УДК 539.3:534.231.1

ОБ ОДНОМ ТОЧНОМ РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ УПРУГИХ ВОЛН НА КЛИНЕ

С. М. Капустянский

(Ленинград)

Получено точное решение нестационарной задачи дифракции плоской продольной и поперечной упругих волн на клине со следующими краевыми условиями: нормальные напряжения и касательные смещения равны нулю.

Задача о дифракции упругих волн на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду, рассмотрена в работе [1]. Получение замкнутого решения в этом случае возможно благодаря тому, что граничные условия для продольного и поперечного потенциалов разделяются (до тех пор, пока не учитываются условия на ребре). Было выяснено [2], что при исследовании взаимодействия упругих волн с плоскими границами граничные условия для потенциалов разделяются еще и в том случае, когда на границе заданы нормальные напряжения и касательные смещения.

1. Постановка задачи. Упругая среда со скоростями a и b распространения продольных и поперечных волн заполняет внешность клина, на границах которого заданы условия обращения в нуль радиального смещения и тангенциального напряжения.

Связь радиальных u_r и тангенциальных u_θ смещений с продольным φ и поперечным ψ потенциалами дается соотношениями

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \qquad u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

В потенциалах граничные условия на гранях клина имеют следующий вид (γ — внешний угол клина):

$$\varphi = 0, \qquad \partial\psi / \partial\theta = 0 \quad \text{при } \theta = 0, \gamma \quad (\gamma = k^{-1}\pi, \ k < 1)$$

Условия на ребре принимаются в том же виде, что и в работе [1], а именно, требуется, чтобы смещения были ограниченными, а напряжения и деформации росли медленнее, чем r^{-1}. Предполагается, что потенциал падающей волны описывается ступенчатой функцией Хевисайда.

Фронты волн, образующихся при падении продольной волны на клин, показаны на фигуре для случаев *а*, когда теневая область не образуется (угол падения $\beta > \gamma - 3\pi / 2$) и *б*, когда теневая область образуется ($\beta < \gamma - 3\pi / 2$). Линии abc и egh — фронты дифрагированных продольной и поперечной волн. Коэффициент отражения падающей продольной волны равен -1, а поперечной равен 1.

2. Падение продольной волны. Во внутренней части области, ограниченной гранями клина oa и oc, а также фронтом дифрагированной продольной волны abc, вводятся независимые переменные $\varepsilon_1 = r_1^{-1} - \sqrt{r_1^{-2} - 1}$ и θ, где $r_1 = r\,(at)^{-1}$. Тогда волновое уравнение для продольного потенциала перейдет в уравнение Лапласа.

Рассматриваемая область конформно отображается в верхний полукруг плоскости y_1 путем следующего преобразования:

$$y_1 = R_1 e^{i\nu} \qquad (R_1 = \varepsilon_1^k, \ \nu = k\theta)$$

В этой области вводится аналитическая функция $W_a(y_1) = \varphi_a(y_1) + if_1(y_1)$ комплексного переменного y_1 ($\varphi_a(y_1)$ — продольный потенциал, соответствующий акустическому решению). Воспользовавшись принципом симметрии, функцию $W_a(y_1)$ можно аналитически продолжить в нижнюю часть единичного круга.

Таким образом, задача формулируется следующим образом: необходимо найти действительную часть функции $W_a(y_1)$ при следующих условиях на поверхности единичного круга ($R_1 = 1$):

