Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.376

О ЗАДАЧАХ УСТАНОВИВШЕЙСЯ И НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. Г. Осмоловский, В. Я. Ривкинд

(Ленинград)

Исследуются свойства уравнений, описывающих процесс ползучести металлов. Доказывается однозначная разрешимость краевой стационарной и начально-краевой нестационарной задачи, выход на стационарный режим решения нестационарного уравнения, сходимость алгоритмов численного решения.

1. Постановка задачи. Уравнения, связывающие тензор скорости деформации с тензором напряжений в плоской теории ползучести металлов, имеют вид [1]

$$
\begin{aligned}
(1.1)\qquad & \xi_{xx} = \frac{1}{3} f^\circ(T,\tau)\,(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) + \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sigma_{xx} - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right)\\
& \xi_{yy} = \frac{1}{3} f^\circ(T,\tau)\,(2\sigma_{yy} - \sigma_{xx}) + \frac{1}{2G}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\sigma_{yy} - \frac{\nu}{1+\nu}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})\right)\\
& \xi_{xy} = f^\circ(T,\tau)\,\sigma_{xy} + \frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial\tau}\sigma_{xy}\\
& T = (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} + 3\sigma_{xy}^2)^{1/2}, \quad (x,y)\in\Omega
\end{aligned}
$$

Здесь Ω — ограниченная область на плоскости, τ — время, T — интенсивность напряжений.

Предполагается, что монотонная и непрерывная по $T \in [0,\infty)$ при каждом τ функция $f^\circ(T,\tau)$ удовлетворяет неравенству

$$
c_1 + c_2 T^m \leqslant \frac{1}{\gamma(\tau)} f^\circ(T,\tau) \leqslant c_3 T^m + c_4
$$

с постоянными $c_1 \geqslant 0$, $c_i > 0$, $i = 2, 3, 4$, $m \geqslant 0$. При этом непрерывная по $\tau \in (0,\infty)$ положительная функция $\gamma(\tau)$ такова, что функция $f^\circ(T,\tau)/\gamma(\tau)$ непрерывна по $\tau \in [0,\infty]$ при каждом T и

$$
\int_0^\tau \gamma(p)\,dp \to \infty, \quad \tau\to\infty
$$

Система (1.1) в совокупности с уравнениями равновесия (1.2) и уравнением совместности (1.3)

$$
(1.2)\qquad \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} = 0
$$

$$
(1.3)\qquad \frac{\partial^2\xi_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\xi_{yy}}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2\xi_{xy}}{\partial x\,\partial y}
$$

представляет собой замкнутую систему уравнений.

В п. 2 рассматриваются начально-краевые задачи для уравнений (1.1) — (1.3) и обсуждаются их свойства.

Опишем кратко эти задачи. В первой начально-краевой задаче на границе области заданы смещения $u_i = \varphi_i$, а также тензор напряжений σ_{ij} в начальный момент времени. Неоднородность граничных условий для u_i выделяется в особое слагаемое в левой части (1.1)

$$\xi_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}\right) + \xi_{ij}$$

В соответствии с принципом Кастильяно [2] обобщенным решением полученной задачи называются такие функции $\sigma_{ij}(\tau)$, удовлетворяющие (1.2), для которых выполняется тождество при любых ζ_{ij}, удовлетворяющих (1.2)

$$\int_0^{\tau_0} d\tau \int_\Omega [\xi_{ij} - \Phi_{ij}(\sigma_{ij})]\, \sigma_{ij}{}^\circ\, dx\, dy = 0 \tag{1.4}$$

Здесь $\xi_{ij} = \Phi_{ij}(\sigma_{ij})$ — сокращенная запись системы (1.1). Это интегральное тождество не содержит компонент ζ_{ij}, ибо для любых ζ_{ij}, удовлетворяющих (1.3)

$$\int_\Omega \zeta_{ij}\sigma_{ij}{}^\circ\, dx\, dy = 0$$

Найденные из (1.4) и подставленные в правую часть (1.1) величины σ_{ij} однозначно определяют ξ_{ij}. Эта процедура эквивалентна проектированию системы (1.1) — (1.3) на подпространство решений системы (1.3) и позволяет исключить из рассматриваемых уравнений компоненты тензора ζ_{ij}.

