Используя (18), (16) и (7), получаем

(19) $\|y(m)\| < \varepsilon/2^n$ при $\bar{m}_0 \leqslant m \leqslant \bar{m}_0 + T$

Далее, используя (18) при $m = \bar{m}_0 + T$ и (17), получим

(20) $\|y(\bar{m}_0 + T)\| < \delta/2^{n+1}$

Подставив в неравенства (19) и (20) значение $\bar{m}_0 = m_0 + nT$, получим неравенства (14) и (15).

Из неравенства (14) выводим

$$\|y(m)\| < 2\varepsilon \exp[-(m - m_0)\ln 2/(\alpha^{-1}\ln 4B + \tau)]$$

Это неравенство доказывает утверждение теоремы.

Наряду с системами (1) и (2) будем рассматривать систему

$$y_s(m+1) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{si}(m)\, y_i(m) + R_s[m, y_i(m)] \tag{21}$$

$$(\|R(m, y_i)\| < \gamma\|y\|, \quad i = 1, 2, \ldots)$$

в некоторой области $D: \|y(m)\| \leqslant H$, $m = 0, 1, \ldots$ ($H = \text{const}$).

Теорема 2. Пусть системы (21) и (2) связаны соотношением вида (5). Если нулевое решение системы (2) экспоненциально устойчиво, то при достаточно малых γ и M будет экспоненциально устойчиво и нулевое решение системы (21).

Доказательство теоремы 2 отличается от доказательства теоремы 1 только тем, что в неравенстве (11) вместо M будет стоять $M + \gamma$.

Автор благодарит Г. С. Юдаева за постановку задачи.

Поступила 31 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
2. *Юдаев Г. С.* Некоторые частные случаи устойчивости по первому приближению систем с запаздываниями. Изв. вузов, Сер. матем., 1973, № 2 (129).
3. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.

УДК 531.011

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Я. П. Романов

(Йошкар-Ола)

Доказывается эквивалентность уравнений движения неголономных систем с линейными относительно скоростей связями, полученных различными методами.

В настоящее время имеются различные формы уравнений движения неголономных систем. Естественно, был поставлен вопрос об их тождественности [1–3]. Этот вопрос рассматривался также в работах [4–8] и в диссертации М. И. Ефимова [1].

1. Автор работ [1–3] утверждает, что от того, в каком месте при преобразовании общего уравнения динамики принимаются во внимание уравнения неголономных связей, зависит окончательный вид уравнений движения системы, и в общем случае любых неголономных систем с линейными относительно скоростей связями не гаранти-

[1] Ефимов М. И. Об уравнениях Чаплыгина для неголономных систем. Канд. диссертация. Ин-т механики АН СССР, 1953.

рована идентичность составляемых различными методами уравнений. Вольтерра [9], Аппель [10], Мак-Миллан [11] немедленно вводят в рассмотрение неголономные связи в процессе вывода уравнений движения из общего уравнения динамики в декартовых координатах. Гамель [12], Чаплыгин [13], Воронец [14] принимают во внимание неголономные связи только после преобразования общего уравнения динамики к обобщенным координатам. По мнению автора работ [1–3], уравнения движения, полученные методами Вольтерра, Аппеля, Мак-Миллана, с одной стороны, и методами Воронца (Чаплыгина), Гамеля, с другой стороны, в общем случае не будут тождественными, т. е. не будут составлять эквивалентные системы уравнений.

Для опровержения этого утверждения достаточно показать, что уравнения движения, составленные каким-нибудь из методов первой группы (Вольтерра, Аппеля, Мак-Миллана), совпадают с уравнениями движения, составленными одним из методов второй группы (Воронца, Гамеля).

Докажем, что для любой неголономной системы со связями, линейными относительно скоростей, уравнения Аппеля будут совпадать с уравнениями Воронца.

Пусть неголономные связи, наложенные на систему, выражаются уравнениями

$$(1.1)\qquad q_i^{\bullet} = \sum_{k=1}^{l} b_{ik} q_k^{\bullet} + b_i \quad (i = l+1,\ l+2,\ \ldots,\ n)$$

Дифференцируя по времени уравнения связей, получим равенства

$$(1.2)\qquad q_i^{\bullet\bullet} = \sum_{k=1}^{l} b_{ik} q_k^{\bullet\bullet} + \cdots \quad (i = l+1,\ l+2, \ldots,\ n)$$

в которых не написаны члены, не содержащие обобщенных ускорений.

Уравнения Аппеля для этой системы имеют вид [8]

$$(1.3)\qquad \frac{\partial S^*}{\partial q_k^{\bullet\bullet}} = Q_k^* \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ l)$$

Здесь S^* — преобразованная с учетом неголономных связей энергия ускорений, Q_k^* — обобщенная сила, соответствующая независимому приращению δq_k.

