игре сближения первому игроку противодействуют неизвестные ему помехи $\alpha[t]$ и второй игрок, выбирающий управление $v[t]$. Разумно полагать, что второй игрок выбирает и функцию $\alpha[t]$.

Во вспомогательной системе выбор управления первым игроком стеснен неравенством (2.2), в котором величина μ заменена на $\mu \cos \alpha_0$, а выбор управления вторым игроком — неравенством (2.5). Множество окончания игры M то же, что и в исследуемой игре.

Из работы [5] следует, что при $\lambda \leqslant \lambda_0$ (где λ_0 — некоторое малое число) решение задачи (1.5) на программный максимин для вспомогательной системы достигается на единственной паре управлений $\{u^\circ[t], v^\circ[t]\}$. Множество M здесь выпукло. Следовательно, точка x_M из M, ближайшая к точке $x(\vartheta, t_0, x_0, u^\circ, v^\circ)$ — единственна.

Таким образом, для вспомогательной системы имеет место регулярный случай игры сближения с множеством M.

Как нетрудно убедиться, для вспомогательной системы и исследуемой системы выполняется соотношение (1.6). В таком случае, учитывая вычисленное в работе [5] значение $\varepsilon_0(t, x, \vartheta, \lambda)$, согласно доказанной выше теореме, можно построить стратегию первого игрока $U_e^{(\vartheta)}$, гарантирующую приведение движения исследуемой системы из начального положения $\{t_0, x_0\}$ на множество M к моменту ϑ_0. (Момент ϑ_0 определяется как наименьший положительный корень уравнения $\varepsilon_0(t_0, x_0, \vartheta, \lambda) = 0$.)

Поступила 6 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Экстремальное управление в нелинейной позиционной дифференциальной игре. Докл. АН СССР, 1972, т. 203, № 3.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
3. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. I, II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2—3.
4. *Пашков А. Г.* Об одном достаточном условии игр сближения и уклонения. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 6.
5. *Альбрехт Э. Г.* О сближении квазилинейных объектов. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Н. Г. Апыхтин

(Москва)

Установлено, что тяжелое твердое тело с одной закрепленной точкой в случае Лагранжа может совершать, наряду с вращением вокруг оси динамической симметрии, перманентные вращения вокруг оси, произвольно расположенной в теле. При помощи метода связки интегралов уравнений возмущенного движения находятся достаточные условия устойчивости рассматриваемого перманентного вращения. Указываются также необходимые условия устойчивости на основании системы уравнений первого приближения.

Вращательное движение тяжелого тела с одной закрепленной точкой в случае Лагранжа вокруг оси динамической симметрии, расположенной вертикально, исследовано на устойчивость в [1]. Необходимое и достаточное условие устойчивости этого движения тела в более общем силовом поле получено в [2].

Рассмотрим твердое тело с одной закрепленной точкой O, главные моменты инерции которого $A = B \neq C$, движущееся в поле сил, которое допускает силовую функцию $U = U(\gamma_3)$, где γ_3 — косинус угла между осью динамической симметрии тела Oz и неподвижной в пространстве осью Oz_1.

Уравнения Эйлера — Пуассона в этом случае имеют вид

(1)
$$p^{\cdot} = (1-\delta)\, qr - \gamma_2 u_3, \quad q^{\cdot} = (\delta - 1)\, pr + \gamma_1 u_3, \quad r^{\cdot} = 0$$
$$\gamma_1^{\cdot} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \gamma_2^{\cdot} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \gamma_3^{\cdot} = q\gamma_1 - p\gamma_2$$
$$\delta = C / A, \ u_3 = dU / d\gamma_3$$

Здесь p, q, r — проекции мгновенной угловой скорости на главные оси инерции твердого тела Ox, Oy и Oz соответственно, $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — направляющие косинусы оси Oz_1 в системе $Oxyz$.

