

$$\begin{aligned}
c^\alpha &= Q^\alpha + (M^{\alpha\beta} + \chi^{\alpha\beta}) \pi_\beta + (m^{\alpha\beta} - \chi^{\alpha\beta}) \mu_\beta + T^{\alpha\beta} \omega_\beta \\
k_{0\partial}^\alpha + \alpha^\alpha &= (M^{\alpha\beta} - \chi^{\alpha\beta}) \omega_\beta, \quad d^\alpha - \alpha^\alpha = (m^{\alpha\beta} - \chi^{\alpha\beta}) \omega_\beta \\
j^\alpha + \rho^\alpha &= (Q^\beta + \tau^\beta) (\delta_\beta^\alpha + e_{,\beta}^{\alpha\cdot}) + (R + r) \left[v^\alpha + \frac{s}{1-s} (v^\alpha - \iota^\alpha) \right] \\
\rho^\alpha &= \tau^\alpha (\delta_\beta^\alpha + e_{,\beta}^{\alpha\cdot}) + r \left[\iota^\alpha + \frac{s}{1-s} (v^\alpha - \iota^\alpha) \right], \quad j^3 = R, \quad \rho^3 = r
\end{aligned}$$

Здесь использованы соотношения

$$E_{A,M}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda_{A,M} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} + 2\mu_{A,M} a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta}$$

Граничные условия:

на контуре C_1

$$t^{\alpha\beta} n_\alpha = N^\alpha, \quad c^\alpha n_\alpha = N, \quad y^{\alpha\beta} + z^{\alpha\beta} = K^\alpha, \quad s^{\alpha\beta} - z^{\alpha\beta} = L^\alpha$$

на контуре C_2

$$v_\alpha = V_\alpha, \quad w = W, \quad \varphi_\alpha = \Phi_\alpha, \quad \psi_\alpha = \Psi_\alpha$$

В ряде частных случаев полученные выше уравнения и соотношения приводятся к известным зависимостям [2-5,9,10].

Поступила 18 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., «Наука», 1972.
2. Григолюк Э. И., Чулков П. П. Нелинейные уравнения пологих многослойных оболочек регулярного строения. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1.
3. Прусаков А. П., Растеряев Ю. К. Изгиб, устойчивость и колебания многослойных пластин несимметричного строения. Тр. VII Всес. конференции по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1970.
4. Новичков Ю. Н. Нелинейная теория и устойчивость толстых многослойных оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
5. Герштейн М. С. Геометрически нелинейные уравнения движения упругой многослойной оболочки. Механика полимеров, 1973, № 5.
6. Levinson M. Application of the Galerkin and Ritz methods to nonconservative problems of elastic stability. Z. angew. Math. und Phys., 1966, Bd 17.
7. Айнола Л. Я. Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек. Изв. АН ЭстССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1965, т. 14, № 3.
8. Айнола Л. Я. Вариационные методы для нелинейных уравнений движения оболочек. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
9. Achenbach J. D., Herrmann G. Effective stiffness theory for a laminated composite. In: Proc. of 10th Midwest. mech. conf. Boulder, Colo. 1968.
10. Болотин В. В. К теории слоистых плит. Изв. АН СССР. ОГН. Механика и машиностроение, 1963, № 3.

УДК 534.222.2

ОБ АСИМПТОТИКЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСА

А. И. Державина

(Москва)

Рассматривается движение газа, первоначально заполняющего все пространство, под действием мгновенного выделения в тонком слое начальной внутренней энергии E_0 и импульса I_0 . Численно исследовано асимптотическое поведение решения при различных соотношениях между E_0 и I_0 .

При решении нестационарных задач газовой динамики очень часто интерес представляет исследование асимптотических свойств движения, которые устанавливаются

при достаточно большом времени t и не зависят от деталей начальных данных. В большинстве случаев эти свойства описываются автомодельными решениями. Выход течения на автомодельный режим можно проследить, решая точную задачу с начальными и краевыми условиями для исходных уравнений Эйлера.