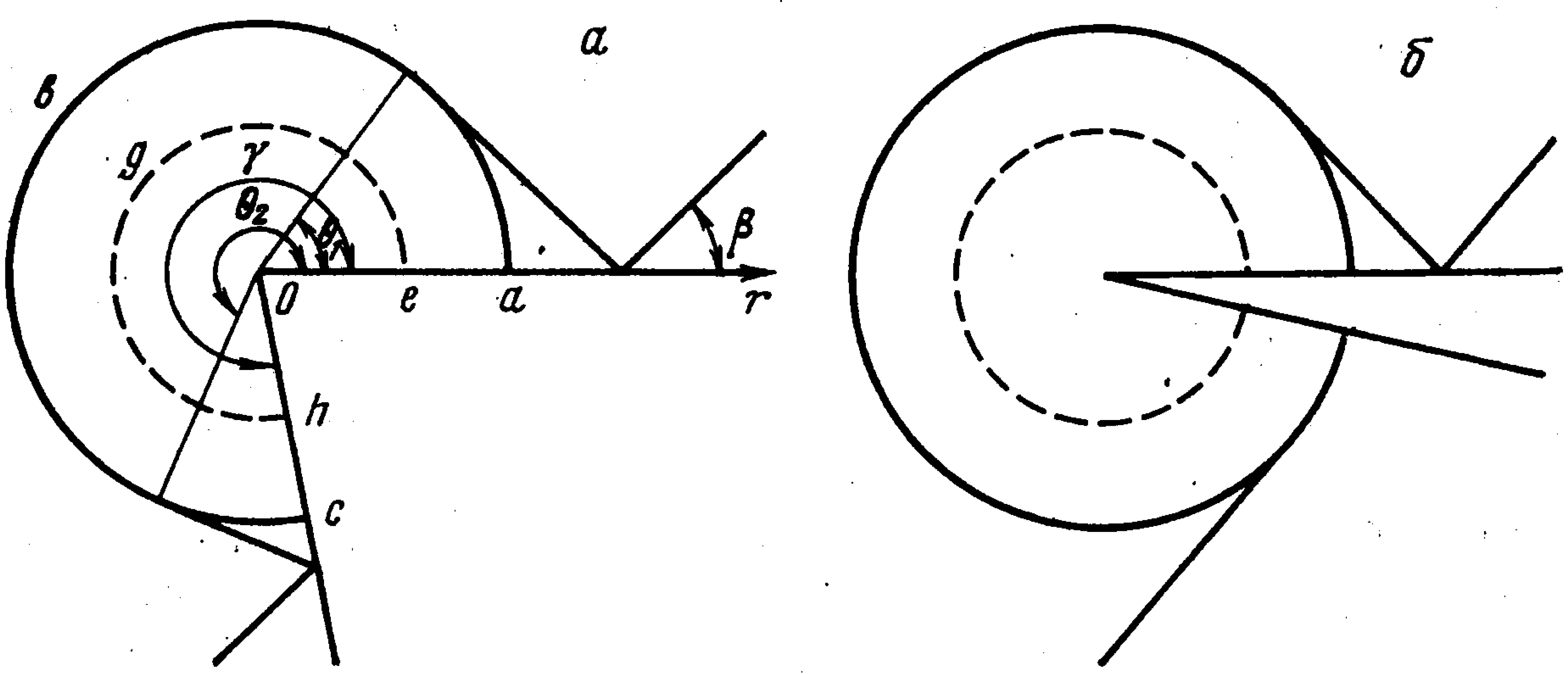
$$\operatorname{Re} W_a = \begin{cases} 0, & -\nu_1 < \nu < \nu_1, \quad \nu_2 < \nu < 2\pi - \nu_2 \\ 1, & \nu_1 < \nu < \nu_2 \\ -1, & 2\pi - \nu_2 < \nu < 2\pi - \nu_1 \end{cases}$$

$$(\nu_1 = k\theta_1, \ \nu_2 = k\theta_2, \ \theta_1 = \pi / 2 - \beta)$$

$$\theta_2 = \begin{cases} 2\gamma - 3\pi / 2 - \beta, & \beta > \gamma - 3\pi / 2 \\ 3\pi / 2 + \beta, & \beta < \gamma - 3\pi / 2 \end{cases}$$

Решение задачи Дирихле для круга известно [3].

Однако полученное акустическое решение не будет, вообще говоря, удовлетворять условию на ребре. Для того чтобы удовлетворить условию на ребре, представим продольный потенциал в виде суммы двух функций. Первая функция описывает акусти-



ческое решение. Вторая выбирается так, чтобы она удовлетворяла уравнению Лапласа, нулевым граничным условиям на верхней полуокружности, на действительной оси плоскости y_1 и позволила бы удовлетворить условию на ребре.

Таким образом, выражение для продольного потенциала можно записать в виде

$$\varphi(r_1, \ \theta) = \varphi_a(r_1, \ \theta) + \mathrm{Re}\,[ia_1(y_1 + y_1^{-1})] \tag{2.1}$$

где a_1 — неизвестный пока коэффициент, который должен быть определен из условия на ребре.

Аналогично ищется решение для поперечного потенциала.

Область, ограниченная гранями клина oe и oh (фигура), а также фронтом дифрагированной поперечной волны egh, отображается на верхний полукруг плоскости y_2 при помощи преобразования

$$y_2 = R_2 e^{i\nu} \qquad R_2 = \left(r_2^{-1} - \sqrt{r_2^{-2} - 1}\right)^k, \quad r_2 = r\,(bt)^{-1}$$

Вводится функция $W_2(y_2) = \psi(y_2) + if_2(y_2)$. Эта функция находится так, чтобы она удовлетворяла уравнению Лапласа, условиям

$$\mathrm{Re}\,W_2 = 0 \qquad \text{при} \ R_2 = 1, \ 0 < \nu < \pi$$

$$\mathrm{Re}\,\partial W_2/\partial\theta = 0 \quad \text{при} \ \nu = 0, \ \nu = \pi$$

и позволила бы выполнить граничные условия на ребре. Тогда можно записать

$$W_2(y_2) = a_2(y_2 - y_2^{-1}) \tag{2.2}$$

где a_2 — неизвестный пока коэффициент.