Помимо частного решения $p = q = 0$, $r = \omega$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$, $\gamma_3 = 1$, уравнения (1) допускают частное решение, как и в случае тяжелого твердого тела [3]

(2)
$$p = \omega l_1 = 0, \quad q = \omega l_2, \quad r = \omega l_3, \quad \gamma_1 = l_1 = 0, \quad \gamma_2 = l_2, \quad \gamma_3 = l_3, \quad \omega^2 = $$
$$= u_3^{\circ} / (1 - \delta)\, l_3, \quad u_3^{\circ} = (dU / d\gamma_3)_{\gamma_3 = l_3}$$

Здесь ω — величина угловой скорости вращения, а постоянные l_1, l_2, l_3 — направляющие косинусы оси Oz_1 в осях $Oxyz$, удовлетворяющие условию $l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1$.

Выбор $l_1 = 0$ не нарушает общности. Действительно, можно повернуть оси x и y в экваториальной плоскости эллипсоида инерции твердого тела таким образом, чтобы перманентная ось Oz_1 находилась в одной плоскости с осями Oz и Oy и стала ортогональной оси Ox.

Решение (2) уравнений (1) соответствует вращению твердого тела с определенной угловой скоростью ω вокруг оси Oz_1, расположенной в теле произвольно, за исключением случая $l_3 = 0$, когда угловая скорость обращается в бесконечность. Допускаемыми условиями задачи будут те перманентные оси, для которых величина ω^2 имеет положительную величину. Они определяются неравенством $u_3^{\circ} / (1 - \delta)\, l_3 > 0$.

Исследуем устойчивость движения (2) по отношению к переменным q, r, γ_2, q_3 и $q - \omega l_2$, $p - \omega\gamma_1$. Положим в возмущенном движении

(3)
$$p = x_1, \ q = \omega l_2 + x_2, \ r = \omega l_3 + x_3, \ \gamma_1 = y_1, \gamma_2 = l_2 + y_2, \ \gamma_3 = l_3 + y_3$$

Уравнения возмущенного движения, которые получаются из уравнений (1) с использованием (3), допускают следующие первые интегралы (точками обозначены члены не ниже третьего порядка относительно y_3):

(4)
$$V_1 = x_1^2 + x_2^2 + \delta x_3^2 + 2\omega\,(l_2 x_2 + \delta l_3 x_3) - 2(u_3^{\circ} y_3 + {}^1/{}_2 u_{33}^{\circ} y_3^2) + \ldots =$$
$$= \mathrm{const}, \quad V_2 = x_1 y_1 + x_2 y_2 + l_2 x_2 + \omega l_2 y_2 + \delta\,(l_3 x_3 + \omega l_3 y_3 +$$
$$+ x_3 y_3) = \mathrm{const}, \quad V_3 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2\,(l_2 y_2 + l_3 y_3) = 0, \quad V_4 = x_3 =$$
$$= \mathrm{const}, \quad u_{33}^{\circ} = (d^2 U / d\gamma_3^2)_{\gamma_3 = l_3}$$

Для исследования устойчивости невозмущенного движения (2) по отношению к переменным $r, \gamma_3, p - \omega\gamma_1, q - \omega\gamma_2$ функцию Ляпунова построим по методу Н. Г. Четаева в виде следующей квадратичной связки интегралов (4):

(5)
$$V = V_1 - 2\omega V_2 + \omega^2 V_3 + \lambda V_4^2 = (x_1 - \omega y_1)^2 + (x_2 - \omega y_2)^2 + (\delta +$$
$$+ \lambda)\, x_3^2 - 2\omega\delta x_3 y_3 + (\omega^2 - u_{33}^{\circ})\, y_3^2 + \ldots$$

Квадратичная часть функции (5) есть функция определенно-положительная по отношению к переменным $x - \omega y_1$, $x_2 - \omega y_2$, x_3 и y_3, если имеет место неравенство

$$(\delta + \lambda)\,(\omega^2 - u_{33}^{\circ}) - \delta^2\omega^2 > 0$$

которое можно удовлетворить выбором положительной постоянной λ, если только имеет место условие

(6)
$$\omega^2 - u_{33}^{\circ} = u_3^{\circ} / (1 - \delta)\, l_3 - u_{33}^{\circ} > 0$$

Так как при условии (6) функция (5) будет определенно-положительной при достаточно малых значениях y_3, а ее производная в силу уравнений возмущенного движения тождественно равна нулю, то неравенство (6) — достаточное условие устойчивости невозмущенного движения (2) по отношению к переменным $p - \omega\gamma_1$, $q - \omega\gamma_2$, r и γ_3 на основании теоремы В. В. Румянцева [4].

