УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

М. С. Герштейн

(Москва)

Предлагается вариант геометрически нелинейной теории многослойных упругих оболочек, подвергнутых неконсервативной нагрузке. Учитываются деформации поперечного сдвига в слоях и деформации в направлении нормали к срединной поверхности.

Описание нестационарных динамических процессов, связанных с выпучиванием оболочек, может быть выполнено, как правило, на основе геометрически нелинейной теории [1]. Поведение многослойных пластинок и оболочек при больших прогибах рассматривалось в работах [2–5]. В работе [5] для вывода геометрически нелинейных уравнений использована вариационная формулировка, справедливая при действии на оболочку консервативных нагрузок.

В предлагаемой работе вариационный принцип формулируется в виде, применимом и в случае отсутствия потенциала внешних сил. Одно из преимуществ развиваемого здесь подхода по сравнению с результатами работы [5] заключается в дополнительной возможности описания местного динамического выпучивания оболочки по формам, связанным с изменением ее толщины.

1. Вариационный принцип для трехмерного тела. Вариационный принцип теории упругости для трехмерного тела при больших перемещениях записывается в следующем виде:

$$\delta J_0 = \delta \int_{t_0}^{t_1} \Bigl(\int_V \Bigl\{ -\frac{1}{2} E^{ikjl} \varepsilon_{ik} \varepsilon_{jl} + \sigma^{ik} \Bigl[\varepsilon_{ik} - \frac{1}{2} (\eta_{ik} + \eta_{ki} + \eta_{i}^{\cdot j} \eta_{kj}) \Bigr] + \theta^{ik} (\eta_{ik} - \overline{\nabla}_i u_k) + \frac{1}{2} \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \frac{\partial u^i}{\partial t} \Bigr\} dV + \int_{S_1} P^i u_i dS + \int_{S_2} (u_k - U_k) \theta^{ik} n_i dS \Bigr) = 0, \quad i, k = 1, 2, 3 \tag{1.1}$$

$$\delta P^i = 0 \tag{1.2}$$

Здесь E^{ikjl} — тензор упругости, ρ — плотность материала, u_i — компоненты вектора перемещений в метрике g_{ik} недеформированного тела, V — объем недеформированного тела, S_1 — часть поверхности тела, на которой задана нагрузка, а S_2 — часть поверхности с заданными перемещениями, t — время. Под P^i понимается вектор неконсервативного внешнего усилия. Смысл остальных величин, входящих в (1.1), выясняется в результате варьирования. Дополнительное условие (1.2) позволяет находить значение функционала (1.1) при заданных допустимых функциях и сравнивать его значения, соответствующие различным допустимым функциям. Записанный в таком виде вариационный принцип динамики можно использовать при выводе основных соотношений для трехмерного тела при неконсервативной нагрузке [6].

При независимом варьировании u_i, ε_{ik}, η_{ik}, θ^{ik}, σ^{ik} из (1.1) и (1.2) можно получить

$$\int_V (E^{ikjl} \varepsilon_{jl} - \delta_{ik}) \delta\varepsilon_{ik} dV - \int_V \bigl[\theta^{ik} - \sigma^{ij} (\delta_j^k + \eta_j^{\cdot k}) \bigr] \delta\eta_{ik} dV - \int_V \Bigl(\overline{\nabla}_k \theta^{ik} - \rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} \Bigr) \delta u_i dV - \tag{1.3}$$

$$
-\int\limits_V \left[\varepsilon_{ik}-\frac{1}{2}(\eta_{ik}+\eta_{ki}+\eta_i^{\cdot j}\eta_{kj})\right]\delta\sigma_{ik}dV-\int\limits_V(\eta_{ik}-\overline{\nabla}_i u_k)\,\delta\theta^{ik}dV-
$$

$$
-\int\limits_{S_1}(\theta^{ik}n_i-P^k)\,\delta u_k dS-\int\limits_{S_2}(u_k-U_k)\,n_i\delta\theta^{ik}dS=0
$$

Отсюда следуют уравнения движения, кинематические соотношения, соотношения упругости, естественные граничные условия для напряжений и перемещений трехмерного упругого тела при больших перемещениях.

