УДК 62—50

ОБ ОДНОМ ДОСТАТОЧНОМ УСЛОВИИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПОЗИЦИОННЫХ ИГР СБЛИЖЕНИЯ

А. Г. Пашков

(Москва)

Рассматривается игровая задача сближения для нелинейной конфликтно-управляемой системы. Показано, что достаточные условия для успешного завершения рассматриваемой нелинейной позиционной игровой задачи сближения могут быть при определенных предположениях выведены из условий регулярности подходящих дифференциальных игр. В качестве примера рассматривается решение задачи о сближении по геометрическим координатам двух объектов (материальных точек), движение которых описывается квазилинейными дифференциальными уравнениями, причем в системе управления первого (догоняющего) объекта имеется «люфт».

Работа примыкает к исследованиям [1–4].

1. Рассмотрим конфликтно-управляемую систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$x^{\cdot} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q \tag{1.1}$$

Здесь x — фазовый n-мерный вектор системы; u и v — r-мерные векторные управляющие воздействия, подчиненные первому и второму игрокам соответственно, P и Q — ограниченные замкнутые множества. Функция $f(t, x, u, v)$ предполагается непрерывной по всем аргументам, удовлетворяющей условиям Липшица по x в каждой ограниченной области пространства $\{x\}$ и удовлетворяющей условиям продолжимости всех решений $x(t)$ уравнения в контингенциях $x^{\cdot} \in F(t, x)$ для всех $t \geqslant t_0$. Здесь $F(t, x) = \operatorname{co} f(t, x, u, v)$ при $u \in P$ и $v \in Q$.

В пространстве $\{x\}$ задано замкнутое множество M — цель первого игрока. Начальная позиция $\{t_0, x_0\}$ зафиксирована. Допустимая стратегия первого игрока U определяется как функция, которая всякой позиции $\{t, x\}$ ставит в соответствие замкнутое множество $U(t, x) \in P$, причем множества $U(t, x)$ полунепрерывны сверху относительно включения по изменению позиции $\{t, x\}$. Движение $x[t] = x[t, t_*, x_*, U]$ определяется как любая абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая условиям $x[t_*] = x_*$ и $x^{\cdot}[t] \subset F_U(t, x[t])$ при почти всех $t \geqslant t_*$. Здесь $F_U(t, x) = \operatorname{co}\{f(t, x, u, v) \mid u \in U(t, x), v \in Q\}$. По определению, стратегия U_ϑ гарантирует сближение точки $x[t]$ с целью M из позиции $\{t_0, x_0\}$ в момент $\vartheta \geqslant t_0$, если $x[\vartheta] \in M$ для всякого движения $x[t] = x[t, t_0, x_0, U_\vartheta]$.

Проблема синтеза управления u, работающего по принципу обратной связи и гарантирующего сближение точки $x[t]$ с множеством M при произвольных действиях $v \in Q$ второго игрока, основанных на любой его информированности, формализуется в виде следующей задачи о сближении [1]. Требуется найти момент $\vartheta \geqslant t_0$ и стратегию U_v, гарантирующую сближение точки $x[t]$ с M из позиции $\{t_0, x_0\}$ в момент ϑ.

Введем вспомогательную систему, описываемую векторным дифференциальным уравнением

$$x^{\cdot} = \varphi(t, x) + u_1 - v_1, \quad u_1 \in P_1, \ v_1 \in Q_1 \tag{1.2}$$

Здесь x — n-мерный фазовый вектор системы, u_1 и v_1 — r-мерные векторы управления, подчиненные первому и второму игрокам соответственно, P_1 и Q_1 — ограниченные, выпуклые и замкнутые множества. Функция $\varphi(t, x)$ предполагается непрерывной по всем аргументам и удовлетворяет условию Липшица по x.

