Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.36+517.949.22

УСТОЙЧИВОСТЬ В КОНЕЧНОМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

С. Н. Сорокин

(Москва)

Для дифференциальных систем нейтрального типа рассматривается одна из постановок задачи об устойчивости на конечном интервале времени — техническая устойчивость. Методом Ляпунова — Красовского [1–3] получены достаточные условия технической устойчивости и, так называемой, сжимающей технической устойчивости. Подобные исследования для обыкновенных дифференциальных уравнений проведены в работе [4], а для уравнений с запаздывающим аргументом — в работах [5, 6].

1. Задана система дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt}D(x_t(\theta),t)=f(x_t(\theta),t),\quad D(x_t(\theta),t)\equiv x(t)-g(x_t(\theta),\ t) \tag{1.1}$$

$$g(x(\theta),t)\equiv\int_{-\tau}^{0}[d_\theta\mu(\theta,t)]\,x(\theta)$$

Здесь вектор-функция $x_t(\theta)\equiv x\ (t+\theta)$ принадлежит при всех $t\geqslant 0$ пространству $C_0\equiv C\ ([-\tau,0],\ R^n)$ с нормой $\|\,x\ (\theta)\,\|=\sup\ (\ |\,x_i\ (\theta)\ |$ при $-\tau\leqslant\theta\leqslant 0,\ i=1,\ 2,\ .\ .\ .,\ n)$; $\mu\ (\theta,\ t)$ — $n\times n$-матрица функций, непрерывных по $t\in[0,\ \infty)$ и с ограниченным изменением по θ, для которой существует непрерывная неубывающая по $s\in[0,\ \tau]$ функция $l_0\ (s)$, $l_0\ (0)=0$, такая, что

$$\left|\int_{-s}^{0}[d_\theta\mu(\theta,t)]\,x(\theta)\right|\leqslant l_0(s)\sup_{-s\leqslant\theta\leqslant 0}\|x(\theta)\|$$
$$\forall t\in[0,\infty),\ \forall x(\theta)\in C_0$$

Непрерывный n-мерный вектор-функционал $f\ (x\ (\theta),\ t)$ выбран таким образом, чтобы решение системю (1.1), определяемое начальной функцией $x_{t_0}(\theta)=\varphi_{t_0}(\theta)$, $-\tau\leqslant\theta\leqslant 0$, существовало и было единственным [7].

Определение 1. Система (1.1) называется $(\alpha,\ A,\ t_0,\ T)$-устойчивой $(\alpha<A)$, если решение $x_t(\theta)$, определенное начальной функцией $\|\,x_{t_0}(\theta)\|\leqslant\alpha$, удовлетворяет неравенству $\|\,x_t(\theta)\,\|<A,\ \forall\ t\in[t_0,\ t_0+T)$.

Определение 2. Система (1.1) называется $(\alpha,\ A,\ B,\ t_0,\ T)$-сжимающе устойчивой $(B<\alpha<A)$, если она $(\alpha,\ A,\ t_0,\ T)$-устойчива и для решения $x_t(\theta)$, определенного начальной функцией $\|\,x_{t_0}(\theta)\,\|\leqslant\alpha$, можно указать момент времени $t_1\in(t_0,\ t_0+T)$, $t_1=t_1(t_0,\ \ x_{t_0}(\theta))$, такой, что $\|\,x_t(\theta)\|<B$, $\forall\ t\in[t_1,\ t_0+T)$.

Определение 3. Система (1.1) называется (α, A, t_0, T)-неустойчивой ($\alpha < A$), если существует хотя бы одна траектория $x_t^*(\theta)$, определяемая начальной функцией $\| x_{t_0}^* (\theta) \| \leqslant \alpha$, для которой в некоторый момент времени $t_1 \in (t_0, t_0 + T)$ имеет место соотношение $\| x_{t_1}^* (\theta) \| = A$.

Основная цель работы заключается в нахождении соотношений между конечными допусками на входе α и выходе A, B, временными ограничениями t_0, T и параметрами исследуемой системы (1.1), которые гарантировали бы устойчивость на конечном интервале времени.

Важно отметить, что одних лишь ограничений, накладываемых на параметры системы (1.1) для того чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость по Ляпунову, будет недостаточно для технической устойчивости. С другой стороны, введенная устойчивость (сжимающая устойчивость) может иметь место даже и в том случае, когда параметры системы (1.1) не обеспечивают ее устойчивость по Ляпунову.

2. Предварительно рассмотрим функционально-разностный оператор $D(x(\theta), t)$ и соответствующую ему функционально-разностную систему

$$(2.1)\qquad \begin{gathered} x(t) - g(x_t(\theta), t) = h(t); \quad t \geqslant t_0, \quad x_{t_0}(\theta) = \varphi_{t_0}(\theta) \\ h(t) \in C_0^* \equiv C([0, \infty), R^n) \end{gathered}$$

свойствами которых воспользуемся при доказательстве теорем технической устойчивости.

