Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 62—50

ОБ ОДНОЙ ПРОБЛЕМЕ l-УБЕГАНИЯ

П. Б. Гусятников

(Москва)

Даются критерии убегания и l-убегания в нелинейных дифференциальных играх. Работа примыкает к исследованиям [1–8].

1. Пусть движение вектора z в n-мерном евклидовом пространстве R описывается векторным дифференциальным уравнением

$$dz / dt = f(t, z, u, v) \tag{1.1}$$

где $t \geqslant 0$; $u \in P$ и $v \in Q$ — управляющие параметры, изменяющиеся на компактных в R множествах P и Q. Относительно правой части уравнения (1.1) будем предполагать, что:

а) $f(t, z, u, v)$ непрерывна по $(t, z, u, v) \in X = [0, +\infty) \times R \times P \times Q$;

б) для любых $u \in P$, $v \in Q$ и $t \geqslant 0$, $z_1, z_2 \in R$, $|t| + |z_1| + |z_2| \leqslant c$ выполнено неравенство

$$|f(t, z_1, u, v) - f(t, z_2, u, v)| \leqslant k_* |z_1 - z_2|$$

где k_* — постоянная, зависящая лишь от c;

в) существует такая постоянная B, что для всех $t \geqslant 0$, $z \in R$, $u \in P$, $v \in Q$ имеет место

$$|(z \cdot f(t, z, u, v))| \leqslant B(1 + |z|^2)$$

г) множество $f(t, z, P, v)$ выпукло при любых $t \geqslant 0$, $z \in R$, $v \in Q$.

Пусть, кроме того, в R задано некоторое линейное подпространство M. Будем говорить, что всеми перечисленными выше данными описана дифференциальная игра (1.1).

Измеримые вектор-функции $u^* = \{u(t),\ t \geqslant 0\}$, $v^* = \{v(t),\ t \geqslant 0\}$, удовлетворяющие при каждом t включению $u(t) \in P$, $v(t) \in Q$, назовем управлениями игроков U и V соответственно. Цель игрока U состоит в приведении точки z на множество M, игрок V старется помешать этому. Игра заканчивается, когда вектор z впервые попадает на M.

Отметим, что при выполнении условий а) — г) для любых $z_0 \in R$, $0 \leqslant \tau' \leqslant T$ и для любой пары управлений u^*, v^*, определенных на $[\tau', T]$, существует и единственно [2] решение (в смысле Каратеодори) $z(t)$, $\tau' \leqslant t \leqslant T$ уравнения (1.1) с начальным условием $z(\tau') = z_0$ (т. е. абсолютно непрерывная на $[\tau', T]$ вектор-функция $z(t)$ почти всюду удовлетворяющая уравнению (1.1)). Функцию $z(t)$ будем называть движением и обозначим $z(t) = z(t;\ \tau',\ z_0,\ u^*,\ v^*)$.

Обозначим через π оператор ортогонального проектирования из R на подпространство L (предполагаем, что $\dim L = \nu \geqslant 2$), являющееся ортогональным дополнением в R к M, через $\eta(t, z)$ — функцию $\eta(t, z) = (1 + t^2 + |z|^2)^{1/2}$. Для любого движения $z(t)$ положим $\eta \equiv \eta(t) \equiv \eta(t, z(t))$. Через $D(r)$, $r \geqslant 0$ обозначим совокупность всех пар (t, z), для которых $\eta(t, z) \leqslant r$, через $D(r, \varepsilon)$, $r \geqslant 1$, $\varepsilon > 0$ — совокупность пар $(t, z) \in D(r)$, таких, что $|\pi z| \leqslant \varepsilon$, через $X(r)$ — множество $D(r) \times P \times Q$.

Для производной функции η в силу уравнения (1.1) имеем (см. условие в)) $|\eta\eta^{\cdot}| = |t + (z\cdot z)^{\cdot}| \leqslant |t| + B(1 + |z|^2) \leqslant (B + 1)\eta^2$, так что $|\eta^{\cdot}| \leqslant a(1 + \eta^2)$, $a = (B + 1)/2$, и, следовательно [5], для любого движения $z(t) = z(t;\ t_*, z_*, u^*, v^*)$ имеет место оценка (здесь и всюду далее $\tau = t - t_*$, $\eta_* = \eta(t_*, z_*)$)

$$(1.2)\qquad \Phi(F(\eta_*) - \tau) = \varphi_1(\eta_*, \tau) \leqslant \eta(t) \leqslant \varphi_2(\eta_*, \tau) \equiv \Phi(F(\eta_*) + \tau),\quad 0 \leqslant \tau \leqslant \theta_*$$

$$F(r) = \frac{\operatorname{arctg} r}{a},\quad 0 \leqslant r < +\infty;\quad \Phi(s) = \operatorname{tg} as,\quad 0 \leqslant s < \alpha = \pi/2a$$

$$\theta_* = \min\left\{\frac{\alpha - F(\eta_*)}{2}, F(1)\right\}$$

Для дифференциальной игры (1.1) рассмотрим задачу уклонения от встречи (задачу убегания) [1,3-5].

2. Пусть $A = A(w) \in R$ — дифференцируемая вектор-функция векторной переменной $w \in R$ и пусть b — произвольный вектор из R. Под произведением $(\partial A / \partial w \cdot b)$ будем понимать вектор из R, каждая компонента которого есть скалярное произведение градиента соответствующей компоненты вектор-функции A на вектор b. Рассмотрим последовательность функций $h_i(t, z)$ и $g_i(t, z, u, v)$, удовлетворяющих следующим соотношениям:

$$(2.1)\qquad \pi f(t, z, u, v) = h_1(t, z) + g_1(t, z, u, v)$$

$$(2.2)\qquad \frac{\partial h_i(t, z)}{\partial t} + \left(\frac{\partial h_i(t, z)}{\partial z} \cdot f(t, z, u, v)\right) = h_{i+1}(t, z) + g_{i+1}(t, z, u, v),\quad i \geqslant 1$$

Отметим, что соотношению (2.1) можно придать форму (2.2) при $i = 0$, если положить

$$(2.3)\qquad h_0(t, z) = \pi z,\qquad g_0(t, z, u, v) \equiv 0$$

Будем предполагать, что для игры (1.1) выполнено (ср. [4]).