2. Вариационный принцип для слоя. Рассматривается пологая оболочка из чередующихся упругих изотропных слоев армирующего материала и связующего (матрицы). Все армирующие слои одинаковы, толщина каждого слоя h_A, плотность материала ρ_A. Все слои связующего также одинаковы, их толщины обозначены через h_M, а плотность — через ρ_M. Толщина оболочки «в целом» равна h. Если число $n = h/(h_A + h_M)$, соответствующее количеству пар слоев, — целое, строение оболочки несимметрично по толщине; в случае конструкции, симметричной относительно срединной поверхности, число n — не целое и зависит от соотношения толщин слоев.

От функционала для трехмерного тела можно перейти к функционалу теории оболочек для слоя с помощью следующих гипотез [7] (в качестве примера без ограничения общности рассматривается армирующий слой):

метрика по толщине слоя (и по толщине всей оболочки) остается неизменной; $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1,2$) — тензоры первой и второй квадратичных форм срединной поверхности оболочки, с которой связаны криволинейные координаты $x_A{}^1$, $x_A{}^2$, $x_A{}^3$ ($x_A{}^3$ направлена по нормали);

варьируемые величины изменяются по толщине слоя в соответствии с зависимостями

$$
u_{\alpha A}=v_{\alpha A}+x_A{}^3\psi_{\alpha A},\quad u_{3A}=w_A+x_A{}^3\psi_{3A} \tag{2.1}
$$

$$
\sigma_A^{\alpha\beta}=\frac{1}{h_A}T_A^{\alpha\beta}+\frac{12x_A{}^3}{h_A{}^2}M_A^{\alpha\beta},\quad \sigma_A^{\alpha3}=\frac{1}{h_A}Q_A^{\alpha},\quad \sigma_A^{33}=\frac{1}{h_A}R_A
$$

$$
\theta_A^{\alpha\beta}=\frac{1}{h_A}t_A^{\alpha\beta}+\frac{12x_A{}^3}{h_A{}^3}s_A^{\alpha\beta},\quad \theta_A^{\alpha3}=\frac{1}{h_A}\left(c_A^{\alpha}+\frac{12x_A{}^3}{h_A{}^3}d_A^{\alpha}\right)
$$

$$
\theta_A^{3\alpha}=\frac{1}{h_A}j_A^{\alpha},\quad \theta_A^{33}=\frac{1}{h_A}j_A^{3}
$$

$$
\varepsilon_{\alpha\beta A}=\gamma_{\alpha\beta A}+x_A{}^3k_{\alpha\beta A},\quad \varepsilon_{\alpha3A}(x_A{}^1,x_A{}^2,x_A{}^3,t)=\gamma_{\alpha3A}(x_A{}^1,x_A{}^2,t)
$$

$$
\varepsilon_{33A}=\gamma_{33A},\ \eta_{\alpha\beta A}=e_{\alpha\beta A}+x_A{}^3\zeta_{\alpha\beta A},\ \eta_{3\alpha A}=\iota_{\alpha A},\quad \eta_{\alpha3A}=\omega_{\alpha A}+x_A{}^3\mu_{\alpha A}
$$

$$
\eta_{33A}=\iota_{3A}
$$

Из соотношений с третьего по девятое в (2.1) вытекает, что

$$
\{T_A^{\alpha\beta},M_A^{\alpha\beta},Q_A{}^{\alpha},R_A\}=\int\{\sigma_A^{\alpha\beta},x_A{}^3\sigma_A^{\alpha\beta},\sigma_A^{\alpha3},\sigma_A^{33}\}\,dx_A{}^3
$$

$$
\int\{\sigma_A^{\alpha3},\sigma_A^{33}\}\,x_A{}^3dx_A{}^3=0
$$

$$
\{t_A^{\alpha\beta},s_A^{\alpha\beta},c_A^{\alpha\beta},j_A^{\alpha\beta},y_A{}^{\alpha}\}=\int\{\theta_A^{\alpha\beta},x_A{}^3\theta_A^{\alpha\beta},\theta_A^{\alpha3},\theta_A^{3\alpha},\theta_A^{33}\}\,dx_A{}^3
$$