Если S и T — не преобразованные с учетом связей энергия ускорений и кинетическая энергия системы, то [15]

$$(1.4)\qquad \frac{\partial S}{\partial q_\nu^{\bullet\bullet}} \equiv \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_\nu^{\bullet}} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} \quad (\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ l,\ \ldots,\ n)$$

Энергия ускорений S зависит от обобщенных ускорений $q_k^{\bullet\bullet}$, как явно входящих в нее, так и через $q_i^{\bullet\bullet}$ согласно (1.2). Поэтому [8]

$$(1.5)\qquad \frac{\partial S^*}{\partial q_k^{\bullet\bullet}} = \frac{\partial S}{\partial q_k^{\bullet\bullet}} + \sum_{i=l+1}^{\nu} \frac{\partial S}{\partial q_i^{\bullet\bullet}} b_{ik}$$

Обозначим через T^* преобразованную с учетом связей (1.1) кинетическую энергию системы. Тогда

$$(1.6)\qquad \frac{\partial T^*}{\partial q_k^{\bullet}} = \frac{\partial T}{\partial q_k^{\bullet}} + \sum_{i=l+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i^{\bullet}} b_{ik}$$

Продифференцировав по времени равенства (1.6), получим

$$(1.7)\qquad \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_k^{\bullet}} + \sum_{i=l+1}^{n} b_{ik}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_i^{\bullet}}\right) = \frac{d}{dt}\frac{\partial T^*}{\partial q_k^{\bullet}} - \sum_{i=l+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i^{\bullet}}\frac{db_{ik}}{dt}$$

Далее, преобразуя уравнения (1.3) с использованием равенств (1.4), (1.5) и (1.7) и исключая величины $\partial T / \partial q_k$, $\partial T / \partial q_i$ при помощи соотношений вида

$$\frac{\partial T^*}{\partial q_\nu} = \frac{\partial T}{\partial q_\nu} + \sum_{i=l+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} \left(\sum_{j=1}^{l} \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_\nu} q_j^{\cdot} + \frac{\partial b_i}{\partial q_\nu} \right) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, l, \ldots, n) \tag{1.8}$$

получим уравнения Воронца

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T^*}{\partial q_k^{\cdot}} - \frac{\partial T^*}{\partial q_k} - \sum_{i=l+1}^{n} b_{ik} \frac{\partial T^*}{\partial q_i} - \sum_{i=l+1}^{n} B_{ik} \frac{\partial T}{\partial q_i^{\cdot}} = Q_k^* \quad (k = 1, 2, \ldots, l)$$

$$B_{ik} \equiv \frac{db_{ik}}{dt} - \sum_{j=1}^{l} \left(\frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \sum_{i=l+1}^{n} \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_i} b_{ik} \right) q_j^{\cdot} - \frac{\partial b_i}{\partial q_k} - \sum_{i=l+1}^{n} \frac{\partial b_i}{\partial q_i} b_{ik} \tag{1.9}$$

справедливые для любой неголономной системы с линейными относительно скоростей связями, так как при их выводе не делалось никаких ограничений на коэффициенты в уравнениях связей и на кинетическую энергию системы.

При преобразовании уравнений Аппеля в уравнения Воронца не делалось никаких дополнительных физических предположений, а использовались только тождественные преобразования. Отсюда можно заключить, что уравнения Аппеля будут тождественны уравнениям Воронца. При этом следует иметь в виду, что из выражений $\partial T / \partial q_i^{\cdot}$ в уравнениях Воронца нужно исключить зависимые обобщенные скорости, используя уравнения связей (1.1).

В частном случае для систем Чаплыгина уравнения Аппеля будут тождественны уравнениям Чаплыгина.

В работе [3] приведен пример движущейся без действия активных сил неголономной системы, определяемой тремя геометрическими координатами q_1, q_2, q_3 с одной неголономной идеальной связью $q_1^{\cdot} = q_3 q_2^{\cdot}$. Составлены уравнения движения в форме Чаплыгина и в форме Аппеля (см. формулы (a_9) и (a_{14}) в [3]), и из сравнения полученных результатов делается неверный вывод, что между ними есть явные расхождения. В действительности никаких расхождений не существует. В самом деле, нужно из выражения $\partial T / \partial q_1^{\cdot} \equiv q_1^{\cdot}$ в уравнениях Чаплыгина (a_9) исключить зависимую обобщенную скорость $q_1^{\cdot}$, используя уравнение связи (a_1). Тогда уравнения движения, составленные в форме Аппеля и в форме Чаплыгина, совпадут.

Очевидно, можно доказать также эквивалентность уравнений движения неголономных систем, составленных методом Мак-Миллана или Вольтерра и методом Воронца или Гамеля.

2. Остановимся теперь на уравнениях Гамеля [12]. По мнению автора работы [3], методом Гамеля можно получить две совершенно разные системы уравнений движения в зависимости от того, когда учитываются неголономные связи: до дифференцирования выражения кинетической энергии по квазискоростям или после.