Определение 4. Оператор D называется экспоненциально возрастающим равномерно по отношению к пространству C_0^*, если существуют константы $K_1 > 0$, $K_2 > 0$ и a, такие, что для любых функций $\varphi_{t_0}(\theta) \in C_0$, $h(t) \in C_0^*$ и произвольного момента времени $t_0 \in [0, \infty)$ непрерывное решение $x_t(\theta)$ системы (2.1) удовлетворяет соотношению

$$(2.2)\qquad \|x_t(\theta)\| \leqslant K_1 \|\varphi_{t_0}(\theta)\| \exp\{a(t - t_0)\} + K_2 H(t - t_0) \sup_{t_0 \leqslant u \leqslant t} \|h(u)\|, \quad t \geqslant t_0$$

где $H(r)$ — показательная функция e^{ar}, если $a > 0$, линейная функция $b + cr$ при $a = 0$ и постоянная d при $a < 0$.

Достаточные условия для того, чтобы оператор D был экспоненциально возрастающим равномерно по отношению к C_0^*, дает

Лемма 1. Если матрица функций $\mu(\theta, t)$ такова, что для некоторого $\varepsilon \in (0, \tau]$

$$(2.3)\qquad \int_{-\tau}^{0} [d_\theta \mu(\theta, t)]\, x(\theta) \equiv \int_{-\tau}^{-\varepsilon} [d_\theta \mu(\theta, t)]\, x(\theta)$$

то оператор D экспоненциально возрастающий.

Доказательство. Имеем

$$\left| \int_{-\tau}^{-\varepsilon} [d_\theta \mu(\theta, t)]\, x_t(\theta) \right| \leqslant L_0 \| x_t(\theta) \|, \qquad -\tau \leqslant \theta \leqslant -\varepsilon, \qquad L_0 = \mathrm{const}$$

Предположим вначале, что $L_0 < 1$. Используя метод шагов, находим оценку непрерывного решения $x_t(\theta)$ системы (2.1). В качестве шагов берем полуинтервалы $[t_0 + (k - 1)\varepsilon,\ t_0 + k\varepsilon)$, $k = 1, 2, \ldots$.

Возьмем постоянную $N_0 = \tau / \varepsilon$, если τ / ε — целое число, и $N_0 = [\tau / \varepsilon] + 1$ в остальных случаях ($[a]$ — целая часть числа a). Эта постоянная характеризует продолжительность последействия. После N_0-го шага прекращается последействие состояний процесса, предшествующих моменту времени t_0.

Оценивая по шагам, на $(N_0 (k-1) + j)$-м полуинтервале $[t_0 + (N_0 (k-1) + j - 1)\varepsilon,\ t_0 + (N_0 (k-1) + j)\varepsilon)$, $j = 1, 2, \ldots, N_0$, $k = 1, 2, \ldots$, получаем

$$\| x_{t(kj)} (\theta) \| \leqslant L_0^{k-1} \| \varphi_{t_0} (\theta) \| + \sum_{l=0}^{N_0(k-1)+j-1} L_0{}^l S_{t_0} (h), \qquad S_{t_0} (h) \equiv \sup_{t_0 \leqslant u \leqslant t} \| h (u) \|$$

Нетрудно заметить, что на каждом из полуинтервалов $t_0 + (k-1) N_0 \varepsilon \leqslant t < t_0 + kN_0\varepsilon$, $k = 1, 2, \ldots$, справедливо неравенство

$$L_0{}^k \leqslant \exp \left\{ \left(\left[\frac{t-t_0}{\varepsilon N_0} \right] + 1 \right) \ln L_0 \right\} \leqslant \exp \left\{ \frac{\ln L_0}{\varepsilon N_0} (t - t_0) \right\}$$

Это соотношение не нарушается при $k \to \infty$ (возможность неограниченного процесса оценки по шагам вытекает из условия (2.3)). Поэтому при $t \geqslant t_0$

$$\| x_t (\theta) \| \leqslant L_0^{-1} \| \varphi_{t_0} (\theta) \| \exp \left\{ \frac{\ln L_0}{\varepsilon N_0} (t - t_0) \right\} + \frac{1}{1 - L_0} S_{t_0} (h)$$

Пусть теперь $L_0 \geqslant 1$. Как и выше, оценивая по шагам, на k-м полуинтервале $[t_0 + (k-1)\varepsilon,\ t_0 + k\varepsilon)$, $k = 1, 2, \ldots$, получаем

$$\| x_{t(k)} (\theta) \| \leqslant L_0{}^k \| \varphi_{t_0} (\theta) \| + \sum_{l=0}^{k-1} L_0{}^l S_{t_0} (h)$$

Воспользовавшись очевидным соотношением

$$k - 1 = \left[\frac{t - t_0}{\varepsilon} \right] \leqslant \frac{t - t_0}{\varepsilon} \tag{2.4}$$

получаем, что на каждом из рассматриваемых полуинтервалов

$$L_0{}^k \leqslant L_0 \exp \left\{ \frac{\ln L_0}{\varepsilon} (t - t_0) \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots \tag{2.5}$$