Здесь интегралы берутся в пределах от $-h_A/2$ до $h_A/2$.

Для нагрузок, действующих на наружных поверхностях и по контуру слоя, вводятся обозначения

$$
\{q_{\alpha A},q_A,p_{\alpha A},p_{3A}\}=\{P_{\alpha A},P_{3A},x_A{}^3P_{\alpha A},x_A{}^3P_{3A}\}\Big|_{x_A{}^3=-h_A/2}^{x_A{}^3=h_A/2}
$$

$$
\{N_{\alpha A},N_A,K_{\alpha A}\}=\int\limits_{-h/2}^{h/2}\{P_{\alpha A},P_{3A},x_A{}^3P_{\alpha A}\}\,dx_A{}^3
$$

Подстановка приведенных соотношений в (1.1) и (1.2) и интегрирование по толщине слоя позволяет получить выражение вариационного принципа для слоя — оболочки $\delta J_{1A} = 0$. Из этого вариационного принципа следуют все уравнения и соотношения динамики упругого изотропного армирующего слоя — оболочки, аналогичные уравнениям работ [7, 8]. Соответствующие зависимости выводятся и для слоя матрицы.

3. Вариационный принцип для многослойной оболочки. Со срединной поверхностью многослойной оболочки связана система координат x^1, x^2, z. Предполагается, что компоненты вектора перемещений следующим образом распределены по толщине оболочки:

(3.1) $$u_\alpha = v_\alpha + z\varphi_\alpha, \quad u_3 = w + z\varphi_3$$

На координатных поверхностях отдельных слоев перемещения u_α и u_3 совпадают соответственно с $v_{\alpha A}$, $v_{\alpha M}$ и w_A, w_M.

Условие равенства перемещений на поверхностях контакта соседних слоев по аналогии с [9] приводит к соотношениям

(3.2) $$\varphi_\alpha = s\psi_{\alpha A} + (1-s)\psi_{\alpha M}, \quad \varphi_3 = s\psi_{3A} + (1-s)\psi_{3M}$$

Здесь $s = h_A/(h_A + h_M)$.

При описании эквивалентной модели оболочки из квазиодиародного материала величины $\psi_{\alpha M}$ и ψ_{3M} из рассмотрения исключаются с помощью соотношений (3.2); индекс A при $\psi_{\alpha A}$, ψ_{3A} и других величинах, характеризующих армирующие слои, опускается.

Вводятся следующие гипотезы о распределении деформаций по толщине эквивалентной сплошной оболочки:

(3.3) $$\begin{aligned}
&\gamma_{\alpha\beta A} = \gamma_{\alpha\beta M} = \gamma_{\alpha\beta} + z\varkappa_{\alpha\beta}\\
&sk_{\alpha\beta A} + (1-s)k_{\alpha\beta M} = \varkappa_{\alpha\beta}, \quad \vartheta_{\alpha\beta} = \varkappa_{\alpha\beta} - k_{\alpha\beta A}\\
&s\gamma_{\alpha 3A} + (1-s)\gamma_{\alpha 3M} = f(z)\beta_\alpha, \quad (1-s)(\gamma_{\alpha 3M} - \gamma_{\alpha 3A}) = f(z)\xi_\alpha\\
&s\gamma_{33A} + (1-s)\gamma_{33M} = f^*(z)\beta_3, \quad (1-s)(\gamma_{33M} - \gamma_{33A}) = f^*(z)\xi_3\\
&e_{\alpha\beta A} = e_{\alpha\beta M} = e_{\alpha\beta} + z\nu_{\alpha\beta}, \quad s\zeta_{\alpha\beta A} + (1-s)\zeta_{\alpha\beta M} = \nu_{\alpha\beta}\\
&\omega_{\alpha A} = \omega_{\alpha M} = \omega_\alpha + z\pi_\alpha, \quad s\mu_{\alpha A} + (1-s)\mu_{\alpha M} = \pi_\alpha\\
&sv_{\alpha A} + (1-s)v_{\alpha M} = \mathfrak{v}_\alpha, \quad sv_{3A} + (1-s)v_{3M} = \mathfrak{v}_3
\end{aligned}$$