Во второй начально-краевой задаче задается сила, приложенная к границе области. Введением функции Эри система (1.1) — (1.3) сводится к квазилинейному уравнению, обобщенное решение которого определяется обычным образом.

В п. 3 изучается поведение решения при $\tau \to \infty$ и доказывается стремление его к решению стационарного уравнения в некоторой норме. В п.4 разбираются приближенные методы решения этих задач.

2. Начально-краевые задачи. Произведем замену переменной и запишем систему (1.1) в матричной форме

$$\frac{d}{dt} A\sigma + \frac{1}{3} f_i(t, T)\, B\sigma = \xi \tag{2.1}$$

$$t = \int_0^\tau \gamma(p)\, dp, \qquad \sigma = \begin{Vmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{Vmatrix}, \qquad \xi = \begin{Vmatrix} \xi_{xx} \\ \xi_{yy} \\ \xi_{xy} \end{Vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{G(\nu+1)} \begin{Vmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(\nu+1) \end{Vmatrix}, \qquad B = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{Vmatrix}$$

Функция $f(t, T) \in C[0, \infty]$ по t при каждом T и удовлетворяет неравенству

$$c_1 + c_2 T^m \leqslant f(t, T) \leqslant c_3 T^m + c_4 \tag{2.2}$$

Рассмотрим следующие граничные и начальное условия:

$$u_1\big|_{\partial\Omega} = \varphi, \quad u_2\big|_{\partial\Omega} = \psi, \quad \sigma\big|_{t=0} = \sigma_0 \tag{2.3}$$

Будем считать, что функции φ и ψ продолжимы во внутренность области Ω в классе $W^2_{(m+2)/(m+1)}$.

Если производные понимать в обобщенном смысле, то левая часть системы (1.2) определяет замкнутый оператор в пространстве функций с конечной нормой

$$\sum_{i,j}\Big(\int_\Omega |\sigma_{ij}|^{m+2}\,dx\,dy\Big)^{1/(m+2)} \tag{2.4}$$

Пусть N — замкнутое подпространство нулей этого оператора. По определению, $\sigma \in N$ тогда и только тогда, если для любых $\psi_i \in \overset{\circ}{W}{}^2_{(m+2)/(m+1)}$, $i = 1, 2$ выполняется тождество

$$\int_\Omega \Big[\sigma_{xx}\frac{\partial\psi_1}{\partial x} + \sigma_{xy}\frac{\partial\psi_1}{\partial y} + \sigma_{yy}\frac{\partial\psi_2}{\partial y} + \sigma_{xy}\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\Big]\,dx\,dy = 0$$

и интеграл в (2.4) конечен. Будем считать, что $\sigma_0 \in N$. Еще потребуется пространство функций $\sigma(t) \in N$, $t \in [0, t_0]$ с конечной нормой

$$\Big(\int_0^{t_0} \|\sigma(t)\|_N^{m+2}\,dt\Big)^{1/(m+2)}$$

которое обозначим через N_{t_0}

Представим ξ в виде суммы

$$\xi = \xi_0 + \zeta, \quad \zeta_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial w_i}{\partial x_j} + \frac{\partial w_j}{\partial x_i}\Big), \quad w_i\big|_{\partial\Omega} = 0$$

где ξ_0 строится по φ и ψ из (2.3).