Рассмотрим плоские движения идеального газа, лишенного вязкости и теплопроводности, при следующих начальных данных. Пусть при $t = 0$ в слое газа $0 \leq x \leq x_0$ (x_0 — эйлерова пространственная координата) заданы постоянные давление $p = p_0$ и скорость $v = v_0$, в остальной части пространства $p = 0$, $v = 0$. Плотность газа ρ в начальный момент постоянна во всем пространстве и равна ρ_0 . Для идеального газа можно записать выражения для кинетической энергии K_0 , соответствующей импульсу I_0 , и внутренней энергии E_0 , задаваемых в начальный момент на единицу площади

$$K_0 = \frac{\rho_0 v_0^2 x_0}{2}, \quad E_0 = \frac{\rho_0 x_0}{\kappa - 1}$$

Здесь κ — отношение удельных теплоемкостей. Будем интересоваться асимптотическим поведением решения указанной задачи при больших t , когда размер области возмущенного движения $X \gg x_0$. Очевидно, что выход решения на асимптотику в значительной степени будет определяться соотношением между E_0 и K_0 .

В предельном случае $K_0 = 0$, $E_0 = \text{const}$, $x_0 \rightarrow 0$ рассматриваемая задача сводится к сингулярной задаче Коши, описывающей взрыв плоского заряда в газе [1]. При $E_0 \gg K_0$ можно ожидать, что рассматриваемое движение непосредственно будет выходить на асимптотику, соответствующую автомодельному решению задачи о сильном взрыве, причем с увеличением E_0 и уменьшением x_0 время выхода на предельный режим будет уменьшаться. В случае $K_0 \gg E_0$ при $t \rightarrow \infty$ асимптотикой движения по-прежнему будет служить решение задачи о сильном взрыве. Но, с другой стороны, поскольку в начальный момент все частицы газа в слое будут иметь начальную скорость v_0 в направлении оси x , то слева от слоя некоторое время будет существовать течение разрежения. Подобная ситуация характерна для задачи о выделении энергии на границе двух сред с разными плотностями [2]. В начальный момент будет существовать несимметрия в распределении энергии между частями газа, движущимися влево и вправо. Поэтому можно ожидать, что на некотором промежутке времени ударная волна, движущаяся вправо, будет следовать закону, соответствующему автомодельному решению задачи о коротком ударе [3, 4]. С течением времени произойдет перераспределение энергии между левым и правым (относительно точки с нулевой скоростью) полупространствами в соответствии с режимом течения, устанавливающимся при сильном взрыве.