Распределение внутренних усилий и моментов предполагается по следующим законам:

(3.4) $$\begin{aligned}
&n(T_A^{\alpha\beta} + T_M^{\alpha\beta}) = T^{\alpha\beta} + \frac{12z}{h^2}M^{\alpha\beta}\\
&n(Q_A{}^\alpha + Q_M{}^\alpha) = f(z)Q^\alpha, \quad n\left(\frac{s}{1-s}Q_M{}^\alpha - Q_A{}^\beta\right) = f(z)\tau^\alpha\\
&n(M_A^{\alpha\beta} + M_M^{\alpha\beta}) = m^{\alpha\beta}, \quad \frac{n}{1-s}M_M^{\alpha\beta} = \chi^{\alpha\beta}\\
&n(R_A + R_M) = f^*(z)R, \quad n\left(\frac{s}{1-s}R_M - R_A\right) = f^*(z)r\\
&n(t_A^{\alpha\beta} + t_M^{\alpha\beta}) = t^{\alpha\beta} + \frac{12z}{h^2}y^{\alpha\beta}, \quad n(s_A^{\alpha\beta} + s_M^{\alpha\beta}) =\\
&= s^{\alpha\beta}, \quad \frac{n}{1-s}s_M^{\alpha\beta} = z^{\alpha\beta}\\
&n(c_A{}^\alpha + c_M{}^\alpha) = f(z)(c^\alpha + z\text{Э}^\alpha)\\
&n(d_A{}^\alpha + d_M{}^\alpha) = f(z)d^\alpha, \quad \frac{n}{1-s}d_M{}^\beta = f(z)\alpha^\beta\\
&n(j_A^\alpha + j_M{}^\alpha) = f(z)j^\alpha, \quad \frac{n}{1-s}j_M{}^\alpha = f(z)(\rho^\alpha + j^\alpha)\\
&n(j_A{}^3 + j_M{}^3) = f^*(z)j^3, \quad \frac{n}{1-s}j_M{}^3 = f^*(z)(\rho^3 + j^3)
\end{aligned}$$

Таким образом, распределение продольных и изгибных деформаций и микродеформаций, а также соответствующих усилий и моментов принято линейным по толщине. Распределение по толщине поперечных деформаций и усилий описывается с помощью четных функций $f(z)$ и $f^*(z)$, удовлетворяющих условиям (здесь и всюду ниже, если не оговорено иное, интегралы берутся по толщине оболочки в целом)

$$\int f(z)\{1, z^2, f\}\,dz = h\left\{1, k_0, \frac{1}{k^2}\right\}, \quad \int f^*(z)\{1, f^*\}\,dz = h\left\{1, \frac{1}{k^{*2}}\right\} \tag{3.5}$$

