Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 531.31

НЕКАНОНИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Л. М. Мархашов

(Москва)

Выясняется характер упрощений, которые могут быть сделаны в функции Гамильтона нерезонансной системы при помощи формальных неканонических преобразований. Указываются симметрии таких систем, не порождаемые их первыми интегралами. На примере гамильтоновой системы с двумя степенями свободы показано, что неканонические преобразования, сохраняющие нормальную форму, но сдвигающие ее коэффициенты, существуют и при наличии резонансов. Приводятся формулы, определяющие эти преобразования.

1. Постановка задачи и результат. Известно, что коэффициенты нормальной формы гамильтониана являются каноническими инвариантами [1] (т. е. не меняются ни при каких канонических преобразованиях, сохраняющих нормальную форму). Несмотря на то что группа канонических преобразований бесконечномерна, в некотором смысле она узка, так как подчинена жесткому требованию: преобразовывать всякую гамильтонову систему в гамильтонову. В то же время максимальная группа преобразований, сохраняющая лишь некоторый подкласс гамильтоновых систем, уже не будет, вообще говоря, канонической. Зато действие ее на выбранном подклассе станет эффективней, поскольку здесь эта группа оказывается шире канонической.

Точно таким же расширением групп на подклассах можно объяснить и появление симметрий гамильтоновых систем, которые не порождаются первыми интегралами.

В качестве изучаемого подкласса гамильтоновых систем можно взять нормальную форму. Тогда для нерезонансных систем оказывается возможным выяснить характер упрощений, которые можно совершить над гамильтонианом при помощи формальных неканонических преобразований.

Именно, справедливо утверждение.

Теорема. Пусть для гамильтониана

$$H = \sum_i \alpha_i u_i + \sum_{i,j} \beta_{ij} u_i u_j + H_5 + H_6 + \ldots, \quad u_i = x_i^2 + p_i^2$$

стационарной вещественной нерезонансной системы выполнены условия

$$\det\ (\beta_{ij}) \neq 0, \quad \beta_{ij} \neq 0, \quad i,\ j \leqslant n \tag{1.1}$$

Тогда формальной неканонической заменой переменных функцию H можно привести к виду

$$(1.2)\qquad H = \sum_i \bar{\alpha}_i u_i + \sum_{i,j} \beta_{ij} u_i u_j + \sum_{k=1}^{n} f_k(u_k)$$

в котором ни один из формальных рядов $f_k(u_k) = a_{k3} u_k^3 + a_{k4} u_k^4 + \ldots$ уже не может быть изменен.

Операторы, отвечающие однопараметрическим группам симметрии, имеют вид (Φ_k — произвольные функции)

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi_k(u_1, \ldots, u_n)\left(p_k \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial p_k}\right)$$

(эти преобразования будут каноническими, если $\Phi_k = \partial\varphi / \partial u_k$).

Рассмотрим теперь гамильтонову систему с двумя степенями свободы при наличии резонанса порядка $q = m_1 + m_2$. По теореме Мозера [1] гамильтониан системы можно привести к нормальной форме, имеющей в канонических полярных координат x_ν, p_ν вид

$$H = \sum_{k=0}^{\infty} (\rho_1^{m_1} \rho_2^{m_2})^{k/2} f_{(k)}(\rho_1, \rho_2)(a_k e^{ik\theta} + \bar{a}_k e^{-ik\theta})$$

($f_k(\rho)$ — формальные степенные ряды по целым степеням ρ, $\theta = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2$ — резонансная фаза)

$$f_{(0)}(\rho) = m_2\rho_1 - m_1\rho_2 + O(\rho^2), \quad \alpha_1 = m_2, \quad \alpha_2 = -m_1$$
$$(x_\nu = \sqrt{\rho_\nu}\cos\varphi_\nu, \quad p_\nu = \sqrt{\rho_\nu}\sin\varphi_\nu)$$

В новых канонических переменных

$$u_1 = \frac{1}{q}(m_2\rho_1 - m_1\rho_2), \qquad u_2 = \frac{1}{q}(\rho_1 + \rho_2)$$
$$\theta = m_1\varphi_1 + m_2\varphi_2, \qquad \alpha = \varphi_1 - \varphi_2$$

уравнения движения запишутся в виде

$$u_1^{\cdot} = 0, \quad \alpha^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial u_1}, \quad u_2^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \theta^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial u_2}$$

Обозначим через H^* результат подстановки в H вместо коэффициентов a_k величин ζ_k их бесконечно малых сдвигов.