Условие 1. Существует натуральное число k и существуют непрерывно дифференцируемые вектор-функции $h_i(t, z)$, вектор-функции $g_i(t, z, u, v)$, $i = 1, \ldots, k$ и непрерывные неотрицательные скалярные функции $m_i(t, z, u, v)$, $i = 1, \ldots, k - 1$ (все функции и их свойства имеют место на множестве X), такие, что для любого $r \geqslant 1$ найдутся $\gamma(r) > 0$ и $\varepsilon(r) > 0$, такие, что для всех пар $(t, z) \in D(r, \varepsilon(r))$, для всех $u \in P$,

$v \in Q$ и для всех $i = 0, \ldots, k-1$ выполнены соотношения (2.1) — (2.3) и неравенство

$$(2.4) \qquad |g_i(t, z, u, v)| \leqslant |\pi z|^{k+1-i} m_i(t, z, u, v)$$

а также имеет место включение (S — единичный замкнутый шар в L)

$$(2.5) \qquad k!\,\gamma(r) S \subset \bigcap_{u \in P} g_k(t, z, u, Q), \quad (t, z) \in D(r), \quad z \in M$$

Замечание 1. Из соотношений (2.1) — (2.3) и непрерывности производных функций $h_i(t, z)$ следует непрерывность функций $g_i(t, z, u, v)$ на X. Легко проверить также (см. доказательство замечания 2), что функции $\varepsilon(r) > 0$ и $\gamma(r) > 0$ в условии 1 можно выбрать непрерывными и строго монотонно убывающими по $r \geqslant 1$. Считая, что такой выбор сделан, обозначим через $E(s)$, $\varepsilon_1 < s \leqslant \varepsilon_2$ ($\varepsilon_2 = \varepsilon(1)$, $\varepsilon_1 = \lim_{r \to +\infty} \varepsilon(r)$) функцию, обратную к $\varepsilon(r)$.

Лемма 1. Каково бы ни было $r \geqslant 1$ и каковы бы ни были векторы $d_0, \ldots, d_k \in L$, существует вектор $w \in L$, $|w| \leqslant {}^1/_2\,\gamma(r)$, такой, что

$$(2.6) \qquad \left| w\tau^k - \sum_{i=0}^{k} d_i \tau^i \right| \geqslant 4\rho(r)\tau^k, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 1$$

$$\rho(r) = \min\{1, \gamma(r) / (128(k+2)^2)\}$$

Лемма 1 — прямое следствие утверждений А), В) § 4 в [1].

При фиксированном $r \geqslant 1$ обозначим через $\omega(r; \delta)$ модуль непрерывности функции $g_k(t, z, u, v)$ на множестве $X(r)$. Очевидно, $\omega(r_1; \delta_1) \leqslant \omega(r_2; \delta_2)$ при $r_1 \leqslant r_2$ и $\delta_1 \leqslant \delta_2$.

Положим (здесь sup берется по множеству $X(r)$

$$(2.7) \qquad \lambda(r) = \sup\left\{\left|\frac{\partial h_k(t, z)}{\partial t} + \left(\frac{\partial h_k(t, z)}{\partial z} \cdot f(t, z, u, v)\right)\right| + \right.$$
$$\left. + |f(t, z, u, v)| + \sum_{i=1}^{k-1} m_i(t, z, u, v)\right\} + r$$

$$(2.8) \qquad H(r) = \lambda(\Phi({}^1/_2\,(\alpha + F(r)))) + 1, \quad \mu(r; \delta) = \omega(H(r); \delta)$$

Функции $\lambda(r)$ и $H(r)$ непрерывны и строго монотонно возрастают по $r \geqslant 1$.

Пусть $\Delta(r)$, $r \geqslant 1$ таково, что $\Delta(r) > 0$ и

$$(2.9) \qquad \mu(r; \Delta(r)) \leqslant \rho(r), \quad r \geqslant 1$$

Замечание 2. Функцию $\Delta(r)$, удовлетворяющую (2.9), можно выбрать (далее считаем, что этот выбор сделан) непрерывной и строго монотонно убывающей по $r \geqslant 1$.

Действительно. Пусть $\Delta_n > 0$, $n = 1, 2, \ldots$ таковы, что $\mu(n; \Delta_n) \leqslant \rho(n)$. Полагая $\delta_n = \min\{\Delta_1, \ldots, \Delta_n\} / 2^n$, $n = 1, 2, \ldots$, имеем $\delta_n \leqslant \Delta_n$ и последовательность $\delta_n > 0$ строго монотонно убывает. Полагая

$$\Delta(r) = \delta_{n+1} + (r - n)(\delta_{n+2} - \delta_{n+1}), \quad n \leqslant r \leqslant n+1, \; n = 1, 2, \ldots$$

будем иметь $\Delta(r) \leqslant \delta_{n+1}$, $n \leqslant r \leqslant n+1$, так что

$$\mu(r;\ \Delta(r)) \leqslant \mu(n+1;\ \delta_{n+1}) \leqslant \rho(n+1) \leqslant \rho(r)$$

(использовано монотонное убывание $\rho(r)$).

Положим

$$4b(r) = \min\{\varepsilon(r), \Delta(r), \rho(r), 1\},\ c(r) = \min_{1\leqslant s\leqslant r}\left(F\left(E\left(\frac{\varepsilon(s)+\varepsilon_1}{2}\right)\right) - F(s)\right) \tag{2.10}$$

$$\theta(r) = \min\{F(1),\ {}^1/_2(\alpha - F(r)),\ b(r)/H(r),\ c(r),\ \rho(r)/(3^{k+1}\times H^{k+2}(r))\}$$

$$n_1(r) = b(r)\,\theta^k(r) \leqslant b(r),\quad n(r) = n_1(\Phi({}^1/_3(2F(r)+\alpha))) \leqslant n_1(r)$$

Функции $\theta(r)$, $n(r)$, $b(r)$ монотонно убывают по $r \geqslant 1$, положительны и непрерывны.