Из соотношений (3.4) и (3.5) следует

$$\{T^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta}, Q^\alpha\} = \frac{1}{h_A + h_M}\int \{T_A^{\alpha\beta} + T_M^{\alpha\beta},\ z\,(T_A^{\alpha\beta} + T_M^{\alpha\beta}),\ Q_A{}^\alpha + Q_M{}^\alpha\}\,dz \tag{3.6}$$

$$\{m^{\alpha\beta}, \chi^{\alpha\beta}, \tau^{\alpha\beta}\} = \frac{1}{h_A + h_M}\int\left\{M_M^{\alpha\beta} + M_M^{\alpha\beta},\ \frac{1}{1-s}M_M^{\alpha\beta},\right.$$
$$\left.\left(\frac{s}{1-s}Q_M{}^\alpha - Q_A{}^\alpha\right)\right\}dz$$

$$\{t^{\alpha\beta}, y^{\alpha\beta}, s^{\alpha\beta}, c^\alpha\} = \frac{1}{h_A + h_M}\int\{t_A^{\alpha\beta} + t_M^{\alpha\beta},\quad z\,(t_A^{\alpha\beta} + t_M^{\alpha\beta}),$$
$$s_A^{\alpha\beta} + s_M^{\alpha\beta}, c_A^\alpha + c_M^\alpha\}\,dz$$

$$\{z^{\alpha\beta}, Э^\alpha, d^\alpha, \alpha^\beta, j^\alpha, \rho^\alpha, j^3, \rho^3\} = \frac{1}{h_A + h_M}\int\left\{\frac{1}{1-s}s_M^{\alpha\beta},\right.$$
$$z\,(c_A{}^\alpha + c_M{}^\alpha),\ d_A{}^\alpha + d_M{}^\alpha,\quad \frac{1}{1-s}d_M{}^\beta,\ j_A{}^\alpha + j_M{}^\alpha,$$
$$\left.\frac{1}{1-s}j_M{}^\alpha, j_A{}^3 + j_M{}^3,\quad \frac{1}{1-s}j_A{}^3\right\}dz$$

Вводятся также следующие обозначения:

$$\rho = s\rho_A + (1-s)\rho_M,\quad I_A = \frac{1}{12}h_A{}^2 s\rho_A,\quad I_M = \frac{1}{12}h_M^2(1-s)\rho_M$$

$$\{q_\alpha, q, p_\alpha\} = \{P_\alpha, P_3, zP_\alpha\}\Big|_{z=-h/2}^{z=h/2}$$

$$N^\alpha = \frac{1}{h_A + h_M}\int (N_A{}^\alpha + N_M{}^\alpha)\,dz,\quad N = \frac{1}{h_A + h_M}\int (N_A + N_M)\,dz$$

$$K^\alpha = \frac{1}{h_A + h_M}\int\left[z\,(N_A{}^\alpha + N_M{}^\alpha) + \frac{1}{1-s}K_M{}^\alpha\right]dz$$

$$L^\alpha = \frac{1}{h_A + h_M}\int\left(K_A{}^\alpha + \frac{s}{1-s}K_M{}^\alpha\right)dz$$

Операция энергетического сглаживания [10] в применении к вариационным соотношениям с дополнительными условиями для армирующего слоя и слоя матрицы приводит к формулировке вариационного принципа, аналогичного (1.1), с дополнительными условиями типа (1.2) для многослойной оболочки, рассматриваемой как сплошная оболочка с внутренними моментами.

Вариационный принцип позволяет вывести основные соотношения для упругой многослойной оболочки, находящейся под действием неконсервативных нагрузок. Эти соотношения выписаны ниже.

Уравнения движения

$$\nabla_\alpha t^{\alpha\beta} - b_\alpha{}^\beta c^\alpha - \rho h\frac{\partial^2 v^\beta}{\partial t^2} + q^\beta = 0,\quad \nabla_\alpha c^\alpha + b_{\alpha\beta}t^{\alpha\beta} - \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + q = 0$$

$$\nabla_\alpha\,(y^{\alpha\beta} + z^{\alpha\beta}) - b_\alpha{}^\beta\,(k_0 э^\alpha + \alpha^\alpha) - (\rho^\beta + j^\beta) -$$
$$- A_1\frac{\partial^2\varphi^\beta}{\partial t^2} + A_2\frac{\partial^2\psi^\beta}{\partial t^2} + p^\alpha = 0$$

