \varkappa > gl$$

$$(4.13)\qquad E_* I_2 l^{-4} \varkappa > \Omega_0^2, \quad E_* I_1 l^{-4} \varkappa > \Omega_0^2$$

$$(4.14)\qquad (\lambda_* - J_1)\,\Omega_0^2 + P_1 > 0, \quad (\lambda_* - J_2 + A)\,\Omega_0^2 + P_2 > 0$$

Механический смысл условий (4.12) — (4.14) такой же, что и условий (3.13) и (3.14), а именно: условия (4.12) налагают на жесткости стержней ограничения снизу, условия (4.13) налагают на Ω_0^2 ограничения сверху и, наконец, условия (4.14) налагают на Ω_0^2 ограничения снизу. Для вычисления постоянных P_1 и P_2 в (4.14) по формулам (4.11) необходимо знать не только решение задачи (2.4), но также и решения задач (4.8) и (4.9). При неограниченном увеличении жесткости стержней (при $E \to \infty$) из (3.13) и (3.14), а также из (4.12) — (4.14) в пределе получаем известные достаточные условия $\lambda_* - J_1 > 0$, $\lambda_* - J_2 + A > 0$ устойчивости равномерных вертикальных вращений в однородном поле силы тяжести неизменяемой системы, состоящей из твердого тела с одной неподвижной точкой и жестко связанных с ним двух одинаковых недеформируемых стержней, изогнутых по закону (2.3), (2.4).

В отсутствие поля силы тяжести условия (3.14) и (4.14) могут быть представлены в явном виде, так как в этом случае решения краевых задач (2.4), (4.8) и (4.9) выражаются в элементарных функциях.

Поступила 25 VIII 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Румянцев В. В.* О движении и устойчивости упругого тела с полостью, содержащей жидкость. ПММ, 1969, т. 33, вып. 6.
2. *Рубановский В. Н.* Об устойчивости некоторых движений твердого тела с упругими стержнями и жидкостью. ПММ, 1972, т. 36, вып. 1.
3. *Рубановский В. Н.* Устойчивость относительного равновесия на круговой орбите твердого тела с упругими стержнями, совершающими изгибно-крутильные колебания. София, Теоретична и приложна механика, 1972, год. 3, № 2.
4. *Морозов В. М., Рубановский В. Н.* Некоторые задачи об устойчивости стационарных движений твердого тела с деформируемыми элементами. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1973, № 22.
5. *Морозов В. М., Рубановский В. Н.* Устойчивость относительного равновесия на круговой орбите твердого тела с упругими стержнями. Изв. АН СССР. МТТ, 1974, № 1.
6. *Морозов В. М., Рубановский В. Н., Румянцев В. В., Самсонов В. А.* О бифуркации и устойчивости установившихся движений сложных механических систем. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
7. *Meirovitch L.* Stability of a spinning body containing elastic parts via Liapunov's direct method. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 7.
8. *Meirovitch L.* Liapunov stability analisis of hybrid dynamical systems with multi-elastic domains. Internat. J. Non-Linear Mech., 1972, vol. 7, No. 4.
9. *Meirovitch L.* Liapunov stability analysis of hybrid dynamical systems in the neighborhood of nontrivial equilibrium. AIAA Journal, 1974, vol. 12, No. 7.
10. *Морозов В. М.* Устойчивость движения космических аппаратов (обзор). В сб.: Итоги науки. Общая механика, 1969, М., 1971.
11. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.