Через N обозначим совокупность всех пар (t, z), $t \geqslant 0$, $z \in R$, таких

$$|\pi z| \leqslant n(\eta(t, z)) \tag{2.11}$$

3. *Лемма 2*. Каковы бы ни были $(t_*, z_*) \in N$, для любого движения $z(t) = z(t;\ t_*, z_*, u^*, v^*)$ на отрезке $I_* = [t_*, t_* + \theta(\eta_*)]$ (это обозначение сохраним в дальнейшем) выполнено неравенство $|\pi z(s)| \leqslant \varepsilon(\eta(s))$, $s \in I_*$.

Действительно (здесь и далее $f(s) \equiv f(s, z(s), u(s), v(s))$, $g_i(s) \equiv g_i(s, z(s), u(s), v(s))$, $i = 1, \ldots, k$)

$$z(t) - z_* = \int_{t_*}^{t} f(s)\,ds,\quad \pi z(t) = \pi z_* + \int_{t_*}^{t} \pi f(s)\,ds \tag{3.1}$$

Так что в силу (2.7), (2.8), (1.2)

$$|\pi z(t)| \leqslant |\pi z_*| + \int_{t_*}^{t} \lambda(\eta(s))\,ds \leqslant |\pi z_*| + \lambda(\Phi(F(\eta_*)+\tau))\tau \leqslant |\pi z_*| + \tau H(\eta_*),\quad t \in I_* \tag{3.2}$$

$$|z(t) - z_*| \leqslant \lambda(\varphi_2(\eta_*, \tau))\tau \leqslant \tau(H(\eta_*) - 1),\quad t \in I_*$$

Из первого неравенства в (3.2) имеем (см. (2.10), (2.11))

$$|\pi z(t)| \leqslant {}^1/_4\,\varepsilon(\eta_*) + b(\eta_*) \leqslant {}^1/_2(\varepsilon(\eta_*) + \varepsilon_1) \leqslant \varepsilon(\varphi_2(\eta_*, \tau)) \leqslant \varepsilon(\eta(t)),\quad t \in I_*$$

Последнее неравенство в цепочке следует из монотонности $\varepsilon(r)$ и неравенства (1.2), предпоследнее — следствие неравенства $\tau + F(\eta_*) \leqslant F(E({}^1/_2(\varepsilon(\eta_*) + \varepsilon_1)))$, вытекающего из (2.10), а также монотонности функций $\Phi(s)$ и $\varepsilon(r)$. Лемма доказана.

Лемма 3. При выполнении условия 1 для любых $0 \leqslant t_* \leqslant t$ и для любого движения $z(t) = z(t;\ t_*, z_*, u^*, v^*)$, такого, что $|\pi z(s)| \leqslant \varepsilon(\eta(s))$,

$t_* \leqslant s \leqslant t$, имеет место равенство

$$\pi z(t) = T(\tau) + m(t) + I(t) + h(t) \tag{3.3}$$

Здесь

$$I(t) = \int_{t_*}^{t} \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} g_k(t_*, z_* - \pi z_*, u(s), v(s))\, ds, \tag{3.4}$$

$$m(t) = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_*}^{t} \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} g_i(s)\, ds$$

$$T(\tau) = \pi z_* + \sum_{i=1}^{k} \frac{h_i(t_*, z_*)}{i!} \tau^i, \quad h(t) = \int_{t_*}^{t} \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} p(s)\, ds \tag{3.5}$$

$$p(s) = \frac{t-s}{k} \left[\frac{\partial h_k(s, z(s))}{\partial t} + \left(\frac{\partial h_k(s, z(s))}{\partial z} \cdot f(s) \right) \right] + \tag{3.6}$$

$$+ [g_k(s) - g_k(t_*, z_* - \pi z_*, u(s), v(s))]$$

Лемма 3 следует из второго равенства в (3.1) k-кратным интегрированием по частям с учетом соотношений (2.1) — (2.3).

Пусть теперь $(t_*, z_*) \in N$, $t \in I_*$ и $z(t) = z(t;\ t_*, z_*, u^*, v^*)$ — произвольное движение (напомним, что в соответствии с обозначениями $z(t_*) = z_*$). Из леммы 2 вытекает тогда, что для $z(t)$ справедлива лемма 3, а с ней (3.3) — (3.6). Оценим второе и четвертое слагаемые в (3.3).

В силу (2.4), (2.7), (2.8), (1.2), (3.2) (здесь $m_i(s) \equiv m_i(s, z(s), u(s), v(s))$, $i = 1, \ldots, k-1$) имеем

$$|m(t)| \leqslant \sum_{i=1}^{k-1} \int_{t_*}^{t} \frac{(t-s)^{i-1}}{(i-1)!} |\pi z(s)|^{k+1-i} m_i(s)\, ds \leqslant \tag{3.7}$$

$$\leqslant H(\eta_*) \sum_{i=1}^{k-1} \tau^i (|\pi z_*| + \tau H(\eta_*))^{k+1-i}, \quad t \in I_*$$

Для $p(s)$ имеем оценку (см. (2.8)) и свойства $\omega(r;\ \delta)$

$$|p(s)| \leqslant \tau\lambda(\eta(s)) + \omega(H(\eta_*);\ \tau + |z(s) - z_*| + |\pi z_*|) \tag{3.8}$$

ибо

$$\eta(t_*,\ z_* - \pi z_*) \leqslant \eta_* \leqslant H(\eta_*), \quad \eta(s) \leqslant \Phi(^1/_2(F(\eta_*) + \alpha)) \leqslant$$
$$\leqslant H(\eta_*)$$

$$[(s - t_*)^2 + |z(s) - (z_* - \pi z_*)|^2]^{1/2} \leqslant \tau + |z(s) - z_*| + \pi z_*|$$

Из (3.1) следует (см. (3.2)) $\tau + |z(s) - z_*| \leqslant \tau H(\eta_*)$, поэтому окончательно (см. (2.9), (2.10))

$$|h(t)| \leqslant \tau^{k+1} H(\eta_*) + \tau^k \mu(\eta_*), |\pi z_*| + \tau H(\eta_*) \leqslant \tau^k (\tau H(\eta_*) + \tag{3.9}$$
$$+ \rho(\eta_*)), \quad t \in I_*$$

(здесь использованы неравенства $|\pi z_*| \leqslant {}^1/_4\, \Delta(\eta_*)$, $\tau H(\eta_*) \leqslant \theta(\eta_*) \cdot$ $\cdot H(\eta_*) \leqslant {}^1/_4\, \Delta(\eta_*)$).

