

**МИНИМАКСНЫЙ СИНТЕЗ В ЗАДАЧАХ ИМПУЛЬСНОГО  
НАВЕДЕНИЯ И КОРРЕКЦИИ ДВИЖЕНИЯ**

**Б. И. Ананьев, А. Б. Куржанский, Г. С. Шелементьев**  
(Свердловск)

Рассматриваются задачи импульсного наведения и коррекции движения в условиях неопределенности по начальным данным и возмущениям в системе измерения (наблюдения) фазовых координат. В линейном приближении получены неулучшаемые гарантируемые оценки минимаксного промаха системы. Указана оценка оптимального числа измерений и управляющих импульсных воздействий. По постановке и методам решения работа примыкает к исследованиям [1-3].

**1. Общая постановка задачи.** Пусть отклонение управляемого объекта от заданного движения  $x^\circ(t) \equiv 0$  на интервале времени  $t_0 \leq t \leq \theta$  описывается уравнением линейного приближения вида

$$(1.1) \quad dx/dt = A(t)x + B(t)u$$

где  $x$  —  $n$ -мерный фазовый вектор,  $A(t)$  и  $B(t)$  — непрерывные на  $[t_0, \theta]$  матрицы порядка  $n \times n$  и  $n \times r$  соответственно,  $u$  —  $r$ -мерный вектор управления, стесненный ограничением

$$(1.2) \quad u = dU/dt, \quad \int_{t_0}^{\theta} \|dU(t)\| \leq \mu, \quad \mu = \text{const} > 0$$

Здесь и ниже символом  $\|q\|$  будем обозначать евклидову норму вектора  $q$ . Пусть указанное отклонение оценивается величиной  $r(Nx(t))$  ( $r(0) = 0$ ), где  $N$  — постоянная  $k \times n$ -матрица,  $r(\cdot)$  — некоторая функция фазовых координат, заданная на  $R^{(k)}$ .

Цель управления состоит в выборе воздействия  $u(t)$  (1.2), обеспечивающего объекту (1.1) минимальную величину промаха  $r(Nx(\theta))$  при условии, что информация о начальном состоянии исчерпывается заданием условия  $x(t_0) \in X^\circ$ . Область  $X^\circ$  предполагается выпуклой замкнутой и, в частности, может совпадать со всем фазовым пространством.)

Для уточнения фазового состояния объекта (1.1) измеряется некоторый  $m$ -мерный вектор  $y$ , связь которого с фазовым вектором  $x$  описывается в линейном приближении уравнением

$$(1.3) \quad y = G(t)x + \xi(t)$$

где  $[G(t)]$  — известная непрерывная  $m \times n$ -матрица,  $\xi(t)$  — помеха в канале измерения. Реализации помехи  $\xi(t)$  заранее не даны, но стеснены

ограничением

$$(1.4) \quad \varphi(\xi(t)) \leq 0, \quad t_0 \leq t \leq \vartheta$$

где  $\varphi(\cdot)$  — заданная функция (например, (1.4) может быть ограничением вида  $\|\xi(t)\| \leq \nu$  на величину помехи). Будем предполагать, что система (1.1), (1.3) при  $u(t) = \xi(t) \equiv 0$  является вполне наблюдаемой на любом отрезке времени  $[t_0, t]$ ,  $t_0 \leq t \leq \vartheta$ .

Обработка реализовавшегося на интервале времени  $t_0 \leq \tau \leq t$  сигнала  $y_t^*(\cdot)$  ( $y_t^*(\cdot) = y^*(\tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t$ ) (1.3) (1.4), т. е. решение задачи наблюдения позволяет установить некоторое множество  $X(t, y_t^*(\cdot)) \subset \subset R^{(n)}$  — область пребывания фазового вектора  $x(t)$  системы (1.1) в каждый текущий момент времени  $t$ . Тогда программное управление  $u(t)$ , выбираемое на промежутке  $[t, \vartheta]$ , должно быть рассчитано на все возможные траектории, выпускаемые из  $X(t, y_t^*(\cdot))$  одновременно. Последнее приводит к задаче управления ансамблем траекторий. Решение задачи управления и наблюдения здесь фактически разделены, процесс наблюдения предшествует процессу управления, а промежутки наблюдения и управления не пересекаются.

Однако если момент  $t$  окончания наблюдения не фиксирован, то неполнота информации о начальном состоянии и текущих координатах системы приводит к задаче совокупной оптимизации процесса управления и наблюдения и, в том числе, к синтезу момента перехода от наблюдения к управлению.

Цель данной работы заключается в точном описании решения и получения неулучшаемой гарантированной оценки промаха, а также в оценке необходимого числа импульсного измерения и управления. Задачи подобного рода были рассмотрены в работах [1-5], где предложены различные способы приближенного решения задачи.

**2. Основные определения и предположения.** Допустимыми управлениями будем называть функции  $U(t)$ , имеющие ограниченную вариацию, непрерывные справа на  $[t_0, \vartheta]$  и удовлетворяющие ограничению (1.2). Примем, что реализациями  $\xi(t)$  априори являются кусочно-непрерывные функции, для определенности непрерывные справа. Множество всех кусочно-непрерывных и непрерывных справа  $m$ -векторных функций на  $[t_0, \vartheta]$ , удовлетворяющих условию (1.4), обозначим  $\Xi_1$ , полагая, что  $\Xi$  есть подмножество  $\Xi_1$ , состоящее из непрерывных функций.

Символом  $X(t, \cdot) = X(t, y_t^*(\cdot) | U^*(t))$  обозначим совокупность тех и только тех векторов  $x = x(t)$ , которые могут реализоваться в момент  $t$  в силу траекторий  $x(\tau)$  системы (1.1) при некотором  $x(t_0) \in X^0$ , при фиксированном допустимом управлении  $U^*(\cdot)$  ( $U(t_0) = 0$ ) на  $[t_0, t]$  и при условии, что каждая из функций  $x(\tau)$  порождает в паре с некоторой реализацией  $\xi(\tau) \in \Xi_1$ ;  $t_0 \leq \tau \leq t$  именно сигнал  $y^*(\tau)$  (по формуле (1.3)).