В соответствии с принципом Кастильяно [2] обобщенным решением задачи (1.1) — (1.3), (2.3) на промежутке $[0, t_0]$ назовем функцию $\sigma(t) \in N_{t_0}$ с конечной нормой (2.5) и функцию $\zeta(t)$ с конечной нормой (2.6)

$$\Big(\int_0^{t_0}\|\sigma(t)\|_N^{m+2}\,dt\Big)^{1/(m+2)} + \Big(\int_0^{t_0}\Big\|\frac{d\sigma(t)}{dt}\Big\|_{N^*}^{(m+2)/(m+1)}\,dt\Big)^{(m+1)/(m+2)} \tag{2.5}$$

$$\Big(\int_0^{t_0}\|\zeta_{ij}(t)\|_{L_{m+2}(\Omega)}\,dt\Big)^{1/(m+2)} \tag{2.6}$$

такие, что для любых $\eta_{ij}(t) \in N_{t_0}$ выполняется тождество

$$\int_0^{t_0} dt\int_\Omega \Big(\frac{d}{dt}A\sigma + \frac{1}{3}f(t, T)B\sigma, \eta\Big)\,dx\,dy = \int_0^{t_0} dt\int_\Omega (\xi_0, \eta)\,dx\,dy \tag{2.7}$$

Как известно [3], функции с конечной нормой (2.7) непрерывны в гильбертовом пространстве H — ядре оператора (1.2), заданного на пространстве функций σ_{ij}, суммируемых с квадратом. Для тройки пространств N, H, N^* (N^* — пространство, сопряженное к N) справедливо вложение $N \subset H \subset N^*$, причем вложение плотно.

Тождество (2.7) приводит к уравнению (оператор $K(t)$ действует из N в N^*)

$$\frac{d}{dt} A\sigma(t) + K(t)\sigma(t) = \xi_0, \quad \sigma\big|_{t=0} = \sigma_0 \tag{2.8}$$

Теорема 1. Оператор $K(t)$ ограничен и непрерывен при каждом t и сильно монотонен равномерно по $t \in [0, t_0]$.

Доказательство. Непрерывность и ограниченность следует из свойств функции $f(t, T)$ (см. [4]). Докажем сильную монотонность. Имеем

$$\langle K\sigma_1 - K\sigma_2, \sigma_1 - \sigma_2\rangle = \int_\Omega \Big[\frac{1}{3}(f(t, T_1)(2\sigma_{xx}^1 - \sigma_{yy}^1) -$$
$$- f(t, T_2)(2\sigma_{xx}^2 - \sigma_{yy}^2))(\sigma_{xx}^1 - \sigma_{xx}^2) + \frac{1}{3}(f(t, T_1)(2\sigma_{yy}^1 - \sigma_{xx}^1) -$$
$$- f(t, T_2)(2\sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}^2))(\sigma_{yy}^1 - \sigma_{yy}^2) + 2(f(t, T_1)\sigma_{xy}^1 -$$
$$- f(t, T_2)\sigma_{xy}^2)(\sigma_{xy}^1 - \sigma_{xy}^2)\Big]\,dx\,dy = \int_\Omega \Big[\frac{1}{3}(f(t, T_1) -$$
$$- f(t, T_2))(T_1 - T_2) + \frac{1}{3} = f(t, T_1) + f(t, T_2))(|\sigma_{xx}^1 - \sigma_{xx}^2|^2 +$$
$$+ |\sigma_{yy}^1 - \sigma_{yy}^2|^2 + 3|\sigma_{xy}^1 - \sigma_{xy}^2|^2 - (\sigma_{xx}^1 - \sigma_{xx}^2)(\sigma_{yy}^1 - \sigma_{yy}^2))\Big]\,dx\,dy$$

Пользуясь монотонностью $f(t, T)$ по T и неравенством

$$\frac{1}{3}(f(t, T_1) + f(t, T_2)) \geqslant \frac{c_2}{6(\sqrt{2})^m}[|\sigma_{xx}^1 - \sigma_{xy}^2|^2 + |\sigma_{yy}^1 - \sigma_{yy}^2|^2 +$$
$$+ |\sigma_{xy}^1 - \sigma_{xy}^2|^2]^{m/2}$$

получим

$$\langle K\sigma^1 - K\sigma^2, \sigma^1 - \sigma^2\rangle \geqslant \frac{c_2}{12(\sqrt{2})^m}\|\sigma^{-1} - \sigma^2\|_N^{m+2} \tag{2.9}$$

Из теоремы и положительности матрицы A следует [3] однозначная разрешимость уравнения (2.8).