Соотношения (2.4) и (2.5) не нарушаются при $k \to \infty$. Поэтому при $t \geqslant t_0$

$$\| x_t (\theta) \| \leqslant L_0 \left[\| \varphi_{t_0} (\theta) \| + \frac{1}{L_0 - 1} S_{t_0} (h) \right] \exp \left\{ \frac{\ln L_0}{\varepsilon} (t - t_0) \right\}, \quad L_0 > 1$$

$$\| x_t (\theta) \| \leqslant \| \varphi_{t_0} (\theta) \| + \left[1 + \frac{1}{\varepsilon} (t - t_0) \right] S_{t_0} (h), \quad L_0 = 1$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Если оператор D — экспоненциально возрастающий равномерно по отношению к $C_0{}^*$ и $a < 0$, то существуют положительные константы $K_i{}^\circ$, $i = 1, 2, 3$, такие, что при любых $s \in [t_0, \infty)$ и $t \geqslant s$ непрерывное решение системы (2.1) удовлетворяет неравенству

$$\| x_t (\theta) \| \leqslant [K_1{}^\circ \| \varphi_{t_0} (\theta) \| + K_2{}^\circ S_{t_0} (h)] \exp \{ a (t - t_0) \} + K_3{}^\circ S_s (h) \tag{2.6}$$

Наряду с системой (2.1) рассмотрим систему

$$D (x_t (\theta), t) = D (\varphi_{t_0} (\theta), t_0) + p (t) - p (t_0) \tag{2.7}$$
$$t \geqslant t_0, \quad x_{t_0} (\theta) = \varphi_{t_0} (\theta)$$

где $p (t) \in C_0{}^*$.

Определение 5 [3]. Предположим, что $C_0^{**} \subset C_0^*$. Оператор D называется равномерно устойчивым по отношению к C_0^{**}, если существуют положительные константы M_1 и M_2, такие, что для любых функций $\varphi_{t_0}(\theta) \in C_0$, $p(t) \in C_0^{**}$ и произвольного момента времени $t_0 \in [0, \infty)$ решение $x_t(\theta)$ системы (2.7) удовлетворяет соотношению

$$\|x_t(\theta)\| \leqslant M_1 \|\varphi_{t_0}(\theta)\| + M_2 \sup_{t_0 \leqslant u \leqslant t} \|p(u) - p(t_0)\|, \quad t \geqslant t_0$$

В [3] показано, что если оператор D не зависит от t, то из условия равномерной устойчивости следует, что корни λ уравнения

$$\det\left[E - \int_{-\tau}^{0} [d\mu(\theta)]\lambda^{\theta}\right] = 0$$

по модулю не больше $1 - \delta$, $\delta > 0$. Обратное утверждение не доказано.

Определение 6. Будем говорить, что система функций $q_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, k$ объединена посредством функции $q^\circ(t)$ с коэффициентами объединения $1 \leqslant m_1 < m_2 < \ldots < m_k$ (m_j — целые числа), если $q_j(t) = q_{m_j}^\circ(t)$, где $q_{m_j}^\circ(t) \equiv q^\circ(q^\circ(\ldots(q^\circ(t))\ldots))$ — m_j-кратная итерация операции $q^\circ(t)$.

В случае, когда $q_j = t - \tau_j$ (τ_j — константы, $1 \leqslant j \leqslant k$), объединение посредством функции $q^\circ(t) = t - \Delta_0$ равносильно соизмеримости констант τ_j с наибольшей общей мерой Δ_0.

Лемма 2. Пусть оператор D имеет вид

$$D(x_t(\theta), t) = x(t) - \sum_{i=1}^{M} P_i(t)\, x(q_i(t)), \quad q_i(t) \geqslant t - \tau$$

где $P_i(t)$ — $n \times n$-матрицы непрерывных функций и функции $q_i(t)$ $i = 1, 2, \ldots, M$ объединены посредством непрерывной возрастающей при $t \geqslant t_0$ функции $q^\circ(t)$, удовлетворяющей условию $t - q^\circ(t) \geqslant d_0 > 0$, $d_0 = \mathrm{const}$. Если корни $\lambda(t)$ уравнения

$$\det\left[E - \sum_{i=1}^{M} P_i(t)\, \lambda(t)^{-m_i}\right] = 0$$

по модулю не превосходят $1 - \delta$ ($\delta > 0$), то оператор D равномерно устойчив по отношению к C_0^*.

Лемма 2 является естественным обобщением аналогичной леммы [3] на случай переменного запаздывания.

Лемма 3 [3]. Если оператор D равномерно устойчив по отношению к C_0^*, то существуют положительные константы a^*, K_1^*, K_2^* и K_3^*, такие, что для любых функций $\varphi_{t_0}(\theta) \in C_0$, $h(t) \in C_0^*$ и произвольного момента времени $t_0 \in [0, \infty)$ непрерывное решение $x_t(\theta)$ системы (2.1) удовлетворяет неравенству

$$\|x_t(\theta)\| \leqslant [K_1^* \|\varphi_{t_0}(\theta)\| + K_2^* S_{t_0}(h)] \exp\{-a^*(t - t_0)\} + K_3^* S_{t_0}(h)$$

При этом замечание 1 об особенностях констант K_i^*, $i = 1, 2, 3$ остается в силе.