С использованием формул (2.1), (2.2) выражения для смещений в области, ограниченной гранями клина и фронтом дифрагированной поперечной волны, запишем в виде

$$u_r = 2k\,(\pi r\sqrt{1 - r_1^2})^{-1}\,[\mathrm{Re}\,(iQ) - {}^1/_2 a_1\pi\,(R_1 + R_1^{-1})\sin\nu] - a_2 k r^{-1}\,(R_2 - {} \tag{2.3}$$

$$- R_2^{-1})\sin\nu$$

$$u_\theta = 2k / \pi r\,[\mathrm{Re}\,(-Q) - {}^1/_2 a_1\pi\,(R_1 - R_1^{-1})\cos\nu] -$$

$$- a_2 k r^{-1}(1 - r_2^2)^{-1/2}\,(R_2 + R_2^{-1})\cos\nu$$

$$Q = y_1\,[(\cos\nu_2 - y_1)\,(1 + y_1^2 - 2y_1\cos\nu_2)^{-1} -$$

$$- (\cos\nu_1 - y_1)\,(1 + y_1^2 - 2y_1\cos\nu_1)^{-1}]$$

Выполнив асимптотические разложения при $r \to 0$ для выражений (2.3) и воспользовавшись условием ограниченности смещений на ребре клина, получим следующие зависимости для коэффициентов a_1 и a_2:

$$a_1 = 2\pi^{-1} [1 + (ab^{-1})^{2k}]^{-1} (\cos \nu_1 - \cos \nu_2), \quad a_2 = a_1 (ab^{-1})^k \tag{2.4}$$

С учетом (2.4) выражения для потенциалов запишутся в виде

$$\varphi = \varphi_a (r, \theta, t) - 4\pi^{-1} [1 + (ab^{-1})^{2k}]^{-1} (R_1 - R_1^{-1}) \sin \pi k \sin k (\pi / 2 + \beta) \sin k\theta$$

$$\psi = 4\pi^{-1} [1 + (ab^{-1})^{2k}]^{-1} (ab^{-1})^k (R_2 - R_2^{-1}) \sin \pi k \sin k (\pi / 2 + \beta) \cos k\theta$$

В отличие от случая падения продольной волны на жесткий клин, вставленный без трения в упругую среду, в рассматриваемом случае не существует такого значения угла падения, при котором решение совпало бы с акустическим. Так же, как и в работе [1], можно убедиться в том, что упругие члены и акустические имеют одинаковую интенсивность как вблизи ребра клина, так и вблизи фронтов дифрагированных волн. В окрестности дифрагированной продольной волны акустическая и упругая составляющие радиального смещения имеют порядок $(r_1^{-1} - 1)^{-1/2}$, а составляющие тангенциального смещения — порядок единицы.

Вблизи фронта поперечной волны обе составляющие радиального смещения имеют порядок единицы, а тангенциального смещения — порядок $(r_1^{-1} - 1)^{-1/2}$.

3. Падение поперечной волны. Решение в этом случае может быть получено тем же методом, что и в п. 2. Приведем, например, выражения для потенциалов (теневая область отсутствует)

$$\varphi = 4\pi^{-1} [1 + (ab^{-1})^{2k}]^{-1} (ab^{-1})^k (R_1 - R_1^{-1}) \sin \pi k \cos k (\pi / 2 + \beta) \sin k\theta$$

$$\psi = \psi_a (r, \theta, t) - 4\pi^{-1} [1 + (ba^{-1})^{2k}]^{-1} (R_2 - R_2^{-1}) \sin \pi k \cos k (\pi/2 + \beta) \cos k\theta$$

Здесь $\psi_a (r, \theta, t)$ — решение акустической задачи в области, ограниченной гранями клина (на которых $\partial\psi_a / \partial\theta = 0$) и фронтом дифрагированной поперечной волны. Решение совпадает с акустическим в том случае, когда падающий луч направлен по биссектрисе клина. Как и в п. 2, упругие добавочные члены имеют тот же порядок, что и акустические.

Заметим, что при стремлении к нулю модуля сдвига окружающей клин среды решение рассматриваемой задачи переходит в решение задачи о дифракции акустической волны на полом клине.

Автор благодарит Н. В. Зволинского за внимание к работе.

Поступила 18 IV 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Костров Б. В.* Дифракция плоской волны на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
2. *Флитман Л. М.* Об одной краевой задаче для упругого полупространства. Изв. АН СССР. Серия геофиз., 1958, № 1.
3. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. М., «Наука», 1973.

Технический редактор *З. В. Филиппова*

Сдано в набор 25/XI-1975 г. Т-03711 Подписано к печати 23/I-1976 г. Тираж 2850 экз.
Зак. 3123 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 16,8 Бум. л. 6,0 Уч.-изд. л. 15,7

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10