Рассмотрим другую краевую задачу, когда на границе области Ω задана сила. Тогда, выражая тензор напряжений через функцию Эри и пользуясь уравнением совместности, придем к следующей задаче:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta^2 F + 2G(1 + \nu)\Big\{\frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[f(t, T)(2F_{xx} - F_{yy})] + \tag{2.10}$$
$$+ \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial y^2}[f(t, T)(2F_{yy} - F_{xx})] + \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}[f(t, T)F_{xy}]\Big\} = 0$$
$$T^2 = F_{xx}^2 + F_{yy}^2 - F_{xx}F_{yy} + 3F_{xy}^2, \quad F\big|_{t=0} = F(0)$$
$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$$

Если область односвязна, то граничные условия могут быть приведены к виду

$$F\,|_{\partial\Omega} = \psi_1, \quad \partial E\,/\,\partial n\,|_{\partial\Omega} = \psi_2$$

Аналогичная стационарная задача рассматривалась в [5], но при сделанных там предположениях относительно функции $f(T)$ (монотонность $Tf(T)$ по T) задача сводится лишь к строго монотонному оператору, что недостаточно для изучения поведения решения задачи (2.10) при $t \to \infty$ и построения алгоритмов нахождения приближенного решения.

Запишем F в виде

$$F = \varphi + F_0, \quad F_0 \in W^2_{m+2}$$

где φ удовлетворяет однородному граничному условию, и возьмем в качестве N и H пространства W^{02}_{m+2} и W^{02}_2 соответственно. Тогда, так же как и в предыдущем случае, задача (2.10) сводится к следующей:

$$\frac{d\varphi}{dt} + Q(t)\varphi = 0, \quad \varphi\big|_{t=0} = \varphi_0 \tag{2.11}$$

Теорема 2. Оператор $Q(t)$, отображающий N в N^*, ограничен, непрерывен и сильно монотонен при каждом $t \in [0, t_0]$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1, но неравенство (2.9) заменяется на

$$\langle Q\varphi_1 - Q\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2\rangle \geqslant \frac{c_2}{12(\sqrt{2})^m}\|\varphi_1 - \varphi_2\|_N^{m+2} \tag{2.12}$$

Из теоремы 2 следует [8] однозначная разрешимость уравнения (2.11).

Пусть $f_0(T) = \lim f(t, T)$ при $t \to +\infty$ и операторы K_0 и Q_0 порождаются функцией $f_0(T)$. Тогда в силу (2.9) и (2.12) однозначно разрешимы задачи

$$K_0\sigma = 0, \quad Q_0\varphi = 0 \tag{2.13}$$

Рассмотрим подробнее вторую задачу (2.13).

Теорема 3. Пусть постоянная c_1 в (2.4) положительна, $m \geqslant 1$ и

$$f_0(T) \in C^1[0, \infty), \; F_0 \in C^4(\overline{\Omega})$$

$$c_2' T^{m-1} \leqslant \frac{df_0(T)}{dT} \leqslant c_3' T^{m-1}, \quad c_3' \geqslant c_2' > 0$$

Тогда оператор Q_0 строго эллиптичен.

Доказательство. Введем обозначения

$$\varphi_{xx} = \xi_1, \quad \varphi_{yy} = \xi_2, \quad \varphi_{xy} = \xi_3, \quad \varphi_{yx} = \xi_4$$

$$F_{0xx} = \eta_1, \quad F_{0yy} = \eta_2, \quad F_{0xy} = \eta_3, \quad F_{0yx} = \eta_4$$

$$\xi_i + \eta_i = \zeta_i, \quad T^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 + {}^3/_2\,\zeta_3^2 + {}^3/_2\,\zeta_4^2 - \zeta_1\zeta_2$$

$$D_1 = {}^1/_6\, f_0(T)(2\zeta_1 - \zeta_2), \quad D_2 = {}^1/_6\, f_0(T)(2\zeta_2 - \zeta_1)$$

$$D_3 = {}^1/_2\, f_0(T)\,\zeta_3, \quad D_4 = {}^1/_2\, f_0(T)\,\zeta_4$$

Рассмотрим матрицу $D = \{\partial D_i / \partial \xi_j\}$ и соответствующий ей линейный оператор. Достаточно показать, что (см. [5]) для любого вектора $\alpha \in R^4$ выполняется неравенство

$$(D\bar{\alpha}, \bar{\alpha}) \geqslant c\left(a + \sum_{i+1}^{4} |\xi_i|\right)^m \|\alpha\|^2, \quad c, a > 0$$