Множеством  $X^\vartheta(U(\cdot) | X(t, \cdot))$  будем называть совокупность тех и только тех векторов  $x = x(\vartheta)$ , которые могут реализоваться в момент  $\vartheta$  в силу траекторий  $x(\tau)$  системы (1.1) при  $x(t) \in X(t, \cdot)$  и при фикси-

рованном управлении  $U(\tau)$  на  $(t, \vartheta]$ . Управление  $U(\cdot)$  здесь предполагается допустимым. В случае  $t = \vartheta$  множество  $X^\vartheta(U(\cdot) | \cdot)$  полагаем равным  $X(\vartheta, \cdot) + B(\vartheta)p$ , где вектор  $p$  подчинен условию

$$\|p\| \leq \mu - \int_{t_0}^{\vartheta} \|dU^*(\tau)\|$$

Символом  $Y(t_1, y_{t_1}^*(\cdot) | U^*(\cdot))$  обозначим совокупность всех возможных продолжений на отрезок  $[t_0, t_1]$  реализовавшегося на  $[t_0, t]$  сигнала  $y_{t_1}^*(\cdot)$ , которые допускаются соотношениями (1.1) — (1.4) при заданном допустимом управлении  $U^*(\tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq t_1$ . Каждое такое продолжение однозначно определяется заданием вектора  $x(t) \in X(t, \cdot)$  и функции  $\xi(\tau) \in E_1$ ,  $t \leq \tau \leq t_1$ .

В дальнейшем примем следующие предположения.

**Предположение 2.1.** а) Функция  $r(\cdot)$  на  $R^{(k)}$  является неотрицательной конечной и выпуклой; б) функция  $\varphi(\cdot)$ , заданная на  $R^{(m)}$ , является выпуклой конечной и не имеет направлений рецессии ([6], стр. 86); причем  $\varphi(0) < 0$ ; в) В начальный момент  $t_0$  выполняется включение  $\{x | G(t_0)x \in \in y^*(t_0) - Q\} \subseteq X^\circ$ , где  $Q = \{x | \varphi(x) \leq 0\}$  — множество уровня функции  $\varphi(\cdot)$ .

Отметим, что предположение 2.1 б) означает ограниченность множества  $Q$ . Далее, из результатов [6] следует, что  $0 \in \text{int } Q$  ( $\text{int } Q$  — множество внутренних точек множества  $Q$ ). Опорная функция множества  $Q$  определяется соотношением (см. [6], стр. 136)

$$(2.1) \quad \gamma(x) = \rho(x | Q) = \max_q q'x = \text{cl } \psi(x)$$

$$\psi(x) = \inf \{\lambda \varphi^*(\lambda^{-1}x) | \lambda > 0\}$$

где  $\varphi^*(\cdot)$  — сопряженная к  $\varphi(\cdot)$  выпуклая функция [6];  $\text{cl } \psi(\cdot)$  означает замыкание функции  $\psi(\cdot)$ .

**3. Задача коррекции с фиксированным моментом окончания наблюдения.** Итак, пусть момент окончания наблюдения фиксирован.

**Задача 3.1.** Найти величину

$$(3.1) \quad r_1^\circ = \min_{U(\cdot)} \max_x r(Nx) = r^\circ(t_1, y_{t_1}^*(\cdot))$$

$$x \in X^\vartheta(U(\cdot) | X(t_1, \cdot))$$

и соответствующее допустимое оптимальное управление  $U^\circ(\tau) = U^\circ(\cdot | y_{t_1}^*(\cdot))$ ,  $t_1 < \tau \leq \vartheta$ , доставляющее минимум в (3.1) при условии, что управление  $U^*(\tau)$ ,  $\tau \leq t_1$  и момент времени  $t_1$ ,  $t_0 \leq t_1 \leq \vartheta$  являются фиксированными.

Отметим, что при  $t_1 = \vartheta$  выбор управления  $U^\circ(\tau)$  в (3.1) сводится, согласно определению множества  $X^\vartheta(U(\cdot) | X(t, \cdot))$ , к выбору скачка функции  $U^*(\cdot)$  в момент  $\vartheta + 0$ . Следующая лемма дает описание множества  $X(t, \cdot)$  через его опорную функцию.

**Лемма 3.1.** Пусть выполнено предположение 2.1. Тогда опорная функция выпуклого и компактного множества  $X(t, \cdot)$ , получаемого в ре-

зультате непрерывного измерения сигнала  $y_t^*(\cdot)$ , определяется формулой

$$(3.2) \quad \max_{x \in X(t, \cdot)} l \cdot x = \rho(l | X(t, \cdot)) = \inf_{L(\cdot)} \left\{ \int_{t_0}^t (\gamma[-dL(\tau)] + dL(\tau)[y^*(\tau) - G(\tau)x(\tau; U^*(\cdot))]) \right\}$$

$$(3.3) \quad L(\cdot) \in \Lambda(t, l) = \left\{ L(\cdot) \mid \int_{t_0}^t dL'(\tau) G(\tau) S(t, \tau) = l' \right\}$$

Здесь  $x(\tau; U^*(\cdot))$  — решение системы (1.1) с краевым условием  $x(t) = 0$ ;  $\gamma[\cdot]$  — функция, определяемая соотношением (2.1);  $S(t, \tau)$  — фундаментальная матрица сопряженной системы  $s' = -sA(t)$ . Нижняя грань в формуле (3.2) берется по всем  $m$  векторным функциям  $L(\cdot)$  ограниченной вариации, принадлежащим множеству  $\Lambda(t, l)$  (3.3).

*Примечание 3.1.* Результат леммы 3.1 не изменится, если нижнюю грань в формуле (3.2) брать по всем функциям  $L(\cdot) \in \Lambda(t, l)$ , обобщенная производная которых имеет вид

$$(3.4) \quad \frac{dL(\tau)}{d\tau} = \sum_{i=1}^{n+2} \alpha_i \delta(\tau - \tau_i)$$

где  $\alpha_i \in R^m$ ,  $\tau_i \in [t_0, t]$ ,  $i = 1, \dots, n+2$ . В тех случаях, когда измерения сигнала  $y_t^*(\cdot)$  производились не непрерывно, а лишь на некотором множестве  $E \subseteq [t_0, t]$ , опорная функция множества  $X(t, \cdot)$  будет также определяться формулой (3.2), где нижнюю грань нужно брать по всем функциям  $L(\cdot) \in \Lambda(t, l)$ , имеющим вид (3.4) при  $\tau_i \in E$ . Таким образом, множество  $X(t, \cdot)$  можно определить соотношением

$$(3.5) \quad X(t, \cdot) = \bigcap_{\tau \in E} \{x \mid G(\tau) S(t, \tau) x \in y^*(\tau) - G(\tau)x(\tau; U^*(\cdot)) - Q\}$$

Доказательство леммы 3.1 и утверждения из примечания 3.1 можно получить, используя методы работы [7] и известный результат работы [8].