4. Введем понятие специального управления игрока V. Пусть $(t_*; z_*) \in N$ и пусть $w \in {}^1/_2\, \gamma(\eta_*)\, S$. Тогда, каково бы ни было управление $u^* = \{u(s), s \geqslant t_*\}$, существует управление $v_w{}^* = \{v_w(s) = V(u(s), w)\}$, называемое специальным (индексы, указывающие на зависимость от t_* и z_*, опускаем), такое, что

$$g_k(t_*, z_* - \pi z_*, u(s), v_w(s)) = -k!w, \quad s \geqslant t_* \tag{4.1}$$

Функцию $V(u, w)$ можно [3] выбрать так, что функция $v_w(s)$, $s \geqslant t_*$ измерима при любом измеримом u^* и фиксированном w.

Умножая (4.1) на $(t-s)^{k-1}$ и интегрируя в пределах от t_* до t, получим

$$I(t) = \int\limits_{t_*}^{t} \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} g_k(t_*, z_* - \pi z_*, u(s), v_w(s))\, ds = -w\tau^k, \quad \tau \geqslant 0 \tag{4.2}$$

5. Опишем активное поведение игрока V. Пусть игра (1.1) начинается в точке $(t_*, z_*) \in N$. Тогда в силу леммы 1 для многочлена $T(\tau)$, даваемого формулой (3.5), найдется вектор

$$w = w(t_*, z_*) \in {}^1/_2\, \gamma(\eta_*)\, S$$

такой, что $|T(\tau) - w\tau^k| \geqslant 4\rho(\eta_*)\, \tau^k$, $0 \leqslant \tau \leqslant \theta(\eta_*)$.

Зафиксируем так найденный вектор w и предпишем игроку V на отрезке I_* применять специальное управление $v(s) \equiv v_w(s)$ (см. п. 4). Тогда из леммы 3, оценок (3.7), (3.9) и равенств (3.3) — (3.6), (4.2) имеем при $t \in I_*$

$$\begin{aligned} |\pi z(t)| \geqslant 4\rho(\eta_*)\,\tau^k - \sum_{i=1}^{k-1} \tau^i H(\eta_*)(|\pi z_*| + \tau H(\eta_*))^{k+1-i} - \\ - \tau^k(\tau H(\eta_*) + \rho(\eta_*)) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Из формулы (3.1) следует, что (см. (3.2))

$$|\pi z(t)| \geqslant |\pi z_*| - \tau H(\eta_*), \quad t \in I_*$$

Поэтому для всех $\tau \in [0, \theta(\eta_*)] \cap [0, |\pi z_*| / (2H(\eta_*))]$ имеем

$$|\pi z(t)| \geqslant {}^1/_2 |\pi z_*| \geqslant {}^1/_2 |\pi z_*|^k \tag{5.2}$$

Для тех же $\tau \in [0, \theta(\eta_*)]$, для которых $\tau > |\pi z_*| / (2H(\eta_*))$, формула (5.1) дает (см. (2.10))

$$\begin{aligned} |\pi z(t)| &\geqslant 3\rho(\eta_*)\,\tau^k - \tau^{k+1} H(\eta_*) \left[1 + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{|\pi z_*|}{\tau} + H(\eta_*)\right)^{k+1-i}\right] \geqslant \\ &\geqslant 3\rho(\eta_*)\,\tau^k - \tau^{k+1} H(\eta_*) \left[1 + \sum_{i=1}^{k-1} (3H(\eta_*))^{k+1-i}\right] \geqslant \\ &\geqslant \tau^k [3\rho(\eta_*) - \tau 3^{k+1} (H(\eta_*))^{k+2}] \geqslant 2\rho(\eta_*)\,\tau^k > \rho(\eta_*) \frac{|\pi z_*|^k}{(2H(\eta_*))^k} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Поскольку в силу (1.2)

$$F(\eta(t)) \geqslant F(\eta_*) - \tau \geqslant F(\eta_*) - \frac{\alpha - F(\eta_*)}{2} \geqslant \frac{3F(\eta_*) - \alpha}{2}, \quad t \in I_*$$

и, следовательно

$$F(\eta_*) \leqslant \frac{2F(\eta(t)) + \alpha}{3}, \quad t \in I_* \tag{5.4}$$

то монотонность функций $\rho(r)$ и $H(r)$ дает вместе с (5.2), (5.3)

$$|\pi z(t)| \geqslant q(\eta(t))\, |\pi z_*|^k, \quad t \in I_* \tag{5.5}$$

$$q(r) = \min\left\{\frac{1}{2}, \rho\left(\Phi\left(\frac{2F(r)+\alpha}{3}\right)\right) \Big/ [2H(\Phi(\cdot))]^k\right\} \tag{5.6}$$

В соответствии с предпоследним неравенством в цепочке (5.3) в момент $t^* = t_* + \theta(\eta_*)$ (т. е. при $\tau = \theta(\eta_*)$) имеем (см. (5.4))

$$|\pi z(t^*)| \geqslant 2\rho(\eta_*) \quad (\theta(\eta_*))^k > n(\eta(t^*)) \tag{5.7}$$

поэтому точка $(t^*, z(t^*))$ не принадлежит N.