Прямым вычислением можно показать, что в условиях теоремы все главные миноры матрицы D положительны. Поэтому форма $(D\alpha, \alpha)$ приводится треугольным преобразованием к диагональному виду с положительными коэффициентами. Следовательно, в силу закона инерции все собственные числа симметричной матрицы D положительны.

Вычислением можно показать, что

$$\det D \geqslant \frac{f_0^4(T)}{48}, \quad \|D\| \leqslant 2^4\left[f_0(T) + \frac{df_0(T)}{dT}T\right]$$

Воспользовавшись оценкой (см. [6])

$$1 / |\lambda_{\min}| = \|D^{-1}\| \leqslant \|D\|^3 / |\det D|$$

получим

$$\lambda_{\min} \geqslant c\left(a + \sum_{i=1}^{4} |\xi_i|\right)^m$$

что и доказывает теорему. Отсюда следует, что при достаточно гладкой границе $\partial\Omega$ решение задачи $Q_0\varphi = 0$ принадлежит пространству $C^{2,\delta}$ при некотором δ [5].

3. Поведение решения при $t \to \infty$. *Лемма 1.* При сделанных в п. 1 предположениях относительно зависимости $f(t, T)$ от t операторы $K(t)$ и $Q(t)$ сильно непрерывны по $t \in [0, \infty]$.

Доказательство. Для любых t_1 и $t_2 \in [0, \infty]$, $\varphi, \psi \in N$

$$|\langle Q(t_1)\varphi - Q(t_2)\varphi, \psi\rangle| \leqslant \|\psi\|_N \left[\int_\Omega \left\{\left[f(t_1, T) - f(t_2, T)\right] \times \right.\right.$$
$$\left.\left. \times \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha F|\right\}^{1/n}\right]^n, \quad n = \frac{m+1}{m+2}$$

Подынтегральное выражение стремится к нулю при $t_1 \to t_2$ и в силу неравенства (2.2) имеет суммируемую мажоранту. Тогда по теореме Лебега

$$\|Q(t_1)\varphi - Q(t_2)\varphi\|_{N^*} = \sup \|\psi\|_N =$$
$$= 1 |\langle Q(t_1)\varphi - Q(t_2)\varphi, \psi\rangle| \to 0$$

Для оператора $K(t)$ доказательство аналогично.

Теорема 4. При $t \to \infty$ решения задач (2.8), (2.11) стремятся в пространстве H к решению первой и второй задачи (2.13) соответственно.

Доказательство. Из равенства

$$\frac{d}{dt}(\varphi(t) - \varphi) + Q(t)\varphi(t) - Q(t)\varphi + Q(t)\varphi - Q_0\varphi = 0$$

где $Q_0\varphi = 0$, и формулы (2.12) получим после умножения на $\varphi(t) - \varphi$ и интегрирования по t от t_1 до t_2

$$\frac{1}{2}y(t_2) - \frac{1}{2}y(t_1) \leqslant -\frac{c_2}{12(\sqrt{2})^m}\int_{t_1}^{t_2} \|\varphi(t) - \varphi\|_N^{m+2}\,dt + \tag{3.1}$$
$$+ \int_{t_1}^{t_2} \|\varphi(t) - \varphi\|_N \, \|Q(t)\varphi - Q_0\varphi\|_{N^*}\,dt, \quad y(t) = \|\varphi(t) - \varphi\|_H^2$$