Если предположение 2.1 в) не выполнено, множество будет определяться соотношением  $X(t, \cdot) = X(t, \cdot) \cap S(t_0, t) X^0$ , где  $X(t, \cdot)$  — множество, определяемое согласно (3.2), (3.5).

Из леммы 3.1 и примечания 3.1 вытекает следующее утверждение.

*Лемма 3.2.* Пусть задан сигнал  $y_t^*(\cdot)$ . Для любого числа  $\varepsilon > 0$  и вектора  $l \in R^n$  можно указать такой набор точек  $\{\tau_i\} \subseteq [t_0, t]$ ,  $i = 1, \dots, n+2$ , где  $n$  — размерность системы (1.1), что

$$(3.6) \quad \rho(l | X_*(t, \cdot)) < \rho(l | X(t, \cdot)) + \varepsilon$$

Здесь  $X(t, \cdot)$  — множество, получаемое при непрерывном измерении;  $X_*(t, \cdot)$  — множество вида (3.5), получаемое при дискретном измерении в точках  $\{\tau_i\}$ .

Отметим, что формулу (3.2) можно переписать еще и следующим образом:

$$(3.7) \quad \rho(l | X(t, \cdot)) = \inf \{ \chi(c, l) + c \mid c \in R^{(1)} \}$$

$$(3.8) \quad \chi(c, l) = \inf_{L(\cdot)} \int_{t_0}^t \gamma[-dL(\tau)]$$

Нижняя грань в (3.8) берется по всем функциям ограниченной вариации  $L(\cdot) \in \Lambda(t, l)$  (3.3), для которых

$$\int_{t_0}^t dL(\tau)(y^*(\tau) - G(\tau)x(\tau; U^*(\cdot))) = c$$

Заметим, что если помеха  $\xi^*(\tau)$  в сигнале  $y_t^*(\cdot)$  принадлежит классу  $\Xi$ , т. е. является непрерывной функцией, то нижняя грань в (3.8) будет достигаться для любого  $c$  на функции  $L(\cdot)$  вида (3.4), где  $n+2$  заменено на  $n+1$ . Можно также показать, что в тех случаях, когда

$$y^*(\tau) - G(\tau)(S(t, \tau)p + x(\tau; U^*(\cdot))) \in \text{int } Q, \quad t_0 \leq \tau \leq t$$

для некоторого  $p \in R^{(n)}$  нижняя грань в формуле (3.2) (а также и в (3.7)) будет достигаться. Следовательно, в этих случаях вместо неравенства (3.6) будем иметь равенство  $\rho(l | X_*(t, \cdot)) = \rho(l | X(t, \cdot))$ .

Вернемся к задаче, сформулированной в начале п. 3. Переставляя  $\min_{U(\cdot)}$  и  $\max_x$  в выражении (3.1) и учитывая определение множества  $X^\circ(U(\cdot) | X(t, \cdot))$ , приходим к формуле

$$(3.9) \quad r_1^\circ = r^\circ(t_1, y_{t_1}^*(\cdot)) = \max_{l \in R^{(k)}} \{-\mu^* \max_{t_1 \leq \tau \leq \vartheta} \|s(\tau; l)B(\tau)\| + \\ + (\text{conc } f)(t_1; l)\} \\ f(t_1; l) = \rho(s(t_1; l) | X(t_1, \cdot)) - r^*(l) \\ \mu^* = \mu - \int_{t_0}^{t_1} \|dU(\tau)\| \geq 0$$

Здесь  $s(\tau; l)$ ,  $t_1 \leq \tau \leq \vartheta$  — решение системы  $\dot{s} = -sA(t)$  с краевым условием  $s(\vartheta) = l'N$ . Функция  $r^*(l)$  — выпуклая на  $R^{(k)}$ , сопряженная [6] к  $r(l)$ ; символ  $(\text{conc } f)(l)$  означает вогнутую оболочку функции  $f(l)$  на  $R^{(k)}$ .

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 3.1.** Оптимальное управление  $U^\circ(\tau)$  в задаче 3.1 всегда существует и удовлетворяет принципу минимума

$$(3.10) \quad \int_{t_1}^{\vartheta} s(\tau; l^\circ)B(\tau)dU^\circ(\tau) = \min \left\{ \int_{t_1}^{\vartheta} s(\tau; l^\circ)B(\tau)dU(\tau) \mid \text{Var } U \Big|_{t_1}^{\vartheta} \leq \mu^* \right\}$$

где  $l^\circ$  — вектор, на котором достигается максимум в формуле (3.9). Более того, оптимальное управление  $U^\circ(\tau)$  может быть представлено в следующем виде ( $k$  — число строк матрицы  $N$ ):

$$(3.11) \quad u^\circ(\tau) = \frac{dU^\circ(\tau)}{d\tau} = \sum_{i=1}^k \mu_i \delta(\tau - \tau_i), \quad \sum_{i=1}^k \|\mu_i\| \leq \mu^* \\ \tau_i \in [t_1, \vartheta], \quad \mu_i \in R^{(r)}, \quad i = 1, \dots, k$$

**Примечание 3.2.** Пусть матрица  $N = n'$  (вектор-строка), т. е.  $k = 1$  и  $r(Nx) = |n'x|$ . Тогда

$$(\text{conc } f)(t_1; l) = \begin{cases} al, & 1 \geq l \geq 0 \\ -bl, & 0 > l \geq -1 \\ -\infty, & |l| > 1 \end{cases}, \quad \text{если } a + b \leq 0$$

$$(\text{conc } f)(t_1; l) = \begin{cases} 1/2[(a-b)l + a + b], & |l| \leq 1 \\ -\infty & |l| > 1 \end{cases}, \quad \text{если } a + b > 0$$

$$a = \rho(n'S(t_1, \vartheta) | X(t_1, \cdot)), \quad b = \rho(-n'S(t_1, \vartheta) | X(t_1, \cdot))$$

Формула (3.9) переписется следующим образом:

$$(3.12) \quad r_1^\circ = \max \left\{ \frac{a+b}{2}, a+c, b+c \right\}, \quad c = -\mu^* \max_{t_1 \leq \tau \leq \vartheta} \|n'S(\tau, \vartheta)B(\tau)\|$$

Оптимальное управление  $U^\circ(\tau)$  в этом случае будет содержать лишь один скачок.