6. *Теорема об уклонении от встречи.* Если для дифференциальной игры (1.1) выполнено условие 1, то уклонение от встречи возможно. При этом, какой бы ни была начальная точка игры (t_0, z_0), $t_0 \geqslant 0$, $z_0 \in R \setminus M$, надлежащим выбором управления убегания $v^* = \{v(t),\ t \geqslant t_0\}$ можно обеспечить следующую оценку для величины $\xi(t) = |\pi z(t)|$, $t \geqslant t_0$:

$$\xi(t) \geqslant \begin{cases} \delta(\eta(t)), & t \geqslant t_0 \quad \text{при } (t_0, z_0) \notin N \\ (\xi(t_0))^k\, \delta(\eta(t)), & 0 \leqslant t - t_0 \leqslant \theta(\eta(t_0, z_0)) \quad \text{при } (t_0, z_0) \in N \\ \delta(\eta(t)), & t \geqslant t_0 + \theta(\eta(t_0, z_0)) \quad \text{при } (t_0, z_0) \in N \end{cases} \tag{6.1}$$

Здесь $\delta(r)$ и $\theta(r)$, $r \geqslant 1$ — монотонно убывающие непрерывные положительные функции своего аргумента, зависящие только от игры (1.1) и не зависящие ни от начальных значений фазовых координат игроков, ни от хода игры, N — некоторая зависящая лишь от игры (1.1) фиксированная замкнутая область в пространстве $[0, +\infty) \times R$, внутренность которой содержит множество $[0, +\infty) \times M$.

Доказательство. Зафиксируем множество N формулой (2.11). Тогда, как бы ни строил свое управление $u^* = \{u(t),\ t \geqslant t_0\}$ игрок U, предлагаем игроку V вести убегание (напомним, что [1] в каждый момент t игрок V знает $z(s)$ и $u(s)$, $s \leqslant t$) индуктивно циклами так, что каждый m-й цикл ($m \geqslant 1$) состоит из интервала пассивного убегания продолжительностью τ_m, на котором игрок V применяет управление $v^* = v_0^* = \{v(t) \equiv \equiv v_0\}$, где v_0 — раз и навсегда фиксированный вектор из Q, и следующего за ним интервала активного убегания длительностью θ_m, на котором игрок V применяет специальное управление убегания v_{w_m} (выбор w_m, см. п. 5). Длительность каждого интервала определяется индуктивно следующим образом: $\tau_1 = 0$, если $(t_0, z_0) \in N$ и $\tau_1 > 0$ — наименьший положительный корень уравнения $|\pi z(t_0 + \tau_1)| = n(\eta(t_0 + \tau_1))$, где $z(t) \equiv z(t;\ t_0, z_0, u^*, v_0^*)$, если $(t_0, z_0) \notin N$; $\theta_1 = \theta(\eta(t_0 + \tau_1))$ (см. (2.10)), при этом на первом активном участке $w_1 \equiv w(t_0 + \tau_1, z(t_0 + \tau_1))$.

При $m \geqslant 2$ величина $\tau_m > 0$ — наименьший положительный (см. (5.7)) корень уравнения

$$|\pi z(T_{m-1} + \tau_m)| = n(\eta(T_{m-1} + \tau_m))$$

где

$$T_i = t_0 + \sum_{j=1}^{i} (\tau_j + \theta_j), \quad z(t) \equiv z(t; T_{m-1}, z(T_{m-1}), u^*, v_0^*)$$

Величина $\theta_m > 0$ дается формулой $\theta_m = \theta\ (\eta\ (T^*_{m-1}))$, где $T^*_{m-1} = T_{m-1} + \tau$, причем на m-м активном участке $w_m \equiv w\ (T^*_{m-1},\ z\ (T^*_{m-1}))$, $z\ (t) \equiv z\ (t;\ T^*_{m-1},\ z\ (T^*_{m-1}),\ u^*,\ v^*_{w_m})$.

Получим оценку (6.1). Положим

$$\delta (r) = \min \left\{n (r), \quad q (r) n^k \left(\Phi \left(\frac{2F (r) + \alpha}{3}\right)\right)\right. \tag{6.2}$$

Тогда на пассивном участке (см. (2.11), (5.7)) оценка следует из определения множества N

$$\xi\ (t) \geqslant n\ (\eta\ (t)) \geqslant \delta\ (\eta\ (t)) \tag{6.3}$$

На m-м активном участке ($m \geqslant 2$) имеем в силу (5.5), (5.4), (6.2)

$$\xi\ (t) \geqslant [\xi\ (T^*_{m-1})]^k q\ (\eta\ (t)) = n^k\ (\eta\ (T^*_{m-1}))\, q\ (\eta\ (t)) \geqslant \delta\ (\eta\ (t)) \tag{6.4}$$

На первом активном участке оценка (6.1) следует из (5.5), если $\tau_1 = 0$, и совпадает с (6.4), если $\tau_1 > 0$.

Покажем теперь, что $T_m \to +\infty$, $m \to +\infty$. От противного. Если $T_m \to T_0$, то ряд $\theta_1 + \theta_2 + \ldots \leqslant T_0 - t_0$ сходится, так что $\theta_j \to 0$, $j \to +\infty$. Отсюда в силу монотонности функции $\theta (r) > 0$ имеем $\eta\ (T^*_{m-1}) \to +\infty$. Поскольку $T^*_{m-1} \to T_0$, то отсюда вытекает, что $|z\ (T^*_{m-1})| \to +\infty$ при $T^*_{m-1} \to T_0$. Последнее противоречит, однако, условию в) п. 1. Теорема доказана.