Леммы 2 и 3 позволяют в ряде случаев улучшить оценку решения системы (2.1), полученную в лемме 1.

3. Для решения вопроса об устойчивости в конечном систем нейтрального типа (1.1) воспользуемся методом Ляпунова—Красовского [1-3]. Будем рассматривать непрерывные по своим аргументам функционалы $V(x(\theta), t) \equiv V(x(\theta); D(x(\theta), t); t)$, определенные на непрерывных функциях $x(t) \in C_0$ и переводящие ограниченное множество элементов пространства C_0 в ограниченное множество элементов пространства R^1. Под верхней правой производной функционала V в силу системы (1.1) будем подразумевать

$$\bar{V}_1^{\cdot} \equiv \overline{\lim_{\Delta t \to 0+}} \frac{1}{\Delta t} [V(x_{t+\Delta t}^*(\theta), t + \Delta t) - V(x(\theta), t)]$$

где $x_{t+\Delta t}^*(\theta)$ — решение системы (1.1), определяемое начальным моментом времени t и начальной функцией $x_t^*(\theta) = x(\theta)$. Аналогично определим и нижнюю правую производную $V_1^{\cdot}$ функционала V в силу системы (1.1).

Теорема 1. Пусть оператор $\bar{D}$ — экспоненциально возрастающий равномерно по отношению к C_0^*, причем норма $L(t)$ этого оператора удовлетворяет соотношению

$$1^\circ.\ L(t) < (A_0 - K_1\alpha)\frac{1}{\alpha K_4} \equiv \frac{\Gamma_1}{\alpha}, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T)$$

$$A_0 \equiv \min\{Ae^{-aT}; A\}, \quad K_4 \equiv \max\{K_2; (b + cT)K_2; dK_2\}$$

Если существуют функционал $V(x(\theta), t)$ и интегрируемая функция $\psi(t)$, такие, что

$$2^\circ.\ \bar{V}_1^{\cdot} < \psi(t), \quad \alpha \leqslant \|x(\theta)\| \leqslant A, \quad \|D(x(\theta), t)\| \leqslant \Gamma_1, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T)$$

$$3^\circ.\ \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,dt \leqslant \inf_{Q_1(t_2)} V(x(\theta), t_2) - \sup_{Q_2(t_1)} V(x(\theta), t_1); \quad \forall t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + T)$$

$$t_2 > t_1$$

$$Q_1(t) = \{x(\theta)\colon \Gamma_1 / L(t) \leqslant \|x(\theta)\| \leqslant A, \quad \|D(x(\theta), t)\| = \Gamma_1\}$$

$$Q_2(t) = \{x(\theta\colon \|x(t)\| = \alpha, \quad \|D(x(\theta), t)\| \leqslant \alpha L(t)\}, \quad \forall t \in [t_0, t_0 + T)$$

то система (1.1) (α, A, t_0, T)-устойчива.

Доказательство. Пусть $x_t(\theta)$ — решение системы (1.1), определенное начальной функцией $x_{t_0}(\theta)$, лежащей в области $\|x(\theta)\| \leqslant \alpha$. Из условия 1° следует, что

$$\|D(x_{t_0}(\theta), t_0)\| \leqslant L(t_0)\|x_{t_0}(\theta)\| \leqslant \Gamma_1$$

Предположим, что впервые в некоторый момент времени $t_2 \in (t_0, t_0 + T)$

$$\|D(x_{t_2}(\theta), t_2)\| = \Gamma_1 \tag{3.1}$$

Если $\Gamma_1 > AL(t_2)$, то из (3.1) следует, что в рассматриваемый момент $\|x_{t_2}(\theta)\| > A$. С другой стороны, по предположению $\|D(x_t(\theta), t)\| \leqslant \Gamma_1$

при $t \in [t_0, t_2]$. Это означает в соответствии с соотношением (2.2), что $\| x_{t_2}(\theta) \| \leqslant A$. Получили противоречие. Следовательно, $\| D(x_{t_2}(\theta), t_2) \| < \Gamma_1$.

Если же $\Gamma_1 \leqslant A\ L(t_2)$, то, воспользовавшись условием 1°, из (3.1) получаем, что $\| x_{t_2}(\theta) \| \geqslant \Gamma_1 / L(t_2) > \alpha$. Поэтому существует момент времени $t_1 < t_2$, для которого $\| x_{t_1}(\theta) \| = \alpha$ ($\| D(x_{t_1}(\theta), t_1) \| \leqslant L(t_1)\alpha$) и $\| x_t(\theta) \| > \alpha$ при $t_1 < t \leqslant t_2$. На основании соотношения (2.2) заключаем, что $\alpha \leqslant \| x_t(\theta) \| \leqslant A$, $\forall t \in [t_1, t_2]$. В рассматриваемой области выполнены соотношения 2° и 3°. Поэтому

$$\inf_{Q_1(t_2)} V(x(\theta), t_2) - \sup_{Q_2(t_1)} V(x(\theta), t_1) \leqslant V(x_{t_2}(\theta), t_2) - V(x_{t_1}(\theta), t_1) \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_1}^{t_2} \dot{V}_1(t)\,dt < \int_{t_1}^{t_2} \psi(t)\,dt \leqslant \inf_{Q_1(t_2)} V(x(\theta), t_2) - \sup_{Q_2(t_1)} V(x(\theta), t_1)$$

Полученное соотношение противоречиво. Следовательно, и в этом случае $\| D(x_{t_2}(\theta), t_2) \| < \Gamma_1$.

