УДК 517.949.2

НЕКОТОРЫЕ ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ПЕРВОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ РАЗНОСТНЫХ СИСТЕМ

В. П. Силаков

(Новочеркасск)

Результаты данной заметки можно рассматривать как перенесение результатов Н. Г. Четаева для конечных систем дифференциальных уравнений [1] на счетные системы разностных уравнений. Используются идеи работы [2].

Будем рассматривать систему

$$y_s(m+1) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{si}(m)\, y_i(m), \quad m = 0, 1, \ldots \tag{1}$$

Здесь и всюду ниже $s = 1, 2, \ldots$, функции p_{si} ограничены и ряды $|p_{s1}(m)| + |p_{s2}(m)| + \ldots$ сходятся равномерно относительно m при $0 \leqslant m < \infty$.

Обозначим $\|y(m)\| = \sup_s |y_s(m)|$.

В качестве приближенной системы для решения вопроса об устойчивости системы (1) будем рассматривать систему с постоянными коэффициентами

$$x_s(m+1) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{si} x_i(m) \tag{2}$$

Обозначим

$$L = \sup_s \sum_{i=1}^{\infty} |c_{si}| \tag{3}$$

Будем говорить, что нулевое (невозмущенное) решение $x_s(m) \equiv 0$ системы (2) экспоненциально устойчиво, если все возмущенные решения этой системы при всех $m \geqslant m_0$ подчиняются закону [3]

$$\|x(m)\| \leqslant B \|x(m_0)\| \exp[-\alpha(m - m_0)] \tag{4}$$

где $B \geqslant 1$ и $\alpha > 0$ не зависят от m_0 и от выбора $x_s(m_0)$ из области $\|x(m_0)\| < \varepsilon$, где ε достаточно мало.

Аналогично будем говорить о решениях системы (1).

Теорема 1. Пусть даны система (1) и система с постоянными коэффициентами (2), связанные соотношением

$$\sup_s \sup_m \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} |p_{si}(m) - c_{si}|, \quad m_0 \leqslant m \leqslant \infty, \quad s = 1, 2, \ldots \right\} \leqslant M < \infty \tag{5}$$

Если нулевое решение системы (2) экспоненциально устойчиво, то при достаточно малом M будет экспоненциально устойчиво и нулевое решение системы (1).

Доказательство. Пусть

$$T = \alpha^{-1} \ln 4B + \tau \ (\tau \geqslant 0) \tag{6}$$

$$\delta = \varepsilon / (2B) \tag{7}$$

где α и B — числа из (4), ε — произвольное положительное число, для которого справедливо неравенство (4).

Рассмотрим решения $y_s(m)$ и $x_s(m)$ систем (1) и (2), определяемые начальными условиями

$$\|y(m_0)\| = \|x(m_0)\| < \delta \tag{8}$$

Из неравенства (4) с учетом (8) и (7) получаем

(9) $\qquad \|x(m)\| < \varepsilon/2 \quad \text{при } m \geqslant m_0$

Далее, из неравенства (4) при $m = m_0 + T$ с учетом (8) и (6) получаем

(10) $\qquad \|x(m_0+T)\| < \delta/4$

Докажем неравенство

(11) $$\Delta_m \equiv \|y(m) - x(m)\| < \begin{cases} M\delta B\,[(L+M)^{m-m_0} - 1]/(L+M-1) \\ \qquad\qquad \text{при } L+M \neq 1 \\ M\delta B\,(m-m_0) \quad \text{при } L+M=1 \end{cases}$$

Запишем систему (1) в виде

(12) $$y_s(m+1) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{si} y_i(m) + \sum_{i=1}^{\infty} [p_{si}(m) - c_{si}]\, y_i(m)$$

Из (12) и (2), используя (3) и (5), получаем $\Delta_{m+1} \leqslant L\Delta_m + M\|y(m)\|$. Так как $\|x(m)\| \leqslant \Delta_m + \|y(m)\|$, то, учитывая (4) и (8), получим $\Delta_{m+1} \leqslant (L+M)\Delta_m + M\delta B$. Взяв в этом неравенстве в качестве m числа m_0, m_0+1, $m_0+2, \ldots, m-1$ и учитывая (8), получим неравенство (11).

Очевидно, в неравенстве (11) можно выбрать M таким, чтобы

(13) $\qquad \Delta_m < \delta/4 \quad \text{при } m_0 \leqslant m \leqslant m_0 + T$

Далее, используя (13), (9), (7) и (10), получим

$$\|y(m)\| < \varepsilon \quad \text{при } m_0 \leqslant m \leqslant m_0 + T$$
$$\|y(m_0+T)\| < \delta/2$$

Примем число $m_0 + T$ за начальное значение, рассмотрим решения систем (1) и (2), определяемые начальными условиями

$$\|y(m_0+T)\| = \|x(m_0+T)\| < \delta/2$$

и повторим все рассуждения, начиная с неравенства (8).