7. *Условие 2.* Существуют зависящие только от игры (1.1) числа $\tau_0 \geqslant 0$, $\theta > 0$ и функция $r\ (t)$, непрерывная на $[0,\ 2\theta]$ и положительная на $(0,\ 2\theta]$, такие, что для любого $t_0 \geqslant \tau_0$, $z_0 \in R$ можно построить вольтерровский [1] оператор $S_t = S_t\ (t_0,\ z_0,\ u^*)$, определенный на отрезке $I\ (t_0) = [t_0 + 2\theta]$ и ставящий в соответствие начальному значению $(t_0,\ z_0)$ и управлению $u^* = \{u\ (t),\ t \in I\ (t_0)\}$ управление

$$\bar{v}^* = \{v\ (t) \equiv S_t\ (t_0,\ z_0,\ u^*),\ t \in I\ (t_0)\} \tag{7.1}$$

такое, что каково бы ни было управление u^*, для движения $z\ (t) = z\ (t;\ t_0,\ z_0,\ u^*,\ \bar{v}^*)$ ($\bar{v}^*$ дается формулой (7.1)) выполнено неравенство

$$|\pi z\ (t)| \geqslant r\ (t - t_0), \quad t \in I\ (t_0) \tag{7.2}$$

Условие 3. Существуют постоянные $K > 0$ и $D > 0$, такие, что для всех $t \geqslant \tau_0$, z_1, $z_2 \in R$, $u \in P$, v_1, $v_2 \in Q$

$$|f\ (t,\ z_1,\ u,\ v_1) - f\ (t,\ z_2,\ u,\ v_2)| \leqslant K\,|\, z_1 - z_2| + D \tag{7.3}$$

Теорема об l-убегании. Пусть для игры (1.1) выполнены условия 2,3. Тогда, каковы бы ни были $t_0 \geqslant \tau_0$, $z_0 \in R$, для игры, начинающейся из точки (t_0, z_0), возможно l-уклонение от встречи [6], причем

$$l = \min_{s\in[0,\,\theta]} \mu(s) > 0, \quad \mu(s) = \max\{r(s),\ \rho(s)\}, \quad \rho(s) = r(\theta+s) - D \times \\ \times \frac{e^{Ks}-1}{K}$$

Доказательство. Пусть $t_0 \geqslant \tau_0$, $z_0 = z(t_0)$. Положим $\beta_n = t_0 + n\theta$, $n = 0, 1, \ldots$ Предлагаем для убегания, начинающегося в момент t_0 из точки z_0, индуктивно строить управление $v = v(t)$ на каждом из отрезков $I_n = [\beta_n, \beta_{n+1})$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ по правилу

$$v_n^* = \{v_n(t) \equiv S_t(\beta_n, z_n, u_n^*),\ t \in I_n\},\ u_n^* = \{u(t),\ t \in I_n\} \tag{7.4}$$

где $z_n = z(\beta_n)$ — реализовавшееся в момент β_n значение вектора $z(t)$.

Тогда в силу (7.2) справедливо неравенство

$$|\pi z(t)| = |\pi z(t;\ \beta_n,\ z_n,\ u_n^*,\ v_n^*)| \geqslant r(t-\beta_n), \quad \beta_n \leqslant t \leqslant \beta_{n+1}$$

При $n \geqslant 1$ имеем представление

$$\pi z(t) = \pi z_n(t) + y_n(t), \quad t \in I_n$$

$$z_n(t) \equiv z(t;\ \beta_{n-1},\ z_{n-1},\ u_{n0}^*,\ v_{n0}^*), \quad u_{n0}^* = \{u(t),\ \beta_{n-1} \leqslant \\ \leqslant t \leqslant \beta_{n+1}\}$$

$$v_{n0}^* = \{v_{n0}(t) \equiv S_t(\beta_{n-1},\ z_{n-1},\ u_{n0}^*),\ \beta_{n-1} \leqslant t \leqslant \beta_{n+1}\}$$

$$x_n(t) = z(t;\ \beta_n,\ z_n,\ u_n^*,\ v_n^*) - z(t;\ \beta_{n-1},\ z_{n-1},\ u_{n0}^*,\ v_{n0}^*)$$

$$y_n(t) = \pi x_n(t)$$

Поскольку $x_n(\beta_n) = 0$, то в силу (3.1), (7.3)

$$|z(t) - z_n(t)| = |x_n(t)| = \left| \int_{\beta_n}^{t} (f(s, z(s), u(s), v_n(s)) - f(s,\ z_n(s), u(s) \right. \\ \left. v_{n0}(s)))\, ds \right| \leqslant \int_{\beta_n}^{t} (K\,|z(s) - z_n(s)| + D)\, ds$$

Отсюда в силу неравенства Гронуолла [7]

$$|x_n(t)| \leqslant D\,(e^{K(t-\beta_n)} - 1)\,/\,K = h(t-\beta_n), \quad t \in I_n$$

Так что $|y_n(t)| \leqslant |x_n(t)| \leqslant h(t-\beta_n)$ и значит (см. условие 2)

$$|\pi z(t)| \geqslant |\pi z_n(t)| - |y_n(t)| \geqslant r(t-\beta_{n-1}) - h(t-\beta_n) = \\ = \rho(t-\beta_n), \quad t \in I_n \tag{7.5}$$

Из формул (7.4), (7.5) и следует утверждение теоремы. В заключение отметим только, что поскольку $r(s) > 0$, $0 < s \leqslant \theta$ и $\rho(0) = r(\theta) > 0$, то $\mu(s) > 0$, $0 \leqslant s \leqslant \theta$, а последнее неравенство в силу непрерывности $\mu(s)$ влечет положительность l.

Л. С. Понтрягин [1], М. С. Никольский [8] показали, что при выполнении их условий убегания выполнены условия 2, 3.

8. Рассмотрим одну задачу с малым параметром. Будем дополнительно предполагать, что правая часть уравнения (1.1) представима в виде

$$f(t, z, u, v) = F(t, z, u, v) + \varepsilon\varphi(t, z, u, v) \tag{8.1}$$

где функция $F(t, z, u, v)$ удовлетворяет условиям а) — в) п. 1, $\varepsilon \in [0, 1]$ — неотрицательный параметр. Зависимость правой части (1.1) от параметра ε введем и в обозначения. При данном $\varepsilon \in [0, 1]$ игру (1.1) обозначим через $(1.1)_\varepsilon$, а движения этой игры — через $z(t; \varepsilon) \equiv z(t; t_0, z_0, u^*, v^*, \varepsilon)$.