Из (3.1) неравенства Гельдера с ε и леммы 1 следует

$$y(t_2) - y(t_1) \leqslant -a\int_{t_1}^{t_2}(y(t)^{m/2+1} - \gamma(t))\,dt \tag{3.2}$$

$$a > 0, \quad \gamma(t) \in C[0, \infty], \quad \gamma(t) \geqslant 0$$

Из (3.2) следует, что $y(t)$ не может быть строго больше любого ε при $t \in [0, \infty]$. Если $y(t)$ не стремится к нулю при $t \to \infty$, то найдется последовательность интервалов $[t_1^i, t_2^i]$, такая, что $\varepsilon = y(t_1^i) = y(t_2^i)$, $y(t) > \varepsilon$ при $t \in (t_1^i, t_2^i)$. Причем i либо принимает значения от 0 до ∞, либо меняется от 0 до k. В первом случае $t_{1,2}^i \to \infty$ при $i \to \infty$, а во втором — $t_1^k < \infty$, $t_2^k = \infty$. Предположение о существовании таких интервалов противоречит неравенству (3.2). Действительно, беря $t_1 = t_1^i$, а $t_2 \in (t_1^i, t_2^i)$ при достаточно большом (или последнем) i, из (3.2) в силу стремления $\gamma(t) \to 0$ при $t \to \infty$ получим противоречие

$$\varepsilon < y(t_2) < y(t_1) < \varepsilon$$

При не зависящей от t величине Q из (3.2) следует, что $y(t) \to 0$ монотонно.

Для задачи (2.8) доказательство аналогично.

4. Приближенные методы решения, их сходимость. Все приближенные методы могут быть обоснованы по единой схеме. Поэтому остановимся для примера на одном из них — наиболее применимом в настоящее время в теории упругости и пластичности — методе конечных элементов. Для этого построим регулярное разбиение области на совокупность Ω_h конечных элементов. Под регулярным разбиением понимаем такое разбиение, что соседние элементы имеют либо общую вершину, либо общую сторону и могут быть неособым преобразованием отображены на равнобедренный прямоугольный треугольник.

Допустим, что на Ω_h заданы кусочно-полиномиальные функции $\varphi_{ij} \in N$ (i, j — номер узла), отличные от нуля лишь в элементах, содержащих данный узел i, j. Будем искать p-е приближение в виде

$$\varphi^{(p)} = \sum_{i,j\in\Omega_h} c_{ij}^p \varphi_{ij} \tag{4.1}$$

где коэффициенты c_{ij}^p определяются из системы уравнений

$$\langle Q_0\varphi^{(p)}, \varphi_{ij}\rangle = 0, \qquad i, j \in \Omega_h \tag{4.2}$$

В силу (2.12) система (4.2) однозначно разрешима, причем $\|\varphi^{(p)}\|_N \leqslant$ $\leqslant c(p)$.

Подставим в неравенство (2.12) $\varphi_1 = \varphi$, $\varphi_2 = \varphi^{(p)}$. Тогда для произвольных коэффициентов d_{ij} получим

$$\left\langle Q_0\varphi^{(p)}, \sum_{i,j\subset\Omega_h} d_{ij}\varphi_{ij} - \varphi\right\rangle \geqslant \frac{c_1}{12(\sqrt{2})^m}\|\varphi^{(p)} - \varphi\|_N^{m+2}$$

Отсюда из ограниченности Q_0 следует

$$\left\|\varphi - \sum_{i,j} d_{ij}\varphi_{ij}\right\|_N \geqslant c\|\varphi\|^{(p)} - \varphi\|_N^{m+2}$$

Поэтому сходимость $\varphi^{(p)}$ к φ следует из возможности аппроксимации φ опорными функциями. Скорость сходимости зависит от выбора функций φ_{ij} и гладкости решения φ (подробнее см. [7]).