Тогда H^* определяется по формуле

$$(1.3)\qquad H^* = f(u_1, \ H) - \left(\varphi_1(u_1)\frac{\partial H}{\partial u_1} + \varphi_2^{\circ}\frac{\partial H}{\partial u_2} + \psi^{\circ}\frac{\partial H}{\partial \theta}\right)$$

где функции f, φ_2°, ψ° удовлетворяет единственному уравнению

$$(1.4)\qquad \frac{\partial H}{\partial u_1}\frac{\partial \varphi_2^{\circ}}{\partial u_2} - \frac{\partial H}{\partial u_2}\frac{\partial \varphi_2^{\circ}}{\partial u_1} + \frac{\partial H}{\partial u_1}\frac{\partial \psi^{\circ}}{\partial \theta} - \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial \psi^{\circ}}{\partial u_1} = \Phi^*(u_1, H)\frac{\partial H}{\partial u_1} - \frac{\partial f}{\partial u_1}$$

а $\varphi_1(u_1)$ и $\Phi^*(u_1, H)$ — произвольные функции своих аргументов.

При использовании формул (1.3) и (1.4) для упрощения гамильтониана возникают некоторые трудности. Здесь ограничимся лишь замечанием, что H^*, как это видно из формул, может изменяться в широких пределах, что дает возможность убрать из разложения гамильтониана H большое число членов.

Вывод формул (1.3) и (1.4) в этой работе подробно не приводится.

2. Доказательство теоремы. В вещественной гамильтоновой системе удобно перейти к комплексным переменным $z_k = x_k + ip_k$, $\bar{z}_k = x_k - -ip_k$. Если $H \to -2iH$, то такая замена оказывается канонической. Система запишется в виде

$$z_k^{\cdot} = \partial H / \partial \bar{z}_k, \quad \bar{z}_k^{\cdot} = -\partial H / \partial z_k$$

При помощи преобразования Биркгофа система приводится к нормальной форме [2], так что $H = H(u_1, \ldots, u_n)$, $u_k = z_k \bar{z}_k$ и

$$z_k^{\cdot} = \frac{\partial H}{\partial u_k} z_k, \quad \bar{z}_k^{\cdot} = -\frac{\partial H}{\partial u_k} \bar{z}_k$$

Оператор сдвига по траекториям системы принимает вид

$$L = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial u_k} \left(z_k \frac{\partial}{\partial z_k} - \bar{z}_k \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right)$$

Пусть

$$Z = \sum_{j=1}^{n} \left(\xi_j(u) z_j \frac{\partial}{\partial z_j} + \bar{\xi}_j(u) \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \right) + \sum_i \zeta_i(a) \frac{\partial}{\partial a_i} \equiv$$
$$\equiv Y + \sum_i \zeta_i(a) \frac{\partial}{\partial a_i}$$

— оператор (бесконечно малого преобразования), отвечающий однопараметрической группе G преобразований пространства $\{z, \bar{z}, a\}$ в себя (a_i — коэффициенты разложения в степенной ряд по u гамильтониана H). Для того чтобы преобразования группы G переводили гамильтонову систему снова в гамильтонову (а следовательно, и каждое движение исходной системы — в некоторое движение преобразованной системы), необходимо, чтобы операторы L и Z коммутировали: $[L, Z] = 0$. Отсюда

$$[L, Y] = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial H^*}{\partial u_k} \left(z_i \frac{\partial}{\partial z_i} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \right) \tag{2.1}$$

Здесь

$$H^* = \sum_i \zeta_i(a) \frac{\partial H}{\partial a_i} \tag{2.2}$$

Поскольку H зависит от параметров a_i линейно, то функция H^* есть результат замены в гамильтониане H коэффициентов a_i величинами $\zeta_i(a)$ их бесконечно малых сдвигов.