Условие 4. При $\varepsilon = 0$ игра $(1.1)_0$ удовлетворяет условиям 2, 3, причем в условии 3 для всех $t \geqslant \tau_0$, $z_1, z_2 \in R$, $u \in P$, $v \in Q$

$$|f(t, z_1, u, v) - f(t, z_2, u, v)| \equiv |F(t, z_1, u, v) - F(t, z_2, u, v)| \leqslant \leqslant K|z_1 - z_2| \tag{8.2}$$

Условие 5. Функция $\varphi(t, z, u, v)$ равномерно ограничена на $[\tau_0, +\infty) \times \times R \times P \times Q$; именно

$$|\varphi(t, z, u, v)| \leqslant 1 \tag{8.3}$$

Теорема об убегании в задаче с малым параметром. Пусть для игры (1.1) выполнены условия 4, 5. Тогда для любой начальной точки (t_*, z_*) игры (1.1), в которой $t_* \geqslant \tau_0$, $z_* \notin M$, существует $\varepsilon_* = \varepsilon(t_*, z_*) > 0$, такое, что, каково бы ни было $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$, в игре $(1.1)_\varepsilon$ с начальным условием $z(t_*; \varepsilon) = z_*$ возможно уклонение от встречи.

Доказательство. Положим

$$r_0 = \min_{\theta \leqslant s \leqslant 2\theta} r(s) > 0, \quad \Gamma_1(r) = \sup_{X(r)} |F(t, z, u, v)| + 1$$

$$\Gamma(r) = \Gamma_1(re^{(B+1)})$$

Зафиксируем (см. θ в условии 2)

$$\tau_* = \min\left\{1, \theta, \frac{|\pi z_*|}{2\Gamma(\eta_*)}, \frac{1}{K}\ln\left(1 + \frac{Kr_0}{2D}\right)\right\} \tag{8.4}$$

$$r_* = \min_{s \in [\tau_*, \theta]} r(s) > 0; \quad \varepsilon_* = \varepsilon(t_*, z_*) = \min\left\{\frac{r_* K}{2(e^{K\theta} - 1)}, \frac{r_0 K}{4(e^{2K\theta} - 1)}\right\}$$

При $\varepsilon \in [0, 1]$ из (3.1) (как и в (3.2)) имеем (в силу неравенства $|\eta^\cdot| \leqslant \leqslant (B + 1)\eta$, полученного в п. 1) для любого движения $z(t; \varepsilon) \equiv z(t; t_*, z_*, u^*, v^*; \varepsilon)$ неравенство

$$|\pi z(t; \varepsilon)| \geqslant |\pi z_*| - \tau\Gamma(\eta_*), \quad 0 \leqslant \tau = t - t_* \leqslant 1$$

Так что

$$|\pi z(t; \varepsilon)| \geqslant {}^1/_2 |\pi z_*|, \quad 0 \leqslant \tau \leqslant \tau_* \tag{8.5}$$

Пусть теперь ε — произвольное фиксированное число из отрезка $[0, \varepsilon_*]$. Положим $\beta_n = t_* + n\theta$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Предлагаем в игре $(1.1)_\varepsilon$ для убегания, начинающегося в момент t_* из точки z_*, индуктивно строить управление $v = v(t)$ на каждом из отрезков $I_n = [\beta_n, \beta_{n+1})$, $n = 0, 1, \ldots$

по правилу

$$(8.6)\qquad \begin{aligned} &v_n{}^* \equiv \{v_n(t) \equiv S_t(\beta_n, z_n, u_n{}^*), \; t \in I_n\} \\ &z_n = z(\beta_n; \varepsilon), \; u_n{}^* = \{u(t), \; t \in I_n\} \end{aligned}$$

где оператор S_t строится (см. условия 4.2) для игры $(1.1)_0$.

При $n \geqslant 1$ имеем представление

$$(8.7)\qquad \begin{aligned} &\pi z(t; \varepsilon) = \pi z_n(t) + x_n(t) + y_n(t), \quad t \in I_n \\ &z_n(t) \equiv z(t; \beta_{n-1}, z_{n-1}, u_{n0}{}^*, v_{n0}{}^*; 0), \quad u_{n0}{}^* = \{u(t), \beta_{n-1} \leqslant \\ &\leqslant t \leqslant \beta_{n+1}\} \\ &v_{n0}{}^* = \{v_{n0}(t) \equiv S_t'(\beta_{n-1}, z_{n-1}, u_{n0}{}^*), \; \beta_{n-1} \leqslant t \leqslant \beta_{n+1}\} \\ &x_n(t) = \pi\varepsilon_n(t), \quad y_n(t) = \pi\Delta_n(t), \quad \Delta_n(t) = z_n(t; 0) - z_n(t) \\ &\varepsilon_n(t) = z(t; \beta_n, z_n, u_n{}^*, v_n{}^*; \varepsilon) - z_n(t; 0) \equiv z(t; \varepsilon) - z_n(t; 0) \\ &z_n(t; 0) \equiv z(t; \beta_n, z_n, u_n{}^*, v_n{}^*; 0) \end{aligned}$$

Оценим каждое из слагаемых в (8.7). В силу условий 4.2

$$(8.8)\qquad |\pi z_n(t)| \geqslant r(t - \beta_{n-1}), \quad t \in I_n, \quad n \geqslant 1$$

Поскольку $\varepsilon_n(\beta_n) = 0$, то

$$\varepsilon_n(t) = \int_{\beta_n}^{t} \frac{d\varepsilon_n(s)}{ds}\, ds = \int_{\beta_n}^{t} (f(s, z(s, \varepsilon), u(s), v_n(s)) - F(s, z_n(s; 0)$$

$$u(s), v_n(s)))\, ds$$

Так что

$$|\varepsilon_n(t)| \leqslant \varepsilon \int_{\beta_n}^{t} |\varphi(s, z(s; \varepsilon), u(s), v_n(s))|\, ds + \int_{\beta_n}^{t} |F(s, z(s; \varepsilon),$$

$$u(s), v_n(s)) - F(s, z_n(s; 0), u(s), v_n(s))|\, ds$$

Отсюда в силу условий 4, 5

$$|\varepsilon_n(t)| \leqslant (t - \beta_n)\varepsilon + \int_{\beta_n}^{t} K\, |\varepsilon_n(s)|\, ds$$