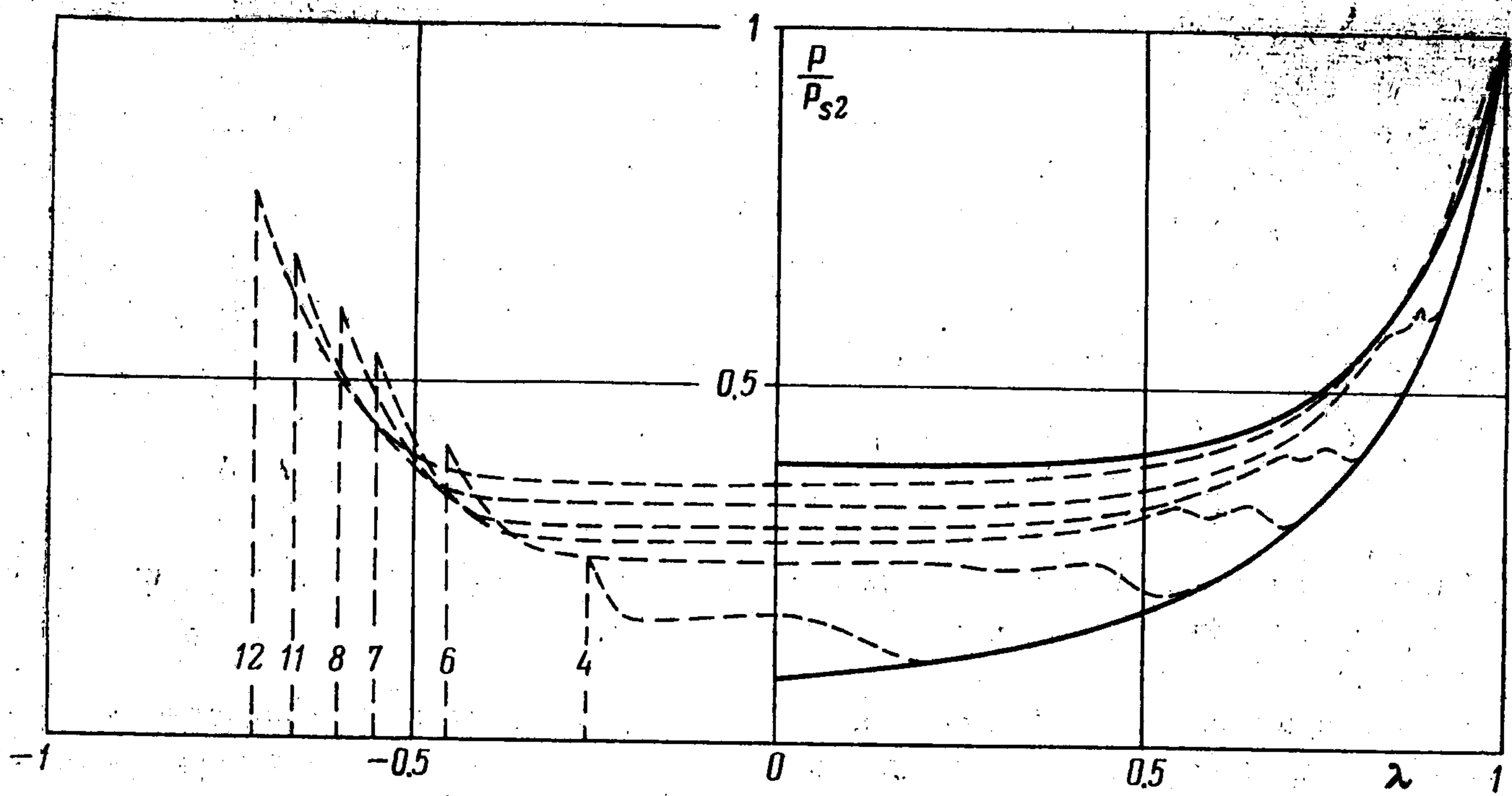
Для подтверждения приведенных выше рассуждений качественного порядка и более детального исследования влияния параметров K_0 и E_0 на асимптотику плоского движения газа были выполнены расчеты со следующими разрывными начальными данными: при $t = 0$, $0 \leq x \leq 0.5$

$$\begin{aligned} 1^\circ p = 2, v = 0, \rho = 1; & \quad 3^\circ p = 1, v = \sqrt{5}, \rho = 1 \\ 2^\circ p = 0, v = 3.16, \rho = 1; & \quad 4^\circ p = 1.5, v = \sqrt{2.5}, \rho = 1 \end{aligned}$$