Построим алгоритм решения системы (4.2). Так как

$$\sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha \varphi^{(p)}| \leqslant c$$

то $\varphi^{(p)}$ будет по-прежнему оставаться решением системы (4.2), если $f_0(T)$ в этой системе заменить срезкой

$$\bar f_0(T) = \begin{cases} f_0(T), & T \leqslant \bar T = 5 \sup \sum\limits_{|\alpha|=2} |D^\alpha (F_0 + \varphi^{(p)})| \\ f_0(\bar T), & T \geqslant \bar T \end{cases} \tag{4.3}$$

ибо монотонность функции $\bar f_0(T)$ гарантирует однозначную разрешимость измененной системы, а $\varphi^{(p)}$ ей удовлетворяет автоматически. Оператор, соответствующий срезанной функции, будем обозначать через $\bar Q_0$. Будем считать, что $c_{ij}{}^p = c_{ij}(t)$ и $c_{ij}{}^p(0) = 0$, и рассмотрим уравнение

$$d\varphi^{(p)}(t) / dt + \bar Q_0 \varphi^{(p)}(t) = 0 \tag{4.4}$$

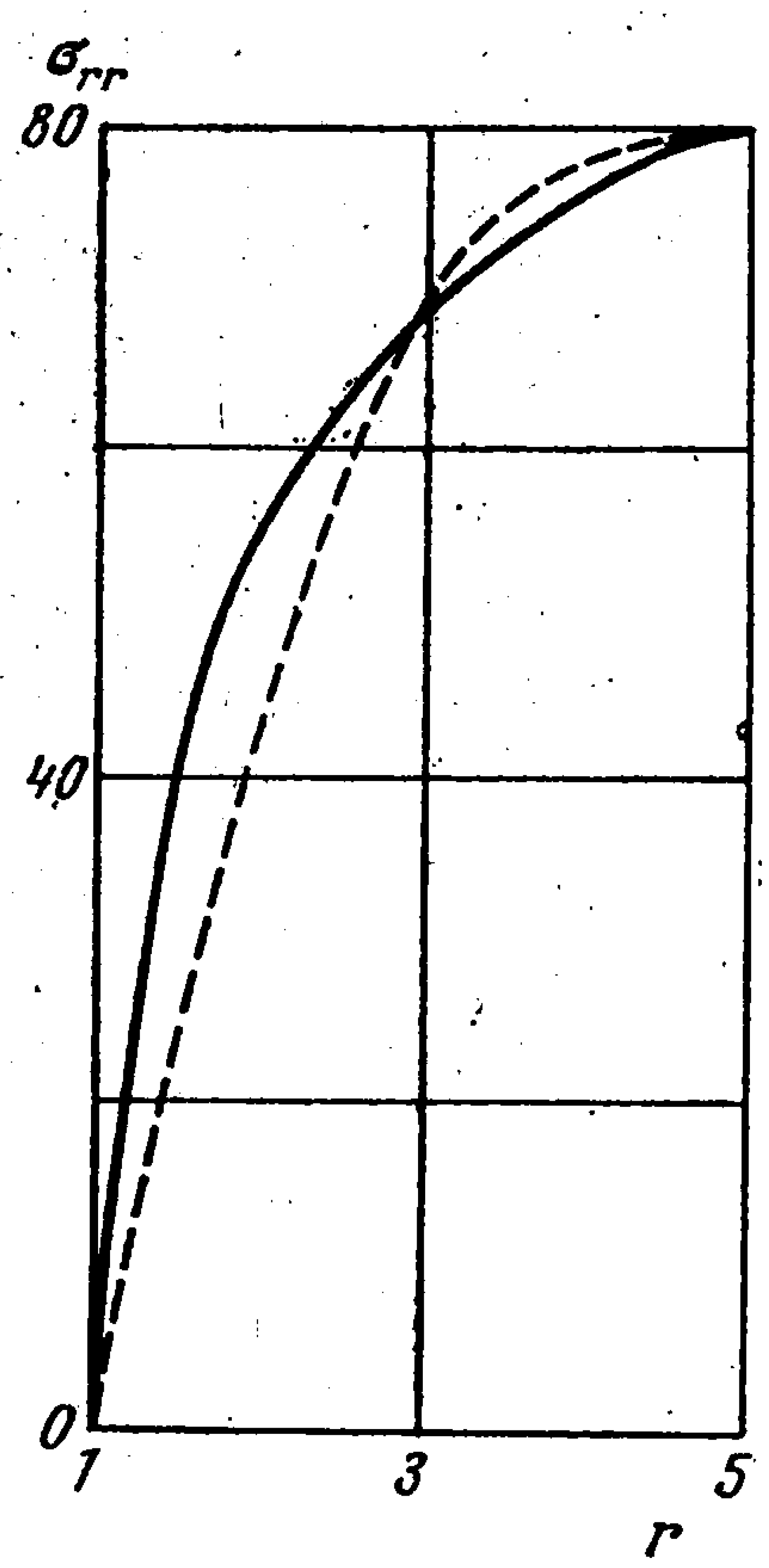
Из результатов п. 3 следует монотонное стремление $\varphi^{(p)}_{(t)}$ к $\varphi^{(p)}$ в H при $t \to \infty$. Поэтому достаточно уметь решать (4.4) на любом промежутке $[0, t_0]$. Будем решать уравнение (4.4) по явной схеме