$$\nabla_\alpha (s^{\alpha\beta} - z^{\alpha\beta}) - b_\alpha{}^\beta (d^\alpha - \alpha^\alpha) + \rho^\beta + A_2 \frac{\partial^2 \varphi^\beta}{\partial t^2} - A_3 \frac{\partial^2 \psi^\beta}{\partial t^2} = 0$$
$$b_{\alpha\beta} (y^{\alpha\beta} + z^{\alpha\beta}) + (j^3 + \rho^3) + p^3 = 0$$
$$b_{\alpha\beta} (s^{\alpha\beta} - z^{\alpha\beta}) + \rho^3 = 0$$

Здесь

$$A_1 = \frac{1}{12} \rho h^3 + h \frac{I_M}{(1-s)^2}, \quad A_2 = h I_M \frac{s}{(1-s)^2}$$
$$A_3 = h \left[I_A + I_M \frac{s^2}{(1-s)^2} \right]$$

Кинематические соотношения

$$e_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha v_\beta - b_{\alpha\beta} w, \quad \nu_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \varphi_\beta - b_{\alpha\beta} \varphi_3$$
$$\omega_\alpha = \nabla_\alpha w + b_{\alpha\beta} v_\beta, \quad \pi_\alpha = \nabla_\alpha \varphi_3 + b_{\alpha\beta} \varphi^\beta$$
$$\zeta_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \psi_\beta - b_{\alpha\beta} \psi_3, \quad \mu_\alpha = \nabla_\alpha \psi_3 + b_{\alpha\beta} \psi^\beta$$
$$\upsilon_\alpha = \varphi_\alpha, \quad \iota_\alpha = \psi_\alpha, \quad \upsilon_3 = \varphi_3, \quad \iota_3 = \psi_3$$
$$\varkappa_{\alpha\beta} = {}^1/_2 (\nu_{\alpha\beta} + \nu_{\beta\alpha} + e_{\alpha\cdot}{}^{\cdot\gamma} \nu_{\beta\gamma} + e_{\beta\cdot}{}^{\cdot\gamma} \nu_{\alpha\gamma} + \omega_\alpha \pi_\beta + \omega_\beta \pi_\alpha)$$
$$k_{\alpha\beta} = {}^1/_2 (\zeta_{\alpha\beta} + \zeta_{\beta\alpha} + e_{\alpha\cdot}{}^{\cdot\gamma} \zeta_{\beta\gamma} + e_{\cdot\beta}{}^{\cdot\gamma} \zeta_{\alpha\gamma} + \omega_\alpha \mu_\beta + \omega_\beta \mu_\alpha)$$
$$\vartheta_{\alpha\beta} = \varkappa_{\alpha\beta} - k_{\alpha\beta}$$
$$\beta_\alpha = {}^1/_2 k^2 (\omega_\alpha + \upsilon_\alpha + e_{\alpha\beta} \upsilon^\beta), \quad \xi_\alpha = {}^1/_2 k^2 [\upsilon_\alpha - \iota_\alpha + e_{\alpha\beta} (\upsilon^\beta - \iota^\beta)]$$
$$\beta_3 = k^{*2} \frac{1}{2} \left[2\upsilon_3 + \upsilon^\alpha \upsilon_\alpha + \frac{1}{1-s} (\upsilon^\alpha - \iota^\alpha)(\upsilon_\alpha - \iota_\alpha) \right]$$
$$\xi_3 = k^{*2} \frac{1}{2} \left[2\upsilon_3 - 2\iota_3 + \upsilon^\alpha \upsilon_\alpha - \iota^\alpha \iota_\alpha + \frac{s}{1-s} (\upsilon^\alpha - \iota^\alpha)(\upsilon_\alpha - \iota_\alpha) \right]$$