Вычислим коммутатор $[L, Y]$. Опуская подробные выкладки, найдем

$$[L, Y] = -\sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} u_j (\xi_j + \bar{\xi}_j) \frac{\partial^2 H}{\partial u_k \partial u_j} \right) \left(z_k \frac{\partial}{\partial z_k} - \bar{z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_k} \right)$$

Сопоставление с формулой (2.1) дает

$$\frac{\partial H^*}{\partial u_k} = -\sum_{j=1}^{n} u_j \psi_j(u) \frac{\partial^2 H}{\partial u_k \partial u_j}, \quad \psi_j(u) = \xi_j + \bar{\xi}_j \quad (k \leqslant n) \tag{2.3}$$

Те преобразования фазовых переменных z_k, $\bar{z}_k$, при которых все коэффициенты a_i гамильтониана H остаются неизменными, дают группу симметрии исходной системы. Поэтому группа симметрии порождается всеми функциями ξ_j, для которых $H^* = 0$. Из формулы (2.3) видно, что если $\det(\partial^2 H/\partial u_k \partial u_j) \neq 0$ (т. е. выполнены условия (1.1)), то $\psi_j(u) = 0$, $j \leqslant n$ и $\xi_j = i\Phi_j(u_1, \ldots, u_n)$, где Φ_j — произвольные функции. Если условия (1.1) не выполнены, то группа симметрии будет иметь дополнительно $m = n - \operatorname{rank}(\partial^2 H / \partial u_k \partial u_j)$ независимых образующих.

Рассмотрим теперь преобразования, сдвигающие коэффициенты гамильтониана H.

Если $\psi_j(u)$ можно выбрать так, что H^* содержит слагаемое с коэффициентом единица, то одноименное слагаемое может быть уничтожено в H формальным преобразованием. Это преобразование оставляет на месте все те коэффициенты в H, которые стоят при слагаемых, от которых H^* не зависит. Остальные коэффициенты разложения H преобразуются некоторым образом. Если бы H^* можно было выбирать произвольно, то в H можно было бы уничтожить все слагаемые. Однако этого сделать нельзя, несмотря на то что в силу условия (1.1) все функции $u_1\psi_1, \ldots, u_n\psi_n$ могут быть определены из равенств (2.3) как формальные степенные ряды при любом H^*, заданном в виде ряда (или полинома). Дело в том, что вычисленный для $u_j\psi_j$ ряд должен делиться на u_j. Этому условию можно, во всяком случае, удовлетворить, положив $H^* = u_1^{m_1} \ldots u_n^{m_n}$ при $m_1 \geqslant 2, \ldots, m_n \geqslant 2$. Ясно, что в этом случае степенные ряды для $\psi_j(u)$ существуют и, следовательно, в H могут быть уничтожены все слагаемые указанного вида.

Нетрудно показать, что ряд для H^*, при котором функции $\psi_j(u)$ получаются степенными рядами по положительным степеням u, для случая $n = 2$ (общий случай рассматривается аналогично) может быть представлен в виде

$$\begin{aligned} H^* &= \int \frac{\partial H^*}{\partial u_1}\bigg|_{u_2=0} du_1 + \int \frac{\partial H^*}{\partial u_2}\bigg|_{u_1=0} du_2 + u_1 \frac{\partial H^*}{\partial u_1}\bigg|_{u_1=0} + u_2 \frac{\partial H^*}{\partial u_2}\bigg|_{u_2=0} = \\ &= -\int \omega_1 \frac{\partial^2 H}{\partial u_1^2}\bigg|_{u_2=0} du_1 - \int \omega_2 \frac{\partial^2 H}{\partial u_2^2}\bigg|_{u_1=0} du_2 - u_1\omega_2 \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2}\bigg|_{u_1=0} - \\ &- u_2\omega_1 \frac{\partial^2 H}{\partial u_1 \partial u_2}\bigg|_{u_2=0} \end{aligned}$$

$$(\omega_1 = u_1\psi_1(u_1, 0), \quad \omega_2 = u_2\psi_2(0, u_2))$$

Из этого выражения видно, что в силу условия $\beta_{12} \neq 0$ для каждого порядка слагаемые в биномах $a_1 u_1^m + b u_1^{m-1} u_2$, $c u_1 u_2^{m-1} + d u_2^m$ преобразуются одновременно. Поэтому в каждом из биномов можно уничтожить лишь по одному слагаемому. В частности, полагая последовательно $\omega_1 = u_1^m$, $\omega_2 = u_2^m$, придем к выражению (1.2).