$$\varphi^{(p)}((n+1)\tau) - \varphi^{(p)}(n\tau) = \tau \bar Q_0 \varphi^{(p)}_{(n\tau)} \tag{4.5}$$

После умножения скалярно в H (4.5) на $\varphi^{(p)}_{(n+1)\tau}$ и применения неравенства Гельдера с ε получим оценку

$$\|\varphi^{(p)}((n+1)\tau)\|_H \leqslant (1 + c\tau) \|\varphi^{(p)}_{(n\tau)}\|_H \tag{4.6}$$

откуда следует ограниченность $\|\varphi^{(p)}_{(n\tau)}$ при любом N и $n = 0, \ldots, N$.



Оценки (4.6) и ограниченности Q_0 в H достаточно для доказательства слабой сходимости $\varphi^{(p)}_{(n\tau)}$ в H к решению уравнения (4.4). По этой же схеме можно решать и нестационарную задачу (2.10) при дополнительном предположении гладкости, которая позволила бы сделать срезку (4.2).

Ниже приведены результаты численных расчетов.

В первом случае, когда Ω имеет вид кольца, у которого внутренняя граница свободна (естественное граничное условие), а к внешней приложена аксиально-симметричная нагрузка, на фигуре изображена зависимость σ_{rr} от r для упругого состояния (сплошная линия) и установившейся ползучести (пунктирная линия) при $f(T) = T^{2.6}$.

$y \backslash x$	0	4	8	12	16	20	$y \backslash x$	0	4	8	12	16	20
20	1625	1702	1942	2302	2724	3207	8	341	421	672	—	—	—
16	1104	1231	1525	1823	2314	—	4	35	182	—	—	—	—
12	702	783	1004	1417	—	—	0	18	—	—	—	—	—

Во втором случае рассматривается область квадратной формы $(x, y) \in [-20, 20] \times \times [-20, 20]$ с такими граничными условиями, для которых функция Эри упругого состояния имеет вид $F_0 - 0.1\,(60x^2 - x^3 + 60y^2 - y^3)$. В таблице приведены значения функции Эри для $y \geqslant x \geqslant 0$. В области $x \geqslant y \geqslant 0$ результаты симметричны относительно диагонали таблицы. На всю область функция Эри распространяется по четности.

Поступила 24 I 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. М., Физматгиз, 1960.
2. *Михлин С. Г.* Проблема минимума квадратичного функционала. М.— Л., Гостехиздат, 1952.
3. *Лионс.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М., «Мир», 1972.
4. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.
5. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические уравнения высших порядков. Киев, «Наукова думка», 1973.
6. *Маркус М., Минк Х.* Обзор по теории матриц и матричных неравенств. М., «Наука», 1972.
7. *Оганесян Л. А., Ривкинд В. Я., Руховец Л. А.* Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений, ч. 2. Вильнюс, 1974 г. (Ин-т физики и математики АН ЛитССР.)