Соотношения упругости

$$T^{\alpha\beta} = h [s E_A^{\alpha\beta\gamma\delta} + (1-s) E_M^{\alpha\beta\gamma\delta}] \gamma_{\gamma\delta} +$$
$$+ h [s\lambda_A + (1-s) \lambda_M] a^{\alpha\beta} \beta_3 + hs (\lambda_M - \lambda_A) a^{\alpha\beta} \xi_3$$
$$M^{\alpha\beta} = \frac{h^3}{12} [s E_A^{\alpha\beta\gamma\delta} + (1-s) E_M^{\alpha\beta\gamma\delta}] \varkappa_{\gamma\delta}$$
$$m^{\alpha\beta} = h \left[s \frac{h_A^2}{12} E_A^{\alpha\beta\gamma\delta} + (1-s) \frac{h_M^2}{12} E_M^{\alpha\beta\gamma\delta} \right] k_{\gamma\delta} + h \frac{h_M^2}{12} E_M^{\alpha\beta\gamma\delta} \vartheta_{\gamma\delta}$$
$$\chi^{\alpha\beta} = h \frac{h_M^2}{12} E_M^{\alpha\beta\gamma\delta} k_{\gamma\delta} + h \frac{h_M^2}{12(1-s)} E_M^{\alpha\beta\gamma\delta} \vartheta_{\gamma\delta}$$
$$Q^\alpha = 2h [s\mu_A + (1-s) \mu_M] \beta^\alpha + 2hs [\mu_M - \mu_A] \xi^\alpha$$
$$\tau^\alpha = 2hs (\mu_M - \mu_A) \beta^\alpha + 2hs \left(\mu_A + \frac{s}{1-s} \mu_M \right) \xi^\alpha$$
$$R = h [s (\lambda_A + 2\mu_A) + (1-s)(\lambda_M + 2\mu_M)] \beta_3 + hs (\lambda_M + 2\mu_M -$$
$$- \lambda_A - 2\mu_A) \xi_3 + h [s\lambda_A + (1-s) \lambda_M] a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}$$
$$r = hs \left[\lambda_A + 2\mu_A + \frac{s}{1-s} (\lambda_M + 2\mu_M) \right] \xi_3 + hs (\lambda_M + 2\mu_M -$$
$$- \lambda_A - 2\mu_A) \beta_3 + hs (\lambda_M - \lambda_A) a^{\alpha\beta} \gamma_{\alpha\beta}$$
$$t^{\alpha\beta} = T^{\alpha\gamma} (\delta_\gamma{}^\beta + e_{\gamma\cdot}{}^{\cdot\beta}) + (M^{\alpha\gamma} + \chi^{\alpha\gamma}) \upsilon_{\gamma\cdot}{}^{\cdot\beta} + (m^{\alpha\gamma} - \chi^{\alpha\gamma}) \zeta_{\gamma\cdot}{}^{\cdot\beta} + (Q^\alpha + \tau^\alpha) \nu^\beta$$
$$y^{\alpha\beta} + z^{\alpha\beta} = (M^{\alpha\gamma} + \chi^{\alpha\gamma}) (\delta_\gamma{}^\beta + e_{\gamma\cdot}{}^{\cdot\beta})$$
$$s^{\alpha\beta} - z^{\alpha\beta} = (m^{\alpha\gamma} - \chi^{\alpha\gamma}) (\delta_\gamma{}^\beta + e_{\gamma\cdot}{}^{\cdot\beta})$$

$$c^{\alpha} = Q^{\alpha} + (M^{\alpha\beta} + \chi^{\alpha\beta})\,\pi_{\beta} + (m^{\alpha\beta} - \chi^{\alpha\beta})\,\mu_{\beta} + T^{\alpha\beta}\,\omega_{\beta}$$