В силу произвольности рассматриваемого момента времени t_2 заключаем, что $\| D(x_t(\theta), t) \| < \Gamma_1$ при всех $t \in [t_0, t_0 + T)$. Последнее приводит в соответствии с соотношением (2.2) к неравенству $\| x_t(\theta) \| < A$ при $t \in [t_0, t_0 + T)$. Теорема доказана.

Теорема 2. Если существуют функционал $V(x(\theta), t)$, интегрируемые функции $\psi_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ и константы β, γ $(0 < \beta < B,\ 0 \leqslant \gamma \leqslant \beta)$, такие, что при всех $t \in [t_0, t_0 + T)$ выполнены условия (1° — 3°) теоремы 1

4°. норма $L(t)$ оператора D удовлетворяет неравенству

$$\beta L(t) \leqslant \frac{B_0 - K_1\beta}{K_4} \equiv \Gamma_2, \quad B_0 \equiv \min\{Be^{-aT};\ B\}$$

5°. $\dot{V}_1 < \psi_2(t), \quad \beta \leqslant \| x(\theta) \| \leqslant A, \quad \| D(x(\theta), t) \| \leqslant \Gamma_1$

6°. $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T} \psi_2(t)\,dt \leqslant \inf_{Q_3(t_0+T)} V(x(\theta), t_0 + T) - \sup_{Q_4(t_0)} V(x(\theta), t_0)$

$$Q_3(t) = \{x(\theta):\ \beta \leqslant \| x(\theta) \| \leqslant A,\ \| D(x(\theta), t) \| \leqslant \Gamma_1\}$$

$$Q_4(t) = \{x(\theta):\ \beta \leqslant \| x(\theta) \| \leqslant \alpha,\ \| D(x(\theta), t) \| \leqslant \alpha L(t)\}$$

7°. $\dot{V}_1 < \psi_3(t), \quad \gamma \leqslant \| x(\theta) \| \leqslant B, \quad 0 \leqslant \| D(x(\theta), t) \| \leqslant \Gamma_2$

8°. $\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} \psi_3(t)\,dt \leqslant \inf_{Q_5(t_2)} V(x(\theta), t_2) - \sup_{Q_6(t_1)} V(x(\theta), t_1), \quad \forall t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + T)$

$$t_2 > t_1$$

$$Q_5(t) = \{x(\theta):\ \Gamma_2 / L(t) \leqslant \| x(\theta) \| \leqslant B,\ \| D(x(\theta), t) \| = \Gamma_2\}$$

$$Q_6(t) = \{x(\theta):\ \gamma \leqslant \| x(\theta) \| \leqslant \beta,\ 0 \leqslant \| D(x(\theta), t) \| \leqslant \beta L(t)\}$$

то система (1.1) (α, A, B, t_0, T)-сжимающе устойчива.

Доказательство. Пусть $x_t(\theta)$ — решение системы (1.1), определяемое начальной функцией $x_{t_0}(\theta)$, расположенной в области $\beta \leqslant \| x(\theta) \| \leqslant \alpha$. Используя теорему 1, получим, что $\| x_t(\theta) \| < A$ на конечном интервале времени $[t_0, t_0 + T)$.

Предположим теперь, что исследуемое решение остается в области $\beta \leqslant \| x(\theta) \| \leqslant A$. Используя условия 5° и 6°, получаем

$$\inf_{Q_3(t_0+T)} V(x(\theta), t_0+T) - \sup_{Q_4(t_0)} V(x(\theta), t_0) \leqslant \tag{3.2}$$

$$\leqslant V(x_{t_0+T}(\theta), t_0+T) - V(x_{t_0}(\theta), t_0) \leqslant \int_{t_0}^{t_0+T} \bar{V}_1{}^{\cdot}(t)\, dt <$$

$$< \int_{t_0}^{t_0+T} \psi_2(t)\, dt \leqslant \inf_{Q_3(t_0+T)} V(x(\theta), t_0+T) - \sup_{Q_4(t_0)} V(x(\theta), t_0)$$

Из противоречивости неравенства следует, что сделанное предположение неверно, и следовательно, в некоторый момент времени $t^* \in (t_0, t_0+T)$ решение находится в области $\| x(\theta) \| < \beta$, причем по условию 4°

$$\| D(x_{t^*}(\theta), t^*) \| \leqslant L(t^*) \| x_{t^*}(\theta) \| < \Gamma_2$$

Осталось показать, что $\| x_t(\theta) \| < B$ при $t \in [t^*, t_0+T)$.

Рассмотрим случай, когда $\Gamma_2 = \beta L(t)$ $(0 \leqslant \gamma < \beta)$ хотя бы в один момент времени $t \in [t^*, t_0+T)$.