Так что по лемме Гронуолла

$$(8.9)\qquad \begin{aligned} &|x_n(t)| \leqslant |\varepsilon_n(t)| \leqslant \varepsilon c(t - \beta_n), \quad t \in I_n, \quad n = 0, 1, \ldots; \\ &c(s) = (e^{KS} - 1) / K \end{aligned}$$

Для величины $\Delta_n(t)$ имеем $\Delta_n(\beta_n) = z(\beta_n; \varepsilon) - z_{n-1}(\beta_n; 0)$. Отсюда в силу (8.9)

$$(8.10)\qquad |\Delta_n(\beta_n)| < \varepsilon c, \quad c = c(\theta), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Поэтому в соответствии с условием 3

$$|\Delta_n(t)| \leqslant \varepsilon c + \int\limits_{\beta_n}^{t} |F(s, z_n(s; 0),\ u(s), v_n(s)) - F(s, z_n(s), u(s)$$
$$v_{n0}(s))|\, ds \leqslant \varepsilon c + \int\limits_{\beta_n}^{t} (K|\Delta_n(s)| + D)\, ds$$

Отсюда по лемме Гронуолла

$$(8.11) \qquad |y_n(t)| \leqslant |\Delta_n(t)| \leqslant \left(\varepsilon c + \frac{D}{K}\right) e^{K(t-\beta_n)} - \frac{D}{K} \leqslant \varepsilon c e^{K\theta} + Dc(t-\beta_n)$$
$$t \in I_n$$

Объединяя (8.7) — (8.9), (8.11), получим при $n \geqslant 1$

$$(8.12) \qquad |\pi z(t;\ \varepsilon)| \geqslant r(t - \beta_n + \theta) - \varepsilon(ce^{K\theta} + c(t - \beta_n)) -$$
$$- Dc(t - \beta_n) = \rho(t - \beta_n;\ \varepsilon), \quad t \in I_n$$

Здесь

$$(8.13) \qquad \rho(s;\ \varepsilon) = r(\theta + s) - Dc(s) - \varepsilon(c(s) + ce^{K\theta}) \geqslant \rho_*(s)$$
$$s \in [0,\ \theta];\ \rho_*(s) = \rho(s;\ \varepsilon_*)$$

При $n \geqslant 0$ имеем также представление (обозначения см. (8.7))

$$(8.14) \qquad \pi z(t;\ \varepsilon) = \pi z_n(t;\ 0) + x_n(t), \quad t \in I_n$$

Поскольку в силу условий 2,4, а также неравенства (8.9)

$$(8.15) \qquad |\pi z_n(t;\ 0)| \geqslant r(t - \beta_n); \quad |x_n(t)| \leqslant \varepsilon c(t - \beta_n), \quad t \in I_n$$

то из (8.14) имеем (при $p_*(s) \equiv r(s) - \varepsilon_* c(s),\ 0 \leqslant s \leqslant \theta$)

$$(8.16) \qquad |\pi z(t;\ \varepsilon)| \geqslant r(t - \beta_n) - \varepsilon c(t - \beta_n) \geqslant p_*(t - \beta_n), \quad t \in I_n$$

Из формулы (8.16) имеем на отрезке $t \in [t_* + \tau_*,\ \beta_1]$ в силу определения $\varepsilon(t_*,\ z_*)$

$$(8.17) \qquad |\pi z(t;\ \varepsilon)| \geqslant r_* - \varepsilon_* c(\theta) \geqslant r_* / 2$$

Так что в соответствии с (8.5)

$$|\pi z(t;\ \varepsilon)| \geqslant {}^1/_2 \min\{r_*,\ |\pi z_*|\} > 0, \quad t \in I_0$$

Полагая $\mu_*(s) = \max\{\rho_*(s),\ p_*(s)\}$ имеем из (8.12), (8.13), (8.16)

$$(8.18) \qquad |\pi z(t;\ \varepsilon)| \geqslant \mu_*(t - \beta_n), \quad t \in I_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

Покажем теперь, что $\mu_*(s) > 0$ на $[0,\ \theta]$. Действительно (см. (8.17)), $p_*(s) \geqslant r_* / 2 > 0,\ \tau_* \leqslant s \leqslant \theta$. На отрезке же $[0,\ \tau_*]$ имеем в силу определения τ_* (см. (8.4))

$$\rho_*(s) \geqslant r_0 - Dc(\tau_*) - \varepsilon_* c(1 + e^{K\theta}) \geqslant r_0 / 2 - \varepsilon_*(e^{2K\theta} -$$
$$- 1) / K$$

Отсюда в соответствии с определением ε_* имеем $\rho_* (s) \geqslant r_0 / 4 > 0$, $s \in [0, \tau_*]$. Положительность $\mu_* (s)$ доказана.

Поскольку $\mu_* (s)$ непрерывна, то $l_* = \min\limits_{s \in [0, \theta]} \mu_* (s) > 0$, так что формулы (8.16), (8.18) гарантируют l-убегание в задаче (1.1) при $\varepsilon \in [0, \varepsilon_*]$, $z (t_*; \varepsilon) = z_*$.

Поступила 5 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С.* Линейная дифференциальная игра убегания. Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 1971, т. 112.
2. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, т. 51, вып. 1.
3. *Мищенко Е. Ф., Сатимов Н.* Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх с нелинейными управлениями. Дифференциальные уравнения, 1973, т. 9, № 10.
4. *Пшеничный Б. Н., Чикрий А. А.* Задача об уклонении от встречи в дифференциальных играх. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 6.
5. *Гусятников П. Б.* Убегание нелинейных разнотипных объектов с интегральными ограничениями на управления. ПММ, 1975, т. 39, вып. 1.
6. *Гусятников П. Б.* Об l-уклонении от встречи в линейной дифференциальной игре. ПММ, 1974, т. 38, вып. 3.
7. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., «Мир», 1970.
8. *Никольский М. С.* Об одном способе убегания. Докл. АН СССР, 1974, т. 214, № 2.