Выберем вектор  $q \in R^{(k)}$  так, чтобы

$$(3.13) \quad \mu^* \max_{t_1 \leq \tau \leq \vartheta} \|s(\tau; l)B(\tau)\| \geq l'q \geq (\text{conc } f)(t_1; l), \quad \forall l$$

где  $r_1^\circ$  определяется формулой (3.9). Вектор  $q$ , удовлетворяющий неравенству (3.13), обязательно существует. С другой стороны, прямым счетом нетрудно убедиться в том, что вектор  $q$  является решением следующей экстремальной задачи  $g(l) = (-f(t_1; l))^*$ :

$$(3.14) \quad r_1^\circ = g \left( \int_{t_1}^{\vartheta} NS(\tau, \vartheta)B(\tau) dU^\circ(\tau) \right) = \min_{U(\cdot)} g \left( \int_{t_1}^{\vartheta} NS(\tau, \vartheta)B(\tau) dU(\tau) \right)$$

$$(3.15) \quad q = - \int_{t_1}^{\vartheta} NS(\tau, \vartheta)B(\tau) dU^\circ(\tau)$$

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 3.2.** Пусть вектор  $q \in R^{(k)}$  удовлетворяет неравенству (3.13). Тогда управление  $U^\circ(\tau)$ , разрешающее проблему (3.15), является оптимальным в задаче 3.1. С другой стороны, это же управление будет решать и задачу (3.14), а всякое решение задачи (3.14) будет являться решением задачи (3.1).

Здесь (3.14) можно интерпретировать как задачу минимизации функции  $g(Nx(\vartheta))$  (3.15) от конечного состояния  $x(\vartheta)$  системы (1.1) при известном начальном состоянии  $x(t_1) = 0$ . Теорема 3.2 утверждает, что задачи 3.1 и (3.14) являются эквивалентными.

Отметим, что величина  $r_1^\circ$ , определяемая формулой (3.9) (3.14), — гарантируемый результат управления при непрерывном измерении сигнала (1.3) на  $[t_0, t_1]$  и при точной оценке области  $X(t_1, \cdot)$ . В тех случаях, когда измерения проводились в дискретные моменты времени или когда область  $X(t_1, \cdot)$  известна приближенно, гарантируемый результат  $r_1^\circ$  будет хуже.

Рассмотрим более подробно один способ приближенного оценивания области  $X(t_1, \cdot)$ . Фактически нужно оценить область  $NS(t_1, \vartheta) X(t_1, \cdot)$  в  $R^{(k)}$ , так как именно эта область фигурирует в формуле (3.9). Если возмущения  $\xi(\cdot)$  в сигнале (1.3) достаточно малы, то область  $X(t_1, \cdot)$  будет расположена в некоторой достаточно малой окрестности аффинного множества  $x^*(t_1) + \text{Ker } G(t_1)$  ( $\text{Ker } G = \{x | Gx = 0\}$ ), где  $x^*(t_1)$  — значение реализовавшегося в момент  $t_1$  фазового вектора системы (1.1). Учитывая это обстоятельство, имеет смысл оценить область  $NS(t_1, \vartheta) \cdot X(t_1, \cdot)$   $k$ -мерным прямоугольником  $\Pi$ , ориентируя его относительно ортогональных осей  $l_1, \dots, l_k$  так, чтобы опорные функции множеств  $\Pi$  и  $NS(t_1, \vartheta) X(t_1, \cdot)$  совпадали на единичных векторах  $\pm l_i, i = 1, \dots, k$  или же отличались весьма мало. Векторы  $l_1, \dots, l_k$  надлежит выбирать так, чтобы первые  $j$  векторов образовывали базис в подпространстве  $NS(t_1, \vartheta) \text{Ker } G(t_1)$ , а остальные  $k - j$  векторов дополняли бы их до ортонормального базиса в  $R^{(k)}$ . Как видно из построения, направления таким образом выбранных векторов,  $l_1, \dots, l_k$  будут зависеть лишь от момента времени  $t_1$  и не будут зависеть от реализации сигнала  $y_{ii}(\cdot)$  и конфигурации области  $X(t_1, \cdot)$ .

Введем обозначения

$$f(t_1; l_i) \equiv \rho(s(t_1; l_i) | X(t_1, \cdot)) = c_i, \quad f(t_1, -l_i) = c_{k+i} \quad i = 1, \dots, k$$

Здесь предполагается, что единичные векторы  $l_i$  уже выбраны указанным выше способом. Нетрудно проверить, что векторы  $l_i$  и величины  $c_i$  однозначно определяют  $k$ -мерный прямоугольник

$$\Pi = L\Pi_* + Lb, \quad L = [l_1, \dots, l_k], \quad b = \left( \frac{c_1 - c_{k+1}}{2}, \dots, \frac{c_k - c_{2k}}{2} \right)$$

$$\Pi_* = \left\{ \alpha \in R^{(k)} \mid \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k), |\alpha_i| \leq v_i = \frac{c_i + c_{k+i}}{2}, i = 1, \dots, k \right\}$$

( $L$  — матрица, составленная из вектор-столбцов  $l_i$ ,  $\Pi_*$  —  $k$ -мерный прямоугольник).

Учитывая сказанное выше, заменим (3.9) приближенной формулой

$$(3.16) \quad r_1^o = r^o(t_1, y_{t_1}^*(\cdot)) = \max_{\|l\| \leq 1} \{l'b - \mu^* \max_{t_1 \leq \tau \leq \vartheta} \|s(\tau; L'l) B(\tau)\| + (\text{conc } \rho)(l | \Pi_*)$$

$$r(l) = \|l\|, \quad r^*(l) = \begin{cases} 0, & \|l\| \leq 1 \\ +\infty, & \|l\| > 1 \end{cases}$$

Функция  $(\text{conc } \rho)(l | \Pi_*)$  будет состоять из  $k(k-1) + 1$  кусков гладких поверхностей, причем в  $k$ -мерном прямоугольнике

$$|l_i| \leq v_i S^{-1}, \quad S = \left( \sum_{i=1}^k v_i^2 \right)^{1/2}, \quad i = 1, \dots, k$$

она постоянна и равна  $S$ .

Приведем утверждение, касающееся числа измерений, необходимых для решения задачи (3.16).

**Теорема 3.3.** Для любого числа  $\varepsilon > 0$  можно указать не более чем  $2k(n+2)$  точек  $\{\tau_i\} \subseteq [t_0, t_1]$ , таких, что для множества  $X_*(t_1, \cdot)$ , полученного при измерении сигнала (1.3) в этих точках, результат  $\bar{r}_1^\circ$  решения задачи (3.16) будет удовлетворять неравенству  $\bar{r}_1^\circ < r_1^\circ + \varepsilon$ , где  $r_1^\circ$  — результат решения задачи (3.16) для множества  $X(t_1, \cdot)$ , полученного при непрерывном измерении сигнала (1.3) на  $[t_0, t_1]$ .