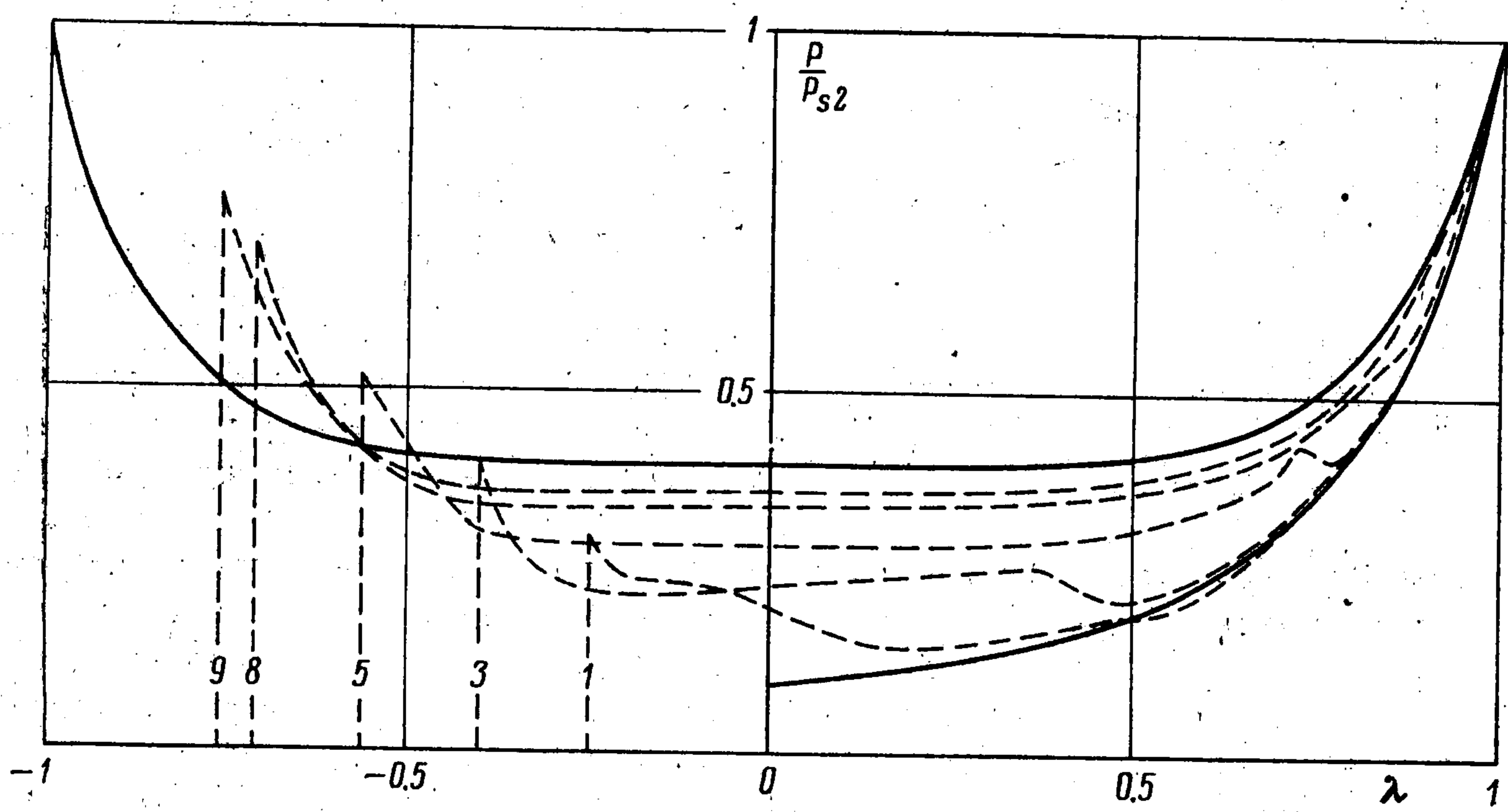
Во всех остальных точках пространства в начальный момент $p = v = 0$, $\rho = 1$. В расчете полагалось $\kappa = 7/5$. Начальные данные выбирались таким образом, чтобы во всех случаях полная энергия $\varepsilon = E_0 + K_0 = \text{const}$. Все зависимые и независимые переменные, входящие в уравнения и начальные данные, будем считать безразмерными величинами, полагая, что координата x отнесена к x_0 , скорость к v_0 , плотность к ρ_0 , давление к $\rho_0 v_0^2$, время к x_0 / v_0 . При таком обезразмеривании уравнения Эйлера остаются инвариантными.

Для решения уравнений Эйлера, описывающих рассматриваемое движение с разрывными начальными данными, использовался метод сквозного счета, предложенный в работе [5] и позволяющий путем введения искусственной вязкости вести счет во всей области движения, включая ударные волны.