Устойчивость по отношению к r следует из четвертого интеграла (4). Поэтому неравенство (6) — достаточное условие устойчивости практически по отношению к углу нутации θ ($\cos\theta = \gamma_3$).

Для исследования устойчивости невозмущенного движения (2) по отношению к переменным q, r, γ_2, γ_3 и $p - \omega\gamma_1$ выберем функцию Ляпунова в следующем виде:

$$V = V_1 - 2\omega V_2 + \omega^2 V_3 + \lambda V_4^2 + \omega x_2 V_3 / l_2 = (x_1 - \omega y_1)^2 + x_2^2 + \omega^2 y_2^2 + (\delta + \lambda) x_3^2 - 2\omega\delta x_3 y_3 + (\omega^2 - u_{33}^\circ) y_3^2 + 2\omega l_3 x_2 y_3 / l_2 + \ldots \tag{7}$$

Функция (7) является определенно-положительной в достаточной близости к началу координат пространства переменных x_i, y_i, если будет такой ее квадратичная часть. Последнее имеет место при условии

$$(\delta + \lambda)\,[\omega^2 (1 - l_3^2 / l_2^2) - u_{33}^\circ] - \delta^2\omega^2 > 0$$

которое выполняется при достаточно большом значении λ, если только имеет место неравенство

$$\omega^2 (1 - l_3^2 / l_2^2) - u_{33}^\circ = u_3^\circ (1 - l_3^2 / l_2^2) / (1 - \delta)\, l_3 - u_{33}^\circ > 0 \tag{8}$$

Производная функция (7) в силу уравнений возмущенного движения имеет вид $V^{\cdot} = \omega x_2^{\cdot} V_3 / l_2 = 0$, что справедливо в силу равенства $V_3 = 0$. Поэтому на основании теоремы В. В. Румянцева [4] неравенство (8) — достаточное условие устойчивости невозмущенного движения (2) по отношению к переменным $p - \omega\gamma_1$, q, r, γ_2, γ_3.

Неустойчивые перманентные вращения (2) выделим, рассматривая линеаризованную систему уравнений возмущенного движения

$$x_1^{\cdot} = (1 - \delta)\,\omega\,(l_3 x_2 + l_2 x_3) - u_3^\circ y_2 - l_2 u_{33}^\circ y_3, \quad x_2^{\cdot} = (\delta - 1)\,\omega\,(l_3 x_1 + l_1 x_3) + u_3^\circ y_1, \quad y_1^{\cdot} = - l_3 x_2 + l_2 x_3 + \omega\,(l_3 y_2 - l_2 y_3), \quad y_2^{\cdot} = l_3 x_1 - \omega l_3 y_1, \quad y_3^{\cdot} = - l_2 x_1 + \omega l_2 y_1, \quad x_3^{\cdot} = 0 \tag{9}$$

Характеристическое уравнение системы (9) имеет вид

$$\sigma^4 (\sigma^2 + g_0) = 0, \quad g_0 = \omega^2 [1 + (1 - \delta)^2 l_3^2] - u_{33}^\circ l_2^\circ + 2u_3^\circ l_3 \tag{10}$$

Очевидно, что при условии $g_0 < 0$ один из корней характеристического уравнения (10) будет положительным, а на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по первому приближению движение (2) будет неустойчивым.

Поступила 12 XI 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Об устойчивости вращения твердого тела с одной неподвижной точкой в случае Лагранжа. ПММ, 1954, т. 18, вып. 1.
2. *Белецкий В. В.* Некоторые вопросы движения твердого тела в ньютоновском поле сил. ПММ, 1957, т. 21, вып. 6,
3. *Staude O.* Über permanente Rotationsachsen bei der Bewegung eines schweren Körpers um festen Punkt. J. reine und angew. Math., 1894, Bd 113.
4. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения по отношению к части переменных. Вестн. МГУ, 1957, № 4.