Доказательство теоремы 3.3 нетрудно получить, используя лемму 3.2 и учитывая непрерывную зависимость величины  $(\text{con } \rho) (l | \Pi)$  от параметров  $c_i, i = 1, \dots, 2k$ , что, в свою очередь, влечет непрерывную зависимость от этих же параметров и величины  $r_1^\circ$  (3.16).

**4. Задача коррекции с синтезом момента окончания наблюдения.** Рассмотрим следующую задачу.

**Задача 4.1.** Найти величину  $r_2^\circ = r^\circ(t^\circ, y_{t^\circ}^*(\cdot))$  и соответствующее допустимое оптимальное управление  $U^\circ(\tau) = U^\circ(\tau | y_{t^\circ}^*(\cdot))$ ,  $t^\circ < \tau \leq \vartheta$ , доставляющее минимум в (3.1) при условии, что на  $[t_0, t^\circ]$  реализуется заранее заданное допустимое управление  $U^*(\tau)$  ( $U^*(t_0) = 0$ ),  $t_0 \leq \tau \leq \vartheta$ . Здесь  $t^\circ = t^\circ(y_{t^\circ}^*(\cdot))$  — наименьший момент времени, для которого

$$(4.1) \quad r^\circ(t^\circ, y_{t^\circ}^*(\cdot)) \leq \min_{t^\circ \leq t \leq \vartheta} \sup_{y_t(\cdot)} r^\circ(t, y_t(\cdot)), y_t(\cdot) \in Y(t, y_{t^\circ}^*(\cdot) | U^*(\cdot))$$

В задаче 4.1 момент коррекции не задан заранее. Наоборот, его следует синтезировать согласно условию (4.1), исходя из поступающей информации. После того, как момент  $t^\circ = t^\circ(y_{t^\circ}^*(\cdot))$  найден, задача 4.1 сводится к задаче 3.1 при  $t_1 = t^\circ$ . В связи с этим отметим, что в задаче 4.1 при синтезировании момента приходится вычислять величину  $r^\circ(t, y_t(\cdot))$  (3.1) для разных значений  $t$ . Величину  $r^\circ(t, y_t(\cdot))$  можно определять либо точно по формуле (3.9), либо приближенно, т. е. по формуле (3.16) (при  $r(l) = \|l\|$ ). Как в том, так и в другом случае величина  $r_2^\circ$  (4.1) будет гарантируемым результатом управления, причем в наихудшем случае при  $t_1 \geq t^\circ$  всегда  $r_1^\circ \geq r_2^\circ$ . Если же  $t_1 < t^\circ$ , то выполняется строгое неравенство  $r_1^\circ > r_2^\circ$ .

Остановимся теперь на вопросе существования момента  $t^\circ(y_{t^\circ}^*(\cdot))$ . Для этого потребуется одно свойство линейных вполне наблюдаемых систем вида (1.1), (1.3) ( $U(\cdot) = 0$ ).

**Свойство А.** Для любого момента  $t > t_0$  и для любого сигнала (1.3), реализовавшегося на отрезке  $[t_0, t]$ , а также для любого непрерывного продолжения  $y_\vartheta(\tau) \in Y(\vartheta, y_t^*(\cdot) | 0)$  сигнала  $y_t^*(\cdot)$  множество  $X(\tau, \cdot)$  является непрерывным в точке  $t$  справа в смысле Хаусдорфа.

Не вдаваясь в подробности относительно этого свойства, отметим лишь, что при  $G(\tau) \equiv G(\text{const})$  система (1.1), (1.3) будет обладать свойством А.

**Лемма 4.1.** Пусть выполнено свойство А. Тогда наименьший момент времени  $t^\circ$ , для которого выполнено условие (4.1), существует.

*Доказательство.* Зафиксируем некоторую реализацию  $y^*(\tau)$ ,  $t_0 \leq \tau \leq \vartheta$  сигнала (1.3). Положим  $t^* = \inf \{t^\circ\}$ , где  $\{t^\circ\}$  — множество моментов  $t^\circ$ , удовлетворяющих неравенству (4.1) при  $y_{t^\circ}^*(\tau) \equiv y^*(t + \tau)$ ,  $t_0 - t \leq \tau \leq 0$ . Покажем теперь, что для момента  $t^*$  неравенство (4.1) будет выполняться. Действительно, зададимся числом  $\varepsilon > 0$  и пусть  $t > t^*$ . Тогда для каждого  $t^\circ \in \{t^\circ\}$ ,  $t^* < t^\circ < t$  можно выбрать  $y_t(\cdot) \in Y(t, y_{t^\circ}^*(\cdot) | U^*(\cdot))$  так, чтобы

$$(4.2) \quad -\varepsilon + r^\circ(t^\circ, y_{t^\circ}^*(\cdot)) < r^\circ(t, y_t(\cdot))$$

согласно неравенству (4.1). Учитывая непрерывность справа помехи  $\xi^*(\cdot)$  и управления  $U^*(\cdot)$  и принимая во внимание свойство  $A$ , из формулы (3.9), (3.16) заключаем, что функция  $r^\circ(t, y_t^*(\cdot))$  будет полунепрерывна снизу в точке  $t^*$  при стремлении  $t$  к  $t^*$  справа. Переходя в неравенстве (4.2) к пределу при  $t^\circ \rightarrow t^* + 0$ , получаем  $-\varepsilon + r^\circ(t^*, y_{t^*}^*(\cdot)) \leq r^\circ(t, y_t(\cdot))$ . Ввиду произвольности выбора числа  $\varepsilon$  и момента  $t > t^*$ , неравенство (4.1) для момента  $t^*$  можно считать установленным.

Суммируя рассуждения п.4, приходим к теореме.

*Теорема 4.1.* Решение задачи 4.1, а именно пара  $\{t^\circ(y_{t^\circ}^*(\cdot)), U^\circ(\cdot | y_{t^\circ}^*(\cdot))\}$ , удовлетворяет условию

$$(4.3) \quad \sup_{y_\vartheta(\cdot)} \max_{x(\vartheta)} r(Nx(\vartheta)) = \min_{\{t, U(\cdot)\}} \sup_{y_\vartheta(\cdot)} \max_{x(\vartheta)} r(Nx(\vartheta))$$

$$y_\vartheta(\cdot) \in Y(\vartheta, y_{t^\circ}^*(\cdot) | U^*(\cdot)), \quad x(\vartheta) \in X^\vartheta(U(\cdot) | X(t, y_t^* \times \times(\cdot) | U^*(\cdot)))$$

В левой части равенства (4.3) максимум берется при  $t = t^\circ$ ,  $U(\cdot) = U^\circ$ .