Рассмотрим следующую задачу. Найдем пару управлений $\{u_1^\circ(t), v_1^\circ(t)\}$, которая доставляет решение следующей вспомогательной задачи на программный максимин для системы (1.2)

$$\rho[x(\vartheta, t_*, x_*, u_1^\circ, v_1^\circ), M] = \max_{v_1(t)} \min_{u_1(t)} \rho[x(\vartheta, t_*, x_*, u_1, v_1), M] \tag{1.3}$$

Обозначим $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) = \rho[x(\vartheta, t_*, x_*, u_1^\circ, v_1^\circ), M]$. Будем полагать, что для системы (1.2) имеет место регулярный случай игры сближения с множеством M, т. е. для всякой позиции $\{t_*, x_*\}$, $t_* < \vartheta$, для которой $0 < \varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) < \delta$, $\delta > 0 = \mathrm{const}$, задача (1.3) имеет единственное решение $\{u_1^\circ(t), v_1^\circ(t)\}$ и точка x_M из M, ближайшая к точке $x(\vartheta, t_*, x_*, u_1^\circ, v_1^\circ)$, тоже единственна.

Известно [2], что в регулярном случае игры сближения для системы (1.2) при фиксированном значении ϑ непрерывная при $t \leqslant \vartheta$, $0 < \varepsilon_0 < \delta$ функция $\varepsilon_0(t, x, \vartheta)$ будет дифференцируема в области $t < \vartheta$, $0 < \varepsilon_0 < \delta$ и удовлетворяет неравенству

$$(1.4)\qquad \min_{u_1\in P_1}\max_{v_1\in Q_1}\frac{d\varepsilon_0}{dt} = \min_{u_1\in P_1}\max_{v_1\in Q_1}\left[\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x}\right)'(\varphi(t, x) + u_1 - v_1)\right] =$$
$$= \max_{v_1\in Q_1}\left[\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x}\right)'(\varphi(t, x) + u_{1e} - v_1)\right] \leqslant 0$$

Определим экстремальную стратегию U_{e_1} для системы (1.2) следующим образом: если $\varepsilon_0(t, x, \vartheta) = 0$ или $\varepsilon_0(t, x, \vartheta) \geqslant \delta$ или $t \geqslant \vartheta$, то $U_{e_1}^{(\vartheta)} = P_1$, если же $0 < \varepsilon_0(t, x, \vartheta) < \delta$, $t < \vartheta$, то $U_{e_1}^{(\vartheta)}(t, x)$ складывается из всех векторов $u_{e_1} \in P_1$, которые удовлетворяют условию минимакса

$$(1.5)\qquad \max_{v_1\in Q_1}\left(\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x}\right)'(\varphi(t, x) + u_{1e} - v_1) = \min_{u_1\in P_1}\max_{v_1\in Q_1}\left(\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x}\right)'(\varphi(t, x) + u_1 - v_1)$$

Аналогично теореме работы [1] можно доказать следующее утверждение.

Пусть игра сближения для движения системы (1.2) регулярна. Тогда экстремальная стратегия $U_{e_1}^{(\vartheta)}$ допустима. Если из начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ множество M поглощается в момент ϑ° программно по минимаксу, т. е. если $\rho[x(\vartheta, t_0, x_0, u_1^\circ, v_1^\circ), M] = 0$, то экстремальная стратегия $U_{e_1}^{(\vartheta)}$ разрешает задачу сближения с множеством M движения (1.2).

Основной результат формулируется следующим образом.

Теорема. Пусть для вспомогательной системы (1.2) имеет место регулярный случай игры сближения с множеством и выполняется соотношение

$$(1.6)\qquad \min_{u_1\in P_1}\max_{v_1\in Q_1} s'(\varphi(t, x) + u_1 - v_1) \geqslant \min_{u\in P}\max_{v\in Q} s' f(t, x, u, v)$$

где s — произвольный n-мерный вектор, а знак штрих означает транспонирование. Тогда, если из начальной позиции $\{t_0, x_0\}$ множество M поглощается системой (1.2) в момент ϑ программно по минимаксу, то можно построить соответствующую стратегию $U_e^{(\vartheta)}$ первого игрока, гарантирующую ему сближение движения системы (1.1) с M в момент ϑ.

Доказательство. Из (1.6) с учетом (1.4) и (1.5) следует

$$(1.7)\qquad \min_{u\in P}\max_{v\in Q}\left[\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x}\right)' f(t, x, u, v)\right] \leqslant$$
$$\leqslant \min_{u_1\in P_1}\max_{v_1\in Q_1}\left[\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial t} + \left(\frac{\partial\varepsilon_0}{\partial x}\right)'(\varphi(t, x) + u_1 - v_1)\right] \leqslant 0$$

Таким образом, в области $t \leqslant \vartheta$ построена непрерывная функция $\varepsilon_0(t, x, \vartheta)$, удовлетворяющая условию $\varepsilon_0(\vartheta, x, \vartheta) > 0$ при $x(\vartheta) \overline{\in} M$ и такая, что при $t < \vartheta$, $\varepsilon(t, x, \vartheta) > 0$ выполняется неравенство (1.7).