Пусть оказалось, что

$$\|y(m)\| < \varepsilon / 2^{n-1} \quad \text{при} \quad m_0 + (n-1)\,T \leqslant m \leqslant m_0 + nT$$

и при этом

$$\|y(m_0+nT)\| < \delta/2^n.$$

Покажем, что тогда

(14) $\qquad \|y(m)\| < \varepsilon/2^n \quad \text{при } m_0 + nT \leqslant m \leqslant m_0 + (n+1)\,T$

(15) $\qquad \|y[m_0 + (n+1)\,T]\| < \delta/2^{n+1}.$

Примем число $m_0 + nT$ за начальное значение и рассмотрим решения систем (1) и (2), определяемые начальными условиями

$$\|y(\overline{m}_0)\| = \|x(\overline{m}_0)\| < \delta / 2^n \;(\overline{m}_0 = m_0 + nT)$$

Из (4) при $m \geqslant \overline{m}_0$ и $\|x(\overline{m}_0)\| < \delta / 2^n < \varepsilon / (B2^{n+1})$ получаем

(16) $\qquad \|x(m)\| < \varepsilon/2^{n+1} \quad \text{при } m \geqslant \overline{m}_0$

Затем из (4) при $m = \overline{m}_0 + T$ и $\|x(\overline{m}_0)\| < \delta/2^n$ с учетом (6) получаем

(17) $\qquad \|x(\overline{m}_0 + T)\| < \delta/2^{n+2}.$

Неравенство (13) будет иметь вид

(18) $\qquad \Delta_m < \delta/2^{n+2} \quad \text{при } m \geqslant \overline{m}_0$

Используя (18), (16) и (7), получаем

(19) $$\| y(m) \| < \varepsilon/2^n \quad \text{при } \overline{m}_0 \leqslant m \leqslant \overline{m}_0 + T$$

Далее, используя (18) при $m = \overline{m}_0 + T$ и (17), получим

(20) $$\| y(\overline{m}_0 + T) \| < \delta/2^{n+1}$$

Подставив в неравенства (19) и (20) значение $\overline{m}_0 = m_0 + nT$, получим неравенства (14) и (15).

Из неравенства (14) выводим

$$\| y(m) \| < 2\varepsilon \exp[-(m - m_0) \ln 2/(\alpha^{-1} \ln 4B + \tau)]$$

Это неравенство доказывает утверждение теоремы.

Наряду с системами (1) и (2) будем рассматривать систему

(21) $$y_s(m+1) = \sum_{i=1}^{\infty} p_{si}(m) y_i(m) + R_s[m, y_i(m)]$$

$$(\| R(m, y_i) \| < \gamma \| y \|, \quad i = 1, 2, \ldots)$$

в некоторой области $D: \| y(m) \| \leqslant H$, $m = 0, 1, \ldots$ ($H = \text{const}$).

Теорема 2. Пусть системы (21) и (2) связаны соотношением вида (5). Если нулевое решение системы (2) экспоненциально устойчиво, то при достаточно малых γ и M будет экспоненциально устойчиво и нулевое решение системы (21).

Доказательство теоремы 2 отличается от доказательства теоремы 1 только тем, что в неравенстве (11) вместо M будет стоять $M + \gamma$.

Автор благодарит Г. С. Юдаева за постановку задачи.

Поступила 31 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
2. *Юдаев Г. С.* Некоторые частные случаи устойчивости по первому приближению систем с запаздываниями. Изв. вузов, Сер. матем., 1973, № 2 (129).
3. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М., Физматгиз, 1959.

УДК 531.011

ОБ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ НЕГОЛОНОМНЫХ СИСТЕМ

Я. П. Романов

(Йошкар-Ола)

Доказывается эквивалентность уравнений движения неголономных систем с линейными относительно скоростей связями, полученных различными методами.

В настоящее время имеются различные формы уравнений движения неголономных систем. Естественно, был поставлен вопрос об их тождественности [1–3]. Этот вопрос рассматривался также в работах [4–8] и в диссертации М. И. Ефимова [1].

1. Автор работ [1–3] утверждает, что от того, в каком месте при преобразовании общего уравнения динамики принимаются во внимание уравнения неголономных связей, зависит окончательный вид уравнений движения системы, и в общем случае любых неголономных систем с линейными относительно скоростей связями не гаранти-

[1] Ефимов М. И. Об уравнениях Чаплыгина для неголономных систем. Канд. диссертация. Ин-т механики АН СССР, 1953.