**5. Пример.** Рассмотрим систему ( $u = dU / dt$ )

$$(5.1) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad 0 \leq t \leq \vartheta, \quad \int_0^\vartheta |dU(\tau)| \leq \mu$$

Измеряется сигнал

$$(5.2) \quad y(\tau) = x_1(\tau) + \xi(\tau), \quad |\xi(\tau)| \leq \Delta, \quad \Delta = \text{const}$$

Отклонение движения  $x(t)$  от заданного  $x^\circ(t) \equiv 0$  будем оценивать величиной  $r(Nx(t)) = |x_1(t)|$ . Дополнительно к общему случаю предположим, что движение системы (5.1) стеснено ограничением на координаты в конечный момент времени

$$(5.3) \quad |x_2(\vartheta)| \leq \nu, \quad \nu = \text{const}$$

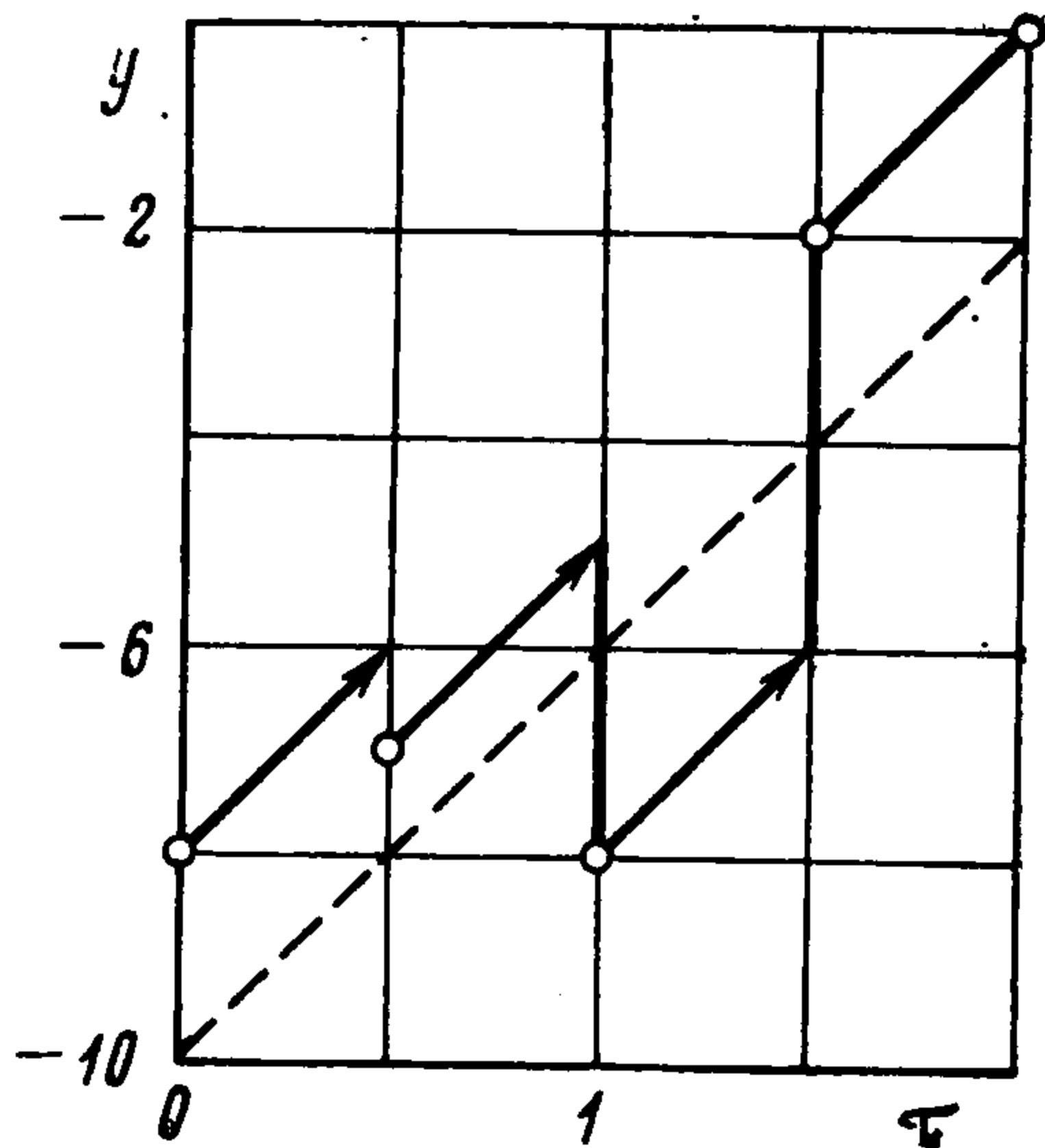
Задача 3.1 для системы (5.1) с учетом ограничения (5.3) сформулируется следующим образом: найти минимальное число  $\alpha^\circ$  и оптимальное управление  $U^\circ(\tau)$ ,  $t < \tau$ , такие, чтобы неравенства  $|x_1(\vartheta)| < \alpha^\circ$  и  $|x_2(\vartheta)| \leq \nu$  выполнялись для всех векторов  $x(\vartheta) \in X^\vartheta(U^\circ(\cdot) | X(t, \cdot))$ .

Для численного решения задачи предположим, что  $\mu = 6$ ,  $\nu = 8$ ,  $\Delta = 2$ ,  $\vartheta = 2$ ,  $X^\circ = \{(x_1, x_2) | -14 \leq x_1 \leq -6\}$ ,  $U^*(\tau) \equiv 0$ , а моделируемый сигнал  $y(\tau)$  и помеха  $\xi(\tau)$  заданы в виде (фиг. 1)