Стратегию первого игрока $U_e^{(\vartheta)}$ для исходной системы (1.1) определим следующим образом: если $\varepsilon_0(t, x, \vartheta) = 0$ или $\varepsilon_0(t, x, \vartheta) \geqslant \delta$, или $t \geqslant \vartheta$, то $U_e^{(\vartheta)} = P$; если же $0 < \varepsilon_0(t, x, \vartheta) < \delta$, $t < \vartheta$, то $U_e^{(\vartheta)}(t, x)$ складывается из векторов $u_e \in P$, которые удовлетворяют условию минимакса

$$\max_{v\in Q} s'(t) f(t, x, u_e, v) = \min_{u\in P}\max_{v\in Q} s'(t) f(t, x, u, v)$$
$$(s(t) = \partial\varepsilon_0 / \partial x)$$

Согласно теореме 2.1 работы [3], если $\varepsilon_0(t_0, x_0) \leqslant 0$, то стратегия $U_e^{(\vartheta)}$ разрешает задачу о сближении движения (1.1) с множеством M в момент $\vartheta = \vartheta^\circ$, где ϑ° — момент программного поглощения множества M движением (1.2) из начальной позиции $\{t_0, x_0\}$.

2. *Пример.* Пусть движение первого преследуемого объекта описывается уравнениями

$$y_1^{\cdot} = y_3, \quad y_2^{\cdot} = y_4 \tag{2.1}$$
$$y_3^{\cdot} = \lambda y_3^2 + u_1 \cos\alpha - u_2 \sin\alpha, \quad y_4^{\cdot} = u_1 \sin\alpha + u_2 \cos\alpha$$
$$y = \{y_1, \ldots y_4\}, \quad u = \{0, 0, u_1, u_2\}.$$

Здесь u — управление первого преследующего игрока (объекта). Выбор управления первого игрока стеснен ограничением

$$u_1^2[t] + u_2^2[t] \leqslant \mu^2 \tag{2.2}$$

В системе управления первого игрока имеется люфт, поэтому вместо управляющей силы $u[t]$ на систему воздействует некоторая сила $u^*[t]$, где вектор $u^*[t]$ отличается от вектора $u[t]$ поворотом на некоторый угол $\alpha[t]$. Причем эта помеха $\alpha[t]$ должна удовлетворять ограничению

$$|\alpha[t]| \leqslant \alpha_0 < \pi / 2 \tag{2.3}$$

Движение второго (преследуемого) игрока описывается уравнениями

$$z_1^{\cdot} = z_3, \quad z_2^{\cdot} = z_4, \quad z_3^{\cdot} = \lambda z_3^2 + v_1, \quad z_4^{\cdot} = v_2 \tag{2.4}$$
$$v = \{0, 0, v_1, v_2\}$$

Здесь v — управление второго игрока (объекта). Выбор управления второго игрока стеснен ограничением

$$v_1^2[t] + v_2^2[t] \leqslant \nu^2 \tag{2.5}$$

Отметим, что в системах (2.1) и (2.4) λ ($\lambda > 0$) — малый параметр.

В качестве платы игры рассматривается величина

$$\gamma[\vartheta] = [(y_1[\vartheta] - z_1[\vartheta])^2 + (y_2[\vartheta] - z_2[\vartheta]^2]^{1/2} \tag{2.6}$$

Задача первого игрока — минимизировать величину $\gamma[\vartheta]$; второй игрок имеет целью максимизировать величину $\gamma[\vartheta]$.

Рассмотрим теперь вспомогательную игру сближения с платой (2.6), в которой поведение игроков описывается уравнениями из работы [5].

Первый игрок, следовательно, движется согласно уравнениям (2.1), в которых $\alpha = 0$. На выбор управлений первого игрока накладываем ограничения (2.2), в которых величина μ заменена на $\mu \cos\alpha_0$.