Но из самого процесса вывода уравнений Гамеля видно, что эти уравнения содержат производные кинетической энергии T по всем квазискоростям, поэтому при составлении T неголономные связи учитывать нельзя, они учитываются только после вычисления производных кинетической энергии по квазискоростям [8]. Отсюда выходит, что, пользуясь методом Гамеля, получим одну единственную систему уравнений движения. Эта система будет эквивалентна системе, полученной другими методами составления уравнений.

3. Укажем на ошибку, допущенную автором работы [4] при составлении уравнений движения гирорамы методом Вольтерра.

В работе [4] рассматривалось движение гироскопической рамы, на которую накладывалась линейная неголономная связь $\alpha^{\cdot} - \psi^{\cdot} \sin \vartheta = 0$, и методом Вольтерра выводилась система уравнений движения гирорамы (см. уравнения (20) в указанной работе). Автор работы [4] пользовался при этом противоречивой системой пяти уравнений с четырьмя неизвестными. Из полученной противоречивой системы он выделил систему четырех уравнений, считая последнюю совместной, и разрешил ее относительно билинейных ковариантов неголономных координат. Но это противоречит правилам высшей алгебры.

Получим правильные уравнения движения гирорамы в неголономных координатах Вольтерра методом, предложенным в работе [15].

Принимая $\alpha^{\cdot} = p_1$, $\beta^{\cdot} = p_2$, $\gamma^{\cdot} = p_3$, $\vartheta^{\cdot} = p_4$, $\psi^{\cdot} = p_1/\sin\vartheta$ и полагая

$$\delta d\alpha - d\delta\alpha = 0,\ \delta d\beta - d\delta\beta = 0,\ \delta d\gamma - d\delta\gamma = 0,\ \delta d\vartheta - d\delta\vartheta = 0 \tag{3.1}$$

получим

$$\delta\psi^{\cdot} - \frac{d}{dt}\delta\psi = \frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}(\vartheta^{\cdot}\delta\alpha - \alpha^{\cdot}\delta\vartheta) \tag{3.2}$$

Далее, преобразуя общее центральное уравнение [8]

$$\frac{d}{dt}\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s^{\cdot}}\delta q_s - \delta T + \sum_{s=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial q_s^{\cdot}}\left(\delta q_s^{\cdot} - \frac{d}{dt}\delta q_s\right) = \sum_{s=1}^{n} Q_s\delta q_s$$

с учетом обобщенных координат $q_1 = \alpha$, $q_2 = \beta$, $q_3 = \gamma$, $q_4 = \vartheta$, $q_5 = \psi$ и равенств (3.1) и (3.2), получим систему уравнений движения гирорамы. Эта система уравнений совпадает с уравнениями (22) в работе [4], полученными методом Чаплыгина. Уравнения же, полученные автором работы [4] методом Гамеля, как и следовало ожидать, тождественны уравнениям, полученным методом Чаплыгина. Таким образом, для рассмотренного примера между уравнениями движения, составленными различными методами, никакой разницы не существует. Следовательно, выводы автора работы [4] ошибочны.

Из сказанного следует, что уравнения движения неголономных систем, полученные различными методами, будут тождественными, т. е. их конечный вид не зависит от того, на каком этапе вывода уравнений движения учитываются связи. Пользование теми или иными методами составления дифференциальных уравнений движения — вопрос вычислительного удобства. Такая же точка зрения высказывалась и А. И. Лурье [8].

Поступила 4 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Добронравов В. В.* Аналитическая динамика в неголономных координатах. Уч. зап. МГУ, 1948, вып. 122, Механика, т. 2.
2. *Добронравов В. В.* О некоторых вопросах механики неголономных систем. ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.
3. *Добронравов В. В.* Об основных положениях механики неголономных систем Тр. МВТУ, 1956, т. 50.
4. *Князев Г. Н.* К вопросу о применимости динамических уравнений Вольтерра для неголономных систем. Тр. МВТУ, 1961, т. 104.
5. *Шаги-Султан И. З.* Метод кинематических характеристик в аналитической механике. Алма-Ата, «Наука», 1966.
6. *Фам Гуен.* К уравнениям движения неголономных механических систем в переменных Пуанкаре — Четаева. ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
7. *Фам Гуен.* Об одной форме уравнений движения механических систем. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.
8. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
9. *Volterra Y.* Sopra una classe di equationi dinamiche. Atti della Reale Accad. delle sci. di Torino, 1898, vol. 33.
10. *Appell P.* Sur une forme generale des equations de la Dynamique. Compt. Rendes, 1899, t. 129.
11. *Мак-Миллан В. Д.* Динамика твердого тела. М., Изд-во иностр. лит., 1951.
12. *Hamel G.* Die Lagrange — Eulershe Gleichungen der Mechanik. Z. Math. und Phys., 1904, Bd 50.
13. *Чаплыгин С. А.* О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости. Тр. Отд. физ. наук о-ва любителей естествознания, 1897, т. 9.
14. *Воронец П. В.* Об уравнениях движения для неголономных систем. Матем. сб., 1901, т. 22, вып. 4.
15. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. М., «Наука», 1967.