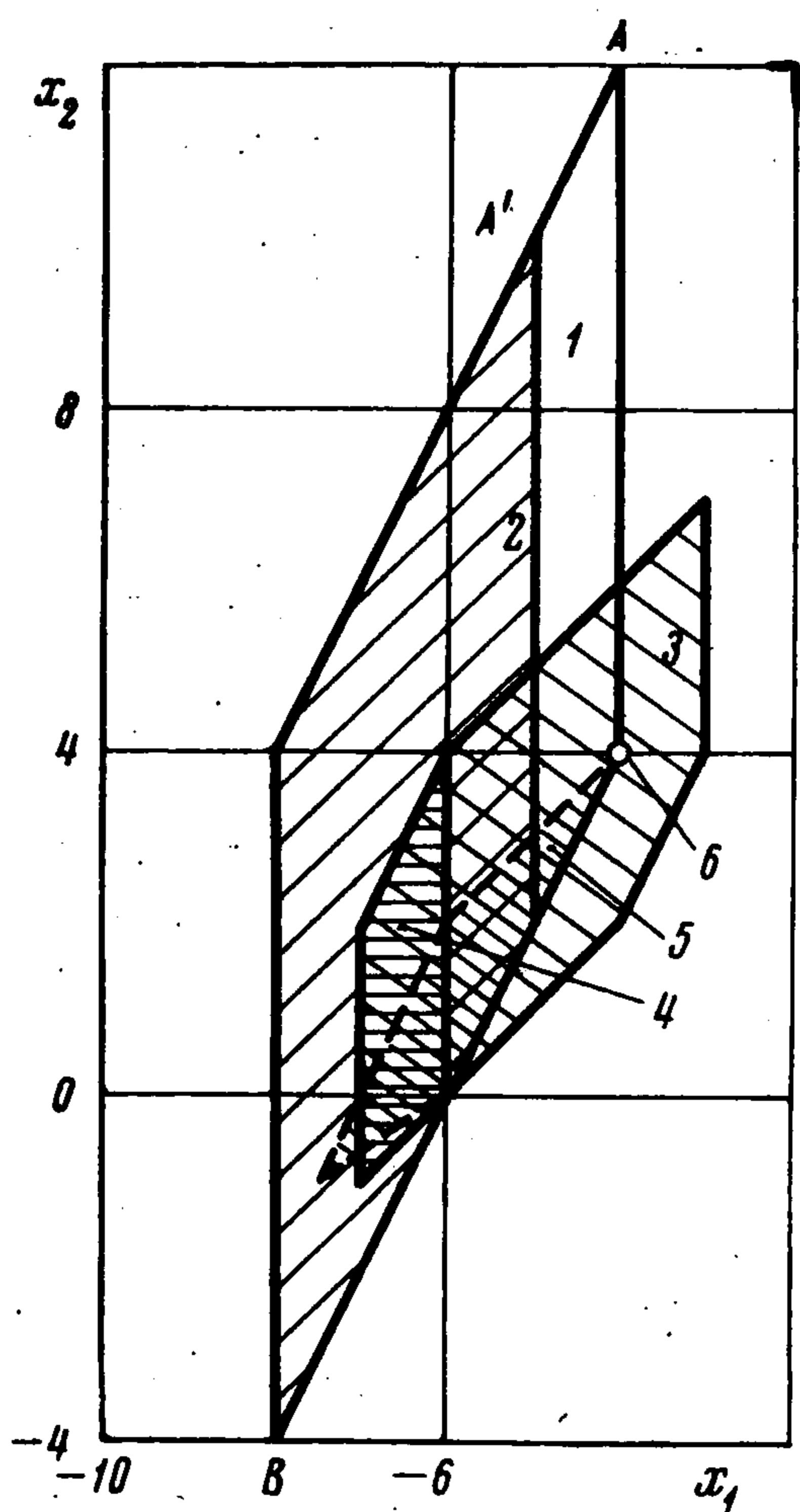
$$(5.4) \quad y^*(\tau) = \begin{cases} -8 + 4\tau, & 0 \leq \tau < 0.5 \\ -9 + 4\tau, & 0.5 \leq \tau < 1.0 \\ -12 + 4\tau, & 1.0 \leq \tau < 1.5 \\ -8 + 4\tau, & 1.5 \leq \tau \leq 2.0 \end{cases}, \quad \xi^*(\tau) = \begin{cases} 2, & 0 \leq \tau < 0.5 \\ 1, & 0.5 \leq \tau < 1.0 \\ -2, & 1.0 \leq \tau < 1.5 \\ 2, & 1.5 \leq \tau \leq 2.0 \end{cases}$$

Области  $X(t, \cdot)$ , соответствующие непрерывному измерению сигнала (5.4) (их здесь проще всего вычислять по формуле (3.5), представляют собой многоугольники.

На фиг. 2 изображены области  $X(t, \cdot)$ , обозначенные цифрами 1—6, для моментов времени, равных 0,5—0, 0,5, 1—0, 1,0, 1,5—0, 1,5, соответственно. Первые два множества представляют собой параллелограммы, три последующих суть неправильные многоугольники. В момент  $t = 1.5$  область  $X(t, \cdot)$  скачком стягивается в точку с координатами  $(-4, 4)$ . Отметим, что для вычисления множества  $X[(0.5-0, \cdot)]$  достаточно сделать лишь два измерения сигнала (5.4) (именно, при  $t = 0$  и  $t = 0.5-0$ ), для множества  $X(0.5, \cdot)$  — три измерения (при  $t = 0$ ,  $t = 0.5-0$  и  $t = 0.5$ ), для множества  $X(1-0, \cdot)$  и  $X(1, \cdot)$  — соответственно четыре и пять измерений (при  $t = 0$ ,  $t = 0.5-0$ ,  $t = 0.5$  и т. д.).