Предположим, что впервые в некоторый момент времени

$$\| D(x_{t_4}(\theta), t_4) \| = \Gamma_2 \tag{3.3}$$

Легко показать, что соотношение (3.3) невозможно в случае, когда $\Gamma_2 > BL(t_4)$.

Если же $\Gamma_2 \leqslant BL(t_4)$, то, воспользовавшись условием 4°, из соотношения (3.3) получим, что $\| x_{t_4}(\theta) \| \geqslant \beta$. Следовательно, существуют моменты времени t_1, t_3 $(t_0 \leqslant t_1 < t_3 \leqslant t_4)$, для которых $\gamma \leqslant \| x_t(\theta) \| \leqslant \beta$ при $t \in [t_1, t_3]$ и $\beta \leqslant \| x_t(\theta) \| \leqslant B$ при $t \in [t_3, t_4]$. Зафиксировав момент времени $t_2 \in [t_1, t_3]$, $t_2 < t_4$, из соотношений 7° и 8° будем иметь противоречивое неравенство, аналогичное (3.2). Следовательно, и в этом случае $\| D(x_{t_4}(\theta), t_4) \| < \Gamma_2$.

Используя произвольность рассматриваемого момента времени t_4, нетрудно получить из соотношений (2.2) и 4°, что $\| x_t(\theta) \| < B$ при $t \in [t^*, t_0+T)$.

Для случая $\beta L(t) < \Gamma_2$ $(\gamma = \beta)$ доказательство аналогично.

Если же начальная функция $x_{t_0}(\theta)$, определяющая решение исследуемой системы, лежит в области $\| x(\theta) \| < \beta$, то, применяя изложенный способ доказательства, можно показать, что рассматриваемое решение при всех $t \in [t_0, t_0+T)$ будет находиться в области $\| x(\theta) \| < B < A$, откуда будет следовать, что $\| x_t(\theta) \| < B$ при $t \in [t^*, t_0+T)$. Теорема доказана.

Замечание 2. Для оператора D, равномерно устойчивого по отношению к пространству $C_\theta{}^*$, теоремы 1 и 2 останутся в силе, если положить

$$\Gamma_1{}^* \equiv \frac{A - K_1{}^*\alpha}{K_2{}^* + K_3{}^*}, \quad \Gamma_2{}^* \equiv \frac{B - K_1{}^*\beta}{K_2{}^* + K_3{}^*}$$

Следствие 1. Пусть для оператора D, равномерно устойчивого по отношению к пространству $C_0{}^*$, существуют непрерывные по своим аргументам функции $u_i(r, t)$, $i = 1, 2, 3$ ($u_i(r, t)$, $i = 1, 2$ — неубывающие по r при $r > 0$, и $u_3(r, t)$ — неположительная и невозрастающая по r при $r > 0$) и положительные константы Γ_1^*, Γ_2^*, β, N, такие, что:

1) Γ_1^*, Γ_2^*, β удовлетворяют условиям 1° и 4° теорем 1 и 2, причем условие 4° — строгое неравенство

$$2)\ u_1(\| D(x(\theta), t)\|, t) \leqslant V(x(\theta), t) \leqslant u_2(\| x(\theta)\|, t)$$
$$\dot{V}_1 \leqslant u_3(\| D(x(\theta), t)\|, t); \quad \forall\, t \in [t_0, t_0 + T)$$

$$3)\ \int_{t_1}^{t_2} u_3(0, t)\, dt < u_1(\Gamma_1^*, t_2) - u_2(\alpha, t_1), \quad \forall t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + T); \quad t_2 > t_1$$

$$4)\ \int_{t_1}^{t_2} u_3(0, t)\, dt < u_1(\Gamma_2^*, t_2) - u_2(\beta, t_1), \quad \forall t_1, t_2 \in [t_0, t_0 + T); \quad t_2 > t_1$$

$$5)\ \| f(x(\theta), t)\| \leqslant N, \quad \| x(\theta)\| < A; \quad t \in [t_0, t_0 + T)$$

Если к тому же для некоторого целого числа k ($1 \leqslant k \leqslant k_0$), где k_0 — целочисленное решение неравенства $k_0\nu < T \leqslant (k_0 + 1)\nu$, $\nu \equiv a^{*-1}\ln[(K_1^*\alpha + K_2^*\Gamma_1^*)\beta^{-1}]$ существует разбиение отрезка $[t_0, t_0 + T]$ точками t_j

$$6)\ t_{j-1} + \nu \leqslant t_j \leqslant t_0 + T - (k - j)\nu, \quad j = 1, 2, \ldots, k - 1$$

такое, что для констант

$$\beta_{kj} \equiv K_3^{*-1}[\beta - (K_1^*\alpha + K_2^*\Gamma_1^*)\exp\{-a^*(t_j - t_{j-1}\}]$$
$$\pi_{kj} \equiv \max[\beta_{kj} - N(t_j - t_{j-1}); \ 0], \quad j = 1, 2, \ldots, k$$
$$t_k \equiv t_0 + T$$

можно выбрать набор чисел ρ_{kj}, $j = 1, 2, \ldots, k$ ($\pi_{kj} \leqslant \rho_{kj} \leqslant \beta_{kj}$), для которых

$$7)\ \sum_{j=1}^{k} N^{-1}[\beta_{kj} - \rho_{kj}] \sup_{t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j} u_3(\rho_{kj}, t) < u_1(\pi_{kk}, t_0 + T) - u_2(\alpha, t_0)$$

то система (1.1) (α, A, B, t_0, T)-сжимающе устойчива.