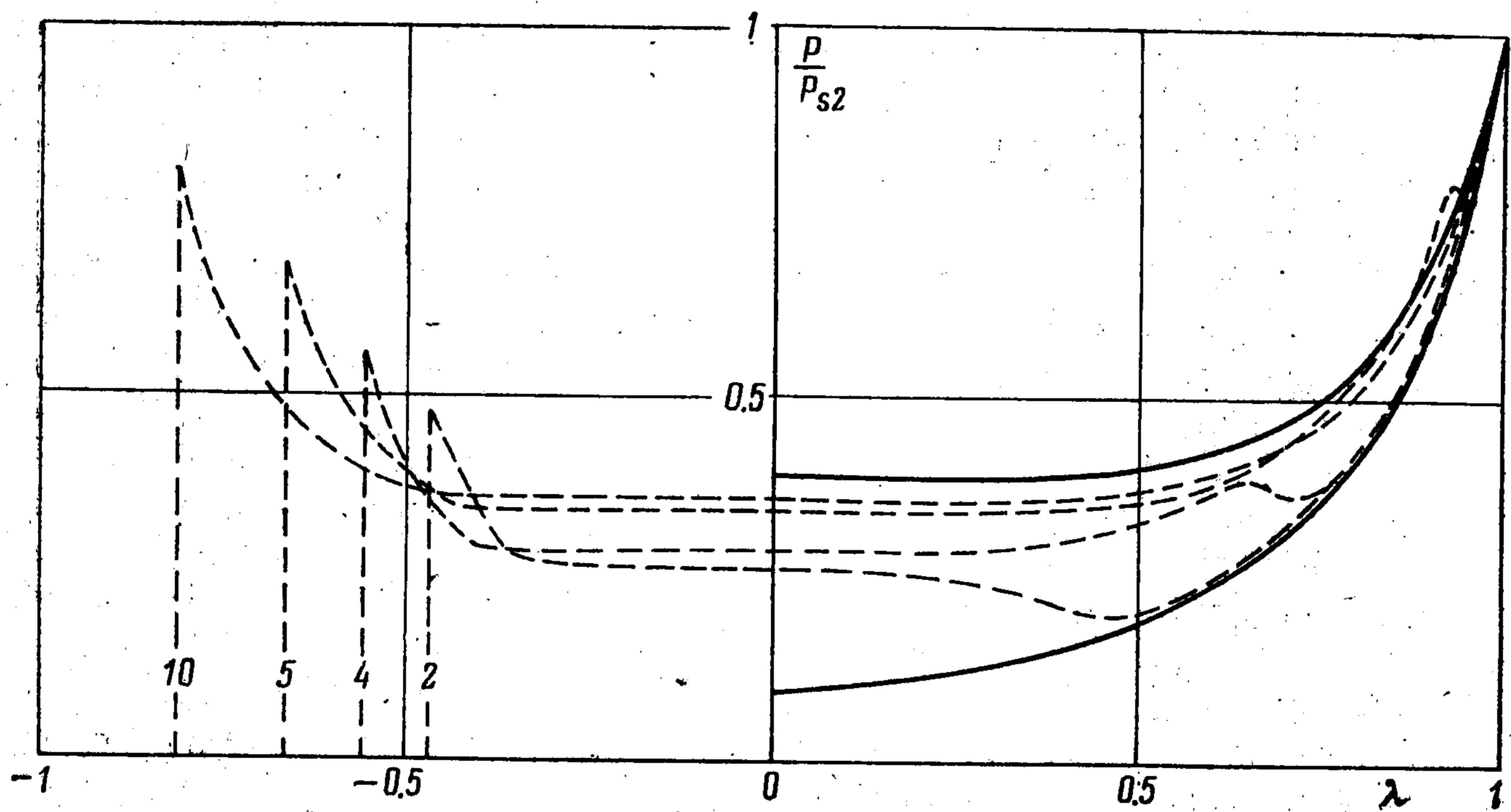
В случае 1° расчет показывает, что решение достаточно быстро выходит (при $t \sim \sim 40$) непосредственно на асимптотику, соответствующую задаче о сильном взрыве.