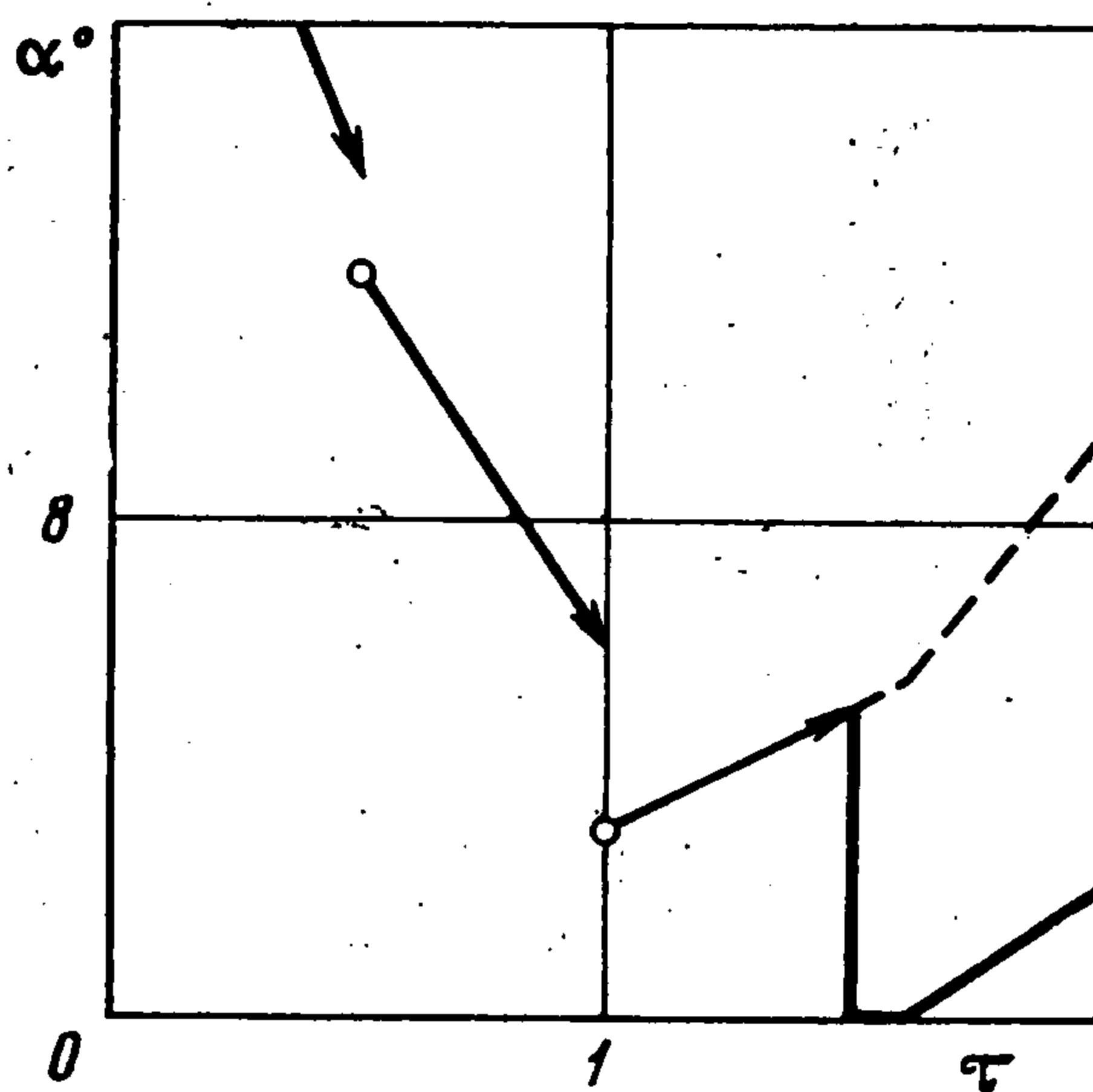
Фиг. 1



Фиг. 2

Решим задачу (3.1) (5.1), для момента  $t_1 = 0.5-0$ . Игнорируя ограничения (5.3), по формуле (3.12) находим  $r_1^\circ = \alpha_{\min} = 14$ . Далее, замечаем, что управление  $u^\circ(\tau) = -4\delta(\tau - 2)$  решает задачу при  $\alpha^\circ = 14$  ( $v = 8$ ). Таким образом, минимальная по  $x_1$  окрестность нуля для  $t_1 = 0.5-0$  равна  $\alpha^\circ = 14$ . Аналогично вычисляя для  $t_1 = 0.5$ , получаем  $\alpha^\circ = 12$  при управлении  $u^\circ(\tau) = 2\delta(\tau - 1) - 4\delta(\tau - 2)$ . Следует отметить, что здесь задача перевода множеств  $X(0.5-0, \cdot)$ ,  $X(0.5, \cdot)$  в минимальную по  $x_1$  окрестность нуля эквивалентна задаче перевода в эту же окрестность отрезков, соединяющих вершины  $A - B$  и  $A' - B$  многоугольников  $X(0.5-0, \cdot)$  и  $X(0.5, \cdot)$  (см. фиг. 2).

Обсудим теперь задачу 4.1. Заметим вначале, что заканчивать наблюдение раньше, чем при  $t = 1$ , не следует. Здесь даже в наихудшем случае реализации сигнала  $y(\tau)$ ,  $\tau \geq t$  дальнейшее наблюдение дает меньшее значение  $\alpha^\circ$ . Действительно, решая задачу 3.1 ((5.1)) для  $t_1 = 1$ , находим, что  $\alpha^\circ = 3$  при управлении  $u^\circ(\tau) = 5\delta(\tau - 1) - \delta(\tau - 2)$ . При реализации «наихудшего» сигнала  $y(\tau) = -12 + 4\tau$ ,  $\tau > 1$  область  $X(t, \cdot)$ , соответствующая этому сигналу, получается простым преобразованием множества  $X(1, \cdot)$  в силу системы (5.1). Из формулы (3.12) находим, что  $\alpha^\circ \geq r_1 \geq 3$  для всех  $t$ ,  $1 \leq t \leq 2$ . Итак,  $t^\circ = t(y^*(\cdot)) = 1$ , и управление  $u^\circ(\tau) = 5\delta(\tau - 1) - \delta(\tau - 2)$  доставляет решение задачи (4.1) для системы (5.1), (5.2) при конкретном сигнале (5.4). Минимальное значение  $\alpha^\circ$ , которое можно гаран-



Фиг. 3

тальное значение  $\alpha^\circ$ , которое можно гаран-

тировать, основываясь на поступающей информации (5.4), равно трем. Если бы продолжали наблюдение и после  $t = 1$ , то в наихудшем случае при  $t = 1.5$  получили бы  $\alpha^0 = 5$ . В случае же реализации сигнала (5.4) область  $X(t, \cdot)$  в момент  $t = 1.5$  сжалась бы в точку и, используя управление  $u^0(\tau) = 4\delta(\tau - 1.5)$ , получили бы  $\alpha^0 = 0$  (фиг. 3).

Поступила 15 IX 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. Красовский Н. Н. Игровая задача о коррекции движения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
3. Охоцимский Д. Е., Рясин В. А., Ченцов Н. Н. Оптимальная стратегия при корректировании. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 1.
4. Шелементьев Г. С. Об одной задаче коррекции движения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 2.
5. Черноусько Ф. Л. Минимаксная задача одноразовой коррекции при погрешностях измерений. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
6. Рокафеллар Р. Т. Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.
7. Куржанский А. Б. К теории позиционного наблюдения. Общие соотношения. Изв. АН СССР, Техн. кибернетика, 1973, № 5.
8. Neustadt L. Optimization, a moment problem and nonlinear programming. J. SIAM, Ser. A, 1964, vol. 2, No. 1.