Доказательство. Из соотношений 3), 4) и условия 1° теоремы 1 следует, что при всех $t \in [t_0, t_0 + T)$ решение $x_t(\theta)$, определяемое начальной функцией $\beta \leqslant \| x_{t_0}(\theta)\| \leqslant \alpha$, удовлетворяет условиям $\| D(x_t(\theta), t)\| < \Gamma_1^*$ и $\| x_t(\theta)\| < A$.

Предположим теперь, что $\| x_t(\theta)\| > \beta$ при всех $t \in [t_0, t_0 + T)$. Разобьем отрезок $[t_0, t_0 + T]$ на k частей точками, абсциссы которых удовлетворяют условию 6). Полагая $s = t_{j-1}$, $t = t_j$, из соотношений (2.6) будем иметь

$$\beta \leqslant [K_1^*\alpha + K_2^* \sup_{t_0 \leqslant u \leqslant t_j} \| D(x_u(\theta), u)\|] \exp\{-a^*(t_j - t_{j-1})\} +$$
$$+ K_3^* \quad T_j \quad \leqslant (K_1^*\alpha + K_2^*\Gamma_1^*)\exp\{-a^*(t_j - t_{j-1})\} + K_3^* T_j$$
$$T_j \equiv \sup_{t_{j-1} \leqslant u \leqslant t_j} \| D(x_u(\theta), u)\|$$

откуда $T_j \geqslant \beta_{kj}$. Последнее означает, что существует момент времени $t_j^\circ \in [t_{j-1}, t_j]$, в который

$$\| D(x_{t_j^\circ}(\theta), t_j^\circ) \| \geqslant \beta_{kj}$$

Используя свойства функции $u_3(r, t)$ и полученное неравенство, для любого ρ_{kj} $(\pi_{kj} \leqslant \rho_{kj} \leqslant \beta_{kj})$ на каждом из k рассматриваемых отрезков имеем

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \overline{V}_1^{\boldsymbol{\cdot}}(t)\,dt \leqslant N^{-1} U_j, \quad U_j \equiv [\beta_{kj} - \rho_{kj}] \sup_{t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j} u_3(\rho_{kj}, t)$$

На отрезке $[t_0, t_0 + T]$ будет справедлива оценка

$$\int_{t_0}^{t_0+T} \overline{V}_1^{\boldsymbol{\cdot}}(t)\,dt \leqslant N^{-1} \sum_{j=1}^{k} U_j \tag{3.4}$$

Предположим, что рассматриваемое разбиение отрезка и выбранный набор констант ρ_{kj} удовлетворяют условиям следствия 1. Тогда, сопоставляя соотношение (3.4), условия 3) и 4), приходим к выводу, что существует момент времени $t^* \in (t_0, t_0 + T)$, для которого $\| x_{t^*}(\theta) \| < \beta$.

Теперь с помощью условий 3), 4) следствия 1 и условия 4° теоремы 2 нетрудно показать, что $\| x_t(\theta) \| < B$ при $t \in [t^*, t_0 + T)$.

В случае, когда начальная функция $x_{t_0}(\theta)$ принадлежит области $x(\theta) \| < \beta$, доказательство очевидно. Следствие доказано.

4. Выведем теперь условия (α, A, t_0, T)-неустойчивости системы (1.1).

Теорема 3. Если существуют функционал $V(x(\theta), t)$, ограниченная функция $\zeta(t)$ и интегрируемая функция $\psi(t)$, такие, что в связном непустом множестве $Q(t)$, определяемом соотношениями (T_1 — некоторая константа, $0 < T_1 \leqslant T$)

а) $Q(t) = Q_1(t) \cap Q_2(t), \quad \forall\, t \in [t_0, t_0 + T_1)$

$$Q_1(t) = \{x(\theta): \quad \|x(\theta)\| \leqslant A, \quad \|D(x(\theta), t)\| \leqslant L(t)\|x(\theta)\|\}$$
$$Q_2(t) = \{x(\theta): \ V(x(\theta), t) > \zeta(t)\}$$

б) $Q(t_0) \cap \{x(\theta): \|x(\theta)\| \leqslant \alpha\} \neq \varnothing$

в) $\exists t^* \in (t_0, t_0 + T_1), \quad Q(t^*) \cap \{x(\theta): \| x(\theta) \| = A\} \neq \varnothing$

выполнены условия

1°. $\underline{V}_1^{\boldsymbol{\cdot}} \geqslant \psi(t), \quad x(\theta) \in Q(t), \quad \forall\, t \in [t_0, t_0 + T_1)$

2°. $\displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \psi(t)\,dt \geqslant \zeta(t_1) - \zeta(t_0), \quad \forall t_1 \in [t_0, t_0 + T_1)$

3°. $\displaystyle\int_{t_0}^{t_0+T_1} \psi(t)\,dt \geqslant \sup_{Q(t_0+T_1)} V(x(\theta), t_0 + T_1) - \zeta(t_0)$

то система (1.1) (α, A, t_0, T)-неустойчива.