Фиг. 1



Фиг. 2



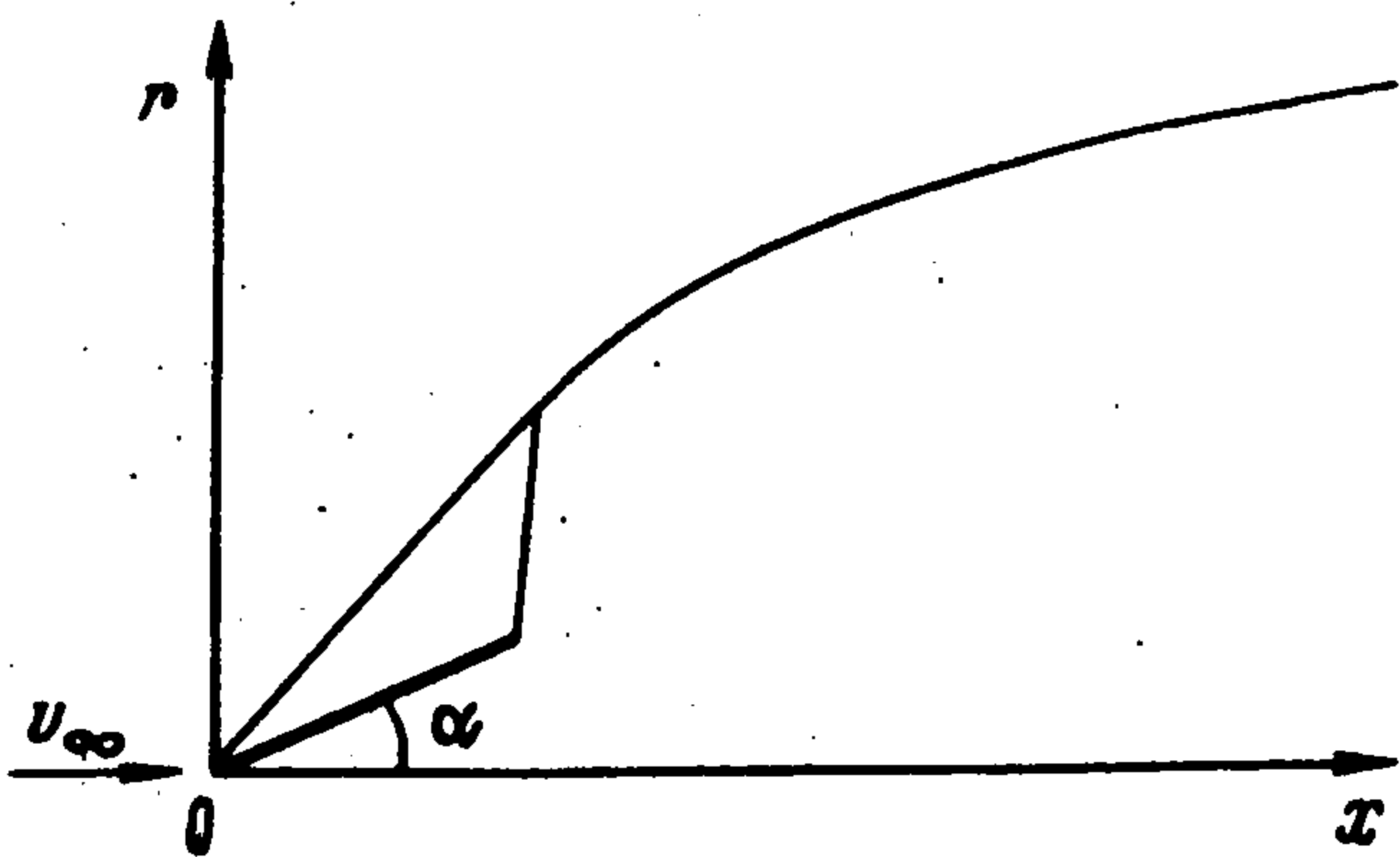
Фиг. 3

Более интересны случаи 2° — 4° , результаты расчетов для которых приведены на фиг. 1—3 соответственно. На графиках представлено распределение безразмерного давления p / p_{s2} по координате $\lambda = x / x_{s2}$, причем давление p_{s2} непосредственно за ударной волной, движущейся в направлении оси x , и ее координата x_{s2} определялись в процессе расчета. Пунктирные кривые, обозначенные номерами N от 1 до 12, соответствуют различным моментам времени t , а именно

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
t	3	5	7	10	28	41	95	150	203	210	263	456

Нижняя сплошная кривая соответствует автомодельному решению задачи о коротком ударе, верхняя сплошная кривая — автомодельному решению задачи о сильном взрыве.

Видно, что в случае 2° ($E_0 = 0$, $K_0 = \varepsilon$) решение имеет два асимптотических режима (фиг. 1). На некотором конечном и довольно большом интервале времени ($10 < t < 260$) в области переменной λ , примыкающей к правой ударной волне, реализуется течение, соответствующее автомодельному решению задачи о коротком ударе. Область λ , в которой осуществляется течение короткого удара, изменяется со временем, причем с увеличением t она уменьшается. При дальнейшем увеличении времени ($t > 260$) указанный промежуточный режим течения начинает перестраиваться и решение при $t \rightarrow \infty$ выходит на асимптотику, соответствующую задаче о сильном взрыве.