3. Схема доказательства формул (1.3), (1.4). Обозначим через L оператор сдвига вдоль траекторий в переменных u_1, u_2, θ, α; X — оператор преобразования гамильтоновой системы

$$L = \frac{\partial H}{\partial \theta}\frac{\partial}{\partial u_2} - \frac{\partial H}{\partial u_2}\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial u_1}\frac{\partial}{\partial \alpha}$$

$$X^* = \xi_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \xi_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \psi \frac{\partial}{\partial \theta} + \xi \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sum_j \zeta_j(a) \frac{\partial}{\partial a_j} \equiv$$

$$\equiv X + \sum_j \zeta_j(a) \frac{\partial}{\partial a_j}$$

После преобразования уравнений, получающихся из условия инвариантности $[L, X^*] = 0$, получим $\xi_1 = \xi_1(u_1, H), H^* = -XH + f(u_1, H)$ и

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial H}\frac{\partial H}{\partial u_1} + \frac{\partial \xi_2}{\partial u_2} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi}{\partial \alpha} = \Phi(u_1, H) \tag{3.1}$$

где ξ_1, f, Φ — произвольные функции u_1, H, а H^* определено аналогично (2.2). Дальнейшие выкладки дают

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \varphi_2^\circ + \left[\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial H} - \Phi\right) + \xi\right]\frac{\partial H}{\partial \theta} \Big/ \frac{\partial H}{\partial u_1} \\ \psi &= \psi^\circ - \left[\alpha\left(\frac{\partial f}{\partial H} - \Phi\right) + \xi\right]\frac{\partial H}{\partial u_2} \Big/ \frac{\partial H}{\partial u_1} \end{aligned} \tag{3.2}$$

Здесь φ_2°, ψ° — произвольные функции, не зависящие от α. Из формул (3.2) следует формула (1.3). Подстановка выражений (3.2) в уравнение движения, содержащее $\partial H^* / \partial u_1$, дает формулу (1.4), в которой $\Phi^* = \Phi - \partial f / \partial H$. Далее функции φ°, ψ° определяются из формулы (1.4), а ξ_2 и ψ — из формул (3.2). После этого функция $\xi^* \equiv [\xi + \alpha(\partial f / \partial H - \Phi)]\, \partial H / \partial u_1$ может быть найдена в виде формального ряда по α из уравнения (3.1). Окончательно получим

$$\xi = \xi^* \frac{\partial H}{\partial u_1} + \alpha\left(\Phi - \frac{\partial f}{\partial H}\right), \quad \xi_2 = \varphi_2^\circ + \xi^* \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad \psi = \psi^\circ - \xi^* \frac{\partial H}{\partial u_2}$$

4. *Замечание.* Вопросы сходимости в этой работе не рассматривались. Общая задача сходимости исследовалась в [3]. Аналитичность нормализующего преобразования для систем второго порядка, гамильтоновых в линейном приближении, доказана автором [1]. (При этом полное доказательство этого факта, полученное автором, в действительности не содержит пробелов, отмеченных в тексте работы [4].) Наличие конечного числа формальных инвариантов негамильтоновых систем второго порядка при резонансах установлено ранее [5]. Этот же факт для многомерных систем исследован автором [6] и (одновременно и независимо) — в работе [7].

Поступила 23 XII 1974

[1] Мархашов Л. М. Об аналитической эквивалентности систем обыкновенных дифференциальных уравнений при резонансах. Препринт № 36 Ин-та проблем механики АН СССР, М., 1974.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. М., «Мир», 1973.
2. *Биркгоф Дж. Д.* Динамические системы. М.— Л., Гостехиздат, 1941.
3. *Брюно А. Д.* Аналитическая форма дифференциальных уравнений. Тр. Моск. матем. о-ва, 1971, т. 25; 1972, т. 26.
4. *Брюно А. Д.* Нормальная форма вещественных дифференциальных уравнений. Матем. заметки, 1975, т. 18, № 2.
5. *Мархашов Л. М.* Аналитическая эквивалентность систем второго порядка при произвольном резонансе. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
6. *Мархашов Л. М.* Инварианты многомерных систем с одним резонансным соотношением. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 5.
7. *Брюно А. Д.* О локальных инвариантах дифференциальных уравнений. Матем. заметки, 1973, т. 14, № 4.