Доказательство. Пусть $x_t(\theta)$ — решение системы (1.1), определяемое начальной функцией $x_{t_0}(\theta) \in Q(t_0)$, $\| x_{t_0}(\theta) \| \leqslant \alpha$. По условию теоремы $V(x_{t_0}(\theta), t_0) > \zeta(t_0)$.

Предположим, что впервые в момент времени $t_1 \in (t_0, t_0+T_1)$ $V(x_{t_1}(\theta), t_1) = \zeta(t_1)$. При этом естественно предполагать, что $\| x_t(\theta) \| < A$ при всех $t \in [t_0, t_0+T_1)$. Тогда

$$\zeta(t_1) - \zeta(t_0) > V(x_{t_1}(\theta), t_1) - V(x_{t_0}(\theta), t_0) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{t_0}^{t_1} \underline{V}_1^{\cdot}(t)\, dt \geqslant \int_{t_0}^{t_1} \psi(t)\, dt \geqslant \zeta(t_1) - \zeta(t_0)$$

Полученное соотношение противоречиво. Поэтому $V(x_t(\theta), t) > \zeta(t)$ при всех $t \in [t_0, t_0+T_1)$, и, следовательно, $x_t(\theta) \in Q(t)$. Используя этот факт, из 3° получаем противоречивое неравенство

$$\sup_{Q(t_0+T_1)} V(x(\theta), t_0+T_1) - \zeta(t_0) > V(x_{t_0+T_1}(\theta), t_0+T_1) - V(x_{t_0}(\theta), t_0) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{t_0}^{t_0+T_1} \underline{V}_1^{\cdot}(t)\, dt \geqslant \int_{t_0}^{t_0+T_1} \psi(t)\, dt \geqslant \sup_{Q(t_0+T_1)} V(x(\theta), t_0+T_1) - \zeta(t_0)$$

Значит, существует момент времени $t_2 \in (t_0, t_0+T_1)$, такой, что $\| x_{t_2}(\theta) \| = A$. Теорема доказана.

Следствие 2. Если существуют непрерывная функция $u_1(r_1, r_2, t)$, возрастающая по r_2 при $r_2 > 0$, непрерывные функции $u_i(r, t)$, $i = 2, 3$, возрастающие по r при $r > 0$, положительные функции $\beta(t)$, $\gamma(t)$ и постоянная T_1 $(0 < T_1 \leqslant T)$, такие, что при всех $t \in [t_0, t_0+T_1)$

1°. $u_1(\| x(\theta) \|; \| D(x(\theta), t) \|; t) \leqslant V(x(\theta), t) \leqslant u_2(\| D(x, (\theta), t) \|; t)$

$\underline{V}_1^{\cdot} \geqslant u_3(\| D(x(\theta), t) \|, t)$

2°. $\beta(t) < \alpha, \quad \gamma(t) < L(t)\, \beta(t)$

3°. $u_1^{-1}[r_1; u_1(\beta(t), \gamma(t), t); t] < L(t)\, r_1$ при $\beta(t) < r_1 \leqslant A$

4°. $\int_{t_0}^{t} u_3\{u_2^{-1}[u_1(\beta(s), \gamma(s), s) s], s\}\, ds \geqslant u_1(\beta(t), \gamma(t), t) - u_1(\beta(t_0), \gamma(t_0), t_0)$

5°. $\int_{t_0}^{t_0+T_1} u_3\{u_2^{-1}[u_1(\beta(s), \gamma(s), s), s], s\}\, ds \geqslant u_2[AL(t_0+T_1), t_0+T_1) -$

$- u_1(\beta(t_0), \gamma(t_0), t_0)$

то система (1.1) (α, A, t_0, T)-неустойчива.

Для доказательства достаточно в качестве $\zeta(t)$ рассмотреть функцию $u_1(\beta(t), \gamma(t), t)$ и с помощью условий 3° и 4° построить требуемую область $Q(t)$.

Автор благодарит С. Б. Норкина за замечания при обсуждении результатов работы.

Поступила 25 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
2. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения, М., Физматгиз, 1959.
3. *Cruz M. A., Hale J. K.* Stability of functional differential equations of neutral type. J. Different. Equations, 1970, vol. 7, No. 2.
4. *Weiss L., Infante E. F.* On the stability of systems defined over a finite time intervals. Proc. Nath. Acad. Sci. USA, 1965, vol. 54, No. 1.
5. *Мартинюк А. А.* Про (λ, A, t_0, T, $\|\cdot\|$)-стійкість систем із запизнениям. Доп. АН УРСР. С. А, 1969, № 4.
6. *Мартынюк А. А.* Теорема о неустойчивости в конечном систем с последствием. В сб.: Дифференциально-разностные уравнения. Киев, Из. Ин-та матем. АН УССР, 1971.
7. *Hale J. K., Cruz M. A.* Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary systems. Ann. mat. pura ed appl., 1970, vol. 85, p. 63—82.