Фиг. 4

Как известно, автомодельное решение задачи о коротком ударе определено с точностью до постоянной A , которая определяет закон движения ударной волны $x_{s2} = (At)^{1/5}$. Эта постоянная содержит в себе некоторую информацию о начальных данных и может быть определена только из решения неавтомодельной задачи. Соответствующая постоянная, входящая в закон движения ударной волны при сильном взрыве, зависит только от энергии взрыва ε и начальной плотности ρ_0 и может быть вычислена в процессе решения автомодельной задачи.

Распределение давления на фиг. 2 соответствует случаю 3° ($K_0 = E_0$). Видно, что здесь выход на асимптотику, соответствующую сильному взрыву, происходит быстрее, чем в предыдущем случае, но тем не менее еще на достаточно большом интервале времени в окрестности правой ударной волны имеет место асимптотика короткого удара.

Несколько неожиданным является поведение решения в случае 4° , когда $K_0/E_0 = 1/3$ (фиг. 3). Здесь также существует режим течения, при котором правая ударная волна движется по закону автомодельного решения задачи о коротком ударе, хотя интервал времени, при котором имеет место указанный режим, сравнительно невелик ($5 < t < 20$).

Известно [6-9], что одномерные нестационарные течения можно использовать для приближенного решения задачи о гиперзвуковом обтекании крыльев бесконечного размаха. Рассмотрим в качестве примера поток у конечной пластины, установленной под некоторым углом атаки α (фиг. 4). Пусть значение α выбрано не малым. Строго говоря, этому потоку в рамках нестационарной аналогии соответствует движение газа, вытесняемого поршнем, который некоторое время имеет постоянную скорость, а затем убирается. Однако для рассуждений качественного порядка можно применить построенное выше решение задачи Коши. Ясно, что в этом случае отношение K_0 / E_0 следует выбирать порядка единицы.

Как было показано выше, даже при $K_0 / E_0 = 1/3$ существует конечный интервал времени, когда закон распространения ударной волны определяется решением задачи о коротком ударе. Можно поэтому ожидать, что на некотором сравнительно большом

расстоянии x от носика пластинки форма ударной волны в стационарном гиперзвуковом потоке также будет определяться решением указанной задачи, в то время как распределение давления по обтекаемой поверхности довольно быстро станет близко к тому, которое реализуется при сильном взрыве. Разумеется, при удалении на бесконечность вниз по потоку форма ударной волны и поле скоростей в ее окрестности также будут мало отличаться от предсказываемых теорией взрыва. Влияние подъемной силы пластинки легко учесть асимптотически при $x \rightarrow \infty$, введя понятие «направленного» взрыва, при котором газу передается не только энергия, но и импульс [10].

Было бы весьма интересно получить экспериментальное подтверждение выдвинутой выше гипотезы относительно формы ударной волны при гиперзвуковом обтекании тел под углом атаки.

В заключение автор выражает признательность О. С. Рыжову за постоянное внимание к работе.

Поступила 3 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
2. Власов И. О., Державина А. И., Рыжов О. С. О взрыве на границе раздела двух сред. Ж. выч. матем. и матем. физ., 1974, т. 14, № 6.
3. Зельдович Я. Б. Движение газа под действием кратковременного давления (удара). Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 1.
4. Адамский В. Б. Интегрирование системы автомодельных уравнений в задаче о кратковременном ударе по холодному газу. Акуст. ж., 1956, т. 2, вып. 1.
5. Куропатенко В. Ф. О разностных методах для уравнений гидродинамики. Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1966, т. 74.
6. Tsien N. S. Similarity laws of hypersonic flows. J. Math. Phys., 1946, vol. 25, No. 3.
7. Hayes W. D. On hypersonic similitude. Quart. Appl. Math., 1947, vol. 5, No. 1.
8. Ильюшин А. А. Закон плоских сечений в аэродинамике сверхзвуковых скоростей. ПММ, 1956, т. 20, вып. 6.
9. Бам-Зеликович Г. М., Бунимович А. И., Михайлова М. П. Движение тонких тел с большими сверхзвуковыми скоростями. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1960, № 1.
10. Рыжов О. С., Терентьев Е. Д. О гиперзвуковом обтекании несущего профиля. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.