$$k_0 э^{\alpha} + \alpha^{\alpha} = (M^{\alpha\beta} - \chi^{\alpha\beta})\,\omega_{\beta}, \quad d^{\alpha} - \alpha^{\alpha} = (m^{\alpha\beta} - \chi^{\alpha\beta})\,\omega_{\beta}$$

$$j^{\alpha} + \rho^{\alpha} = (Q^{\beta} + \tau^{\beta})\,({\delta_{\beta}}^{\alpha} + {e_{.\beta}}^{\alpha\cdot}) + (R + r)\left[v^{\alpha} + \frac{s}{1-s}\,(v^{\alpha} - \iota^{\alpha})\right]$$

$$\rho^{\alpha} = \tau^{\alpha}\,({\delta_{\beta}}^{\alpha} + {e_{.\beta}}^{\alpha\cdot}) + r\left[\iota^{\alpha} + \frac{s}{1-s}\,(v^{\alpha} - \iota^{\alpha})\right], \quad j^3 = R, \quad \rho^3 = r$$

Здесь использованы соотношения

$$E_{A,M}^{\alpha\beta\gamma\delta} = \lambda_{A,M} a^{\alpha\beta} a^{\gamma\delta} + 2\mu_{A,M} a^{\alpha\gamma} a^{\beta\delta}$$

Граничные условия:
на контуре C_1

$$t^{\alpha\beta} n_{\alpha} = N^{\alpha}, \quad c^{\alpha} n_{\alpha} = N, \quad y^{\alpha\beta} + z^{\alpha\beta} = K^{\alpha}, \quad s^{\alpha\beta} - z^{\alpha\beta} = L^{\alpha}$$

на контуре C_2

$$v_{\alpha} = V_{\alpha}, \quad w = W, \quad \varphi_{\alpha} = \Phi_{\alpha}, \quad \psi_{\alpha} = \Psi_{\alpha}$$

В ряде частных случаев полученные выше уравнения и соотношения приводятся к известным зависимостям [2–5,9,10].

Поступила 18 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. М., «Наука», 1972.
2. *Григолюк Э. И.*, *Чулков П. П.* Нелинейные уравнения пологих многослойных оболочек регулярного строения. Инж. ж. МТТ, 1967, № 1.
3. *Прусаков А. П.*, *Растеряев Ю. К.* Изгиб, устойчивость и колебания многослойных пластин несимметричного строения. Тр. VII Всес. конференции по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1970.
4. *Новичков Ю. Н.* Нелинейная теория и устойчивость толстых многослойных оболочек. ПММ, 1973, т. 37, вып. 2.
5. *Герштейн М. С.* Геометрически нелинейные уравнения движения упругой многослойной оболочки. Механика полимеров, 1973, № 5.
6. *Levinson M.* Application of the Galerkin and Ritz methods to nonconservative problems of elastic stability. Z. angew. Math. und Phys., 1966, Bd 17.
7. *Айнола Л. Я.* Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек. Изв. АН ЭстССР, Сер. физ.-матем. и техн. наук, 1965, т. 14, № 3.
8. *Айнола Л. Я.* Вариационные методы для нелинейных уравнений движения оболочек. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
9. *Achenbach J. D.*, *Herrmann G.* Effective stiffness theory for a laminated composite. In: Proc. of 10th Midwest. mech. conf. Boulder, Colo. 1968.
10. *Болотин В. В.* К теории слоистых плит. Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение, 1963, № 3.

УДК 534.222.2

ОБ АСИМПТОТИКЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ИМПУЛЬСА

А. И. Державина

(Москва)

Рассматривается движение газа, первоначально заполняющего все пространство, под действием мгновенного выделения в тонком слое начальной внутренней энергии E_0 и импульса I_0. Численно исследовано асимптотическое поведение решения при различных соотношениях между E_0 и I_0.

При решении нестационарных задач газовой динамики очень часто интерес представляет исследование асимптотических свойств движения, которые устанавливаются