Уравнения движения второго игрока и ограничения на выбор им управляющих воздействий совпадают с (2.4), (2.5) соответственно.

Запишем уравнения исследуемой игры сближения, а также уравнения для вспомогательной игры сближения в виде систем шестого порядка, выполняя замену переменных по формулам

$$x_1 = y_1 - z_1, \quad x_2 = y_2 - z_2, \quad x_3 = y_3, \quad x_4 = y_4, \quad x_5 = z_3, \quad x_6 = z_4$$

Выбор управлений в исследуемой игре сближения стеснен ограничениями (2.2) и (2.6) соответственно. Ограничение на люфт, накладываемое на управляющее воздействие первого игрока, задается неравенством (2.3). Величина платы игры $\gamma[\vartheta]$ согласно (2.6) принимает вид $\gamma[\vartheta] \equiv 0$, т. е. множество окончания игры задается условием $M: \{x_1 = 0, \; x_2 = 0\}$.

Первый игрок стремится к некоторому моменту $\vartheta = \vartheta^\circ$ обеспечить попадание точки $\{x_1[t], x_2[t]\}$ на множество $M: \{x_1 = 0, x_2 = 0\}$, а второй задается целью оттянуть как можно дальше момент попадания точки $\{x_1[t], x_2[t]\}$ на M. Заметим, что в исследуемой игре сближения первому игроку противодействуют неизвестные ему помеха $\alpha\,[t]$ и второй игрок, выбирающий управление $v\,[t]$. Разумно полагать, что второй игрок выбирает и функцию $\alpha\,[t]$.

Во вспомогательной системе выбор управления первым игроком стеснен неравенством (2.2), в котором величина μ заменена на $\mu\cos\alpha_0$, а выбор управления вторым игроком — неравенством (2.5). Множество окончания игры M то же, что и в исследуемой игре.

Из работы [5] следует, что при $\lambda \leqslant \lambda_0$ (где λ_0 — некоторое малое число) решение задачи (1.5) на программный максимин для вспомогательной системы достигается на единственной паре управлений $\{u^\circ\,[t], v^\circ\,[t]\}$. Множество M здесь выпукло. Следовательно, точка x_M из M, ближайшая к точке $x\,(\vartheta, t_0, x_0, u^\circ, v^\circ)$ — единственна.

Таким образом, для вспомогательной системы имеет место регулярный случай игры сближения с множеством M.

Как нетрудно убедиться, для вспомогательной системы и исследуемой системы выполняется соотношение (1.6). В таком случае, учитывая вычисленное в работе [5] значение $\varepsilon_0\,(t, x, \vartheta, \lambda)$, согласно доказанной выше теореме, можно построить стратегию первого игрока $U_e^{(\vartheta)}$, гарантирующую приведение движения исследуемой системы из начального положения $\{t_0, x_0\}$ на множество M к моменту ϑ_0. (Момент ϑ_0 определяется как наименьший положительный корень уравнения $\varepsilon_0\,(t_0, x_0, \vartheta, \lambda) = 0$.)

Поступила 6 III 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Экстремальное управление в нелинейной позиционной дифференциальной игре. Докл. АН СССР, 1972, т. 203, № 3.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М., «Наука», 1974.
3. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. I, II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2—3.
4. *Пашков А. Г.* Об одном достаточном условии игр сближения и уклонения. Изв. АН СССР, МТТ, 1972, № 6.
5. *Альбрехт Э. Г.* О сближении квазилинейных объектов. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРМАНЕНТНЫХ ВРАЩЕНИЙ СИММЕТРИЧНОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА

Н. Г. Апыхтин

(Москва)

Установлено, что тяжелое твердое тело с одной закрепленной точкой в случае Лагранжа может совершать, наряду с вращением вокруг оси динамической симметрии, перманентные вращения вокруг оси, произвольно расположенной в теле. При помощи метода связки интегралов уравнений возмущенного движения находятся достаточные условия устойчивости рассматриваемого перманентного вращения. Указываются также необходимые условия устойчивости на основании системы уравнений первого приближения.

Вращательное движение тяжелого тела с одной закрепленной точкой в случае Лагранжа вокруг оси динамической симметрии, расположенной вертикально, исследовано на устойчивость в [1]. Необходимое и достаточное условие устойчивости этого движения тела в более общем силовом поле получено в [2].