

**НЕКОТОРЫЕ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПЛОСКОСТИ,  
ОСЛАБЛЕННОЙ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СИСТЕМОЙ КРУГЛЫХ  
ОТВЕРСТИЙ**

**В. М. Мирсалимов**

(Липецк)

Рассматриваются упругопластические задачи для плоскости, ослабленной бесконечным рядом круговых отверстий. Предполагается, что уровень напряжений и расстояние между отверстиями таковы, что круговые отверстия целиком охватываются соответствующей пластической зоной, но, в то же время, соседние пластические области не сливаются.

Упругопластическая задача для плоскости с одним отверстием была поставлена и решена в [1]. Периодическим упругопластическим задачам был посвящен ряд работ [2-4]. Упругопластические задачи для плоскости, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий, рассмотрены в [5,6].

В отличие от работ [2-4], в которых использовался метод малого параметра, для решения периодических упругопластических задач применяется другой метод, позволяющий, вообще говоря, получить решение при любых относительных размерах области.

Пусть имеется плоскость с круговыми отверстиями, имеющими радиус  $R$  ( $R < 1$ ) и центры в точках

$$P_m = m\omega \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots), \quad \omega = 2$$

Обозначим контур отверстия с центром в точке  $P_m$  через  $L_m$ , соответствующую упругопластическую границу через  $\Gamma_m$ , а внешность контуров  $\Gamma_m$  — через  $D_z$ .

На контуре отверстия  $L_m$  граничные условия имеют вид

$$(1) \quad \sigma_r = -p, \quad \tau_{r\theta} = 0$$

Будем считать, что поле напряжений в пластической зоне имеет вид ( $A$ ,  $B$  и  $C$  — некоторые постоянные величины)

$$(2) \quad \begin{aligned} \sigma_r &= A / r^2 + B (1 + 2 \ln r) + 2C \\ \sigma_\theta &= -A / r^2 + B (3 - 2 \ln r) + 2C, \quad \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned}$$

Осесимметричное поле напряжений (2), удовлетворяющее уравнениям равновесия, характеризуется тем, что соответствующим подбором постоянных позволяет удовлетворить некоторым условиям пластичности (см. ниже), учитывающим пластическую неоднородность, т. е. зависимость предела текучести от координаты  $r$  и от главных напряжений  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$ .

В то же время для такого поля напряжений применяемый метод, представляющий собой объединение метода решения периодической упругой задачи, с методом, предложенным в [1] для решения задач теории упругости и пластичности с неизвестной границей при одиночном отверстии, позволяет получить эффективное решение упругопластической задачи. В упругой области напряжения определяются по формулам Колосова — Мусхелишвили [7]

$$(3) \quad \begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= 4\operatorname{Re} \Phi(z) \\ \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} &= 2[\bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z)]e^{2i\theta} \end{aligned}$$

На неизвестном контуре  $\Gamma_m$ , разделяющем упругую и пластическую области, все напряжения непрерывны. Используя формулы (2) и (3), получим граничные условия на контуре  $\Gamma_m$

$$(4) \quad \begin{aligned} \operatorname{Re} \Phi(z) &= 1/2 B \ln z\bar{z} + B + C \\ \bar{z}\Phi'(z) + \Psi(z) &= B \frac{\bar{z}}{z} - \frac{A}{z^2} \end{aligned}$$

Перейдем на параметрическую плоскость  $\zeta$  с помощью преобразования  $z = \omega(\zeta)$ . Аналитическая функция  $z = \omega(\zeta)$  осуществляет конформное отображение области  $D_z$  на область  $D_\zeta$  в плоскости  $\zeta$ , являющуюся внешностью окружностей  $l_m$  радиуса  $\lambda$ , с центрами в точках  $P_m$ .

Для определения трех аналитических функций  $\varphi(\zeta) = \Phi[\omega(\zeta)]$ ,  $\psi(\zeta) = \Psi[\omega(\zeta)]$  и  $\omega(\zeta)$  получаем нелинейную краевую задачу на  $l_m$

$$(5) \quad \operatorname{Re} \varphi(\zeta) = B + C + 1/2 B \ln \omega(\zeta) \overline{\omega(\zeta)}$$

$$(6) \quad \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega'(\zeta)} \varphi'(\zeta) + \psi(\zeta) = B \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\omega(\zeta)} - \frac{A}{[\omega(\zeta)]^2}$$

Решая задачу Дирихле (5), найдем, что в области  $D_\zeta$

$$(7) \quad \varphi(\zeta) = B + C + B \ln \omega(\zeta) - B \ln \frac{\zeta}{\lambda}$$

Учитывая (7), граничное условие (6) можно преобразовать к виду

$$(8) \quad \omega'(\zeta) \omega^2(\zeta) \psi(\zeta) = B \frac{\overline{\omega(\zeta)}}{\zeta} \omega^2(\zeta) - A \omega'(\zeta)$$

Искомые функции  $\varphi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  и  $\omega(\zeta)$  ищем в виде рядов

$$(9) \quad \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!} \\ \psi(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k)}(\zeta)}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} s^{(2k+1)}(\zeta)}{(2k+1)!} \\ \omega(\zeta) &= \zeta + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2} \rho^{(2k-1)}(\zeta)}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

Здесь

$$\rho(\zeta) = \left(\frac{\pi'}{\omega}\right)^2 \sin^{-2}\left(\frac{\pi}{\omega}\zeta\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega}\right)^2$$

$$S(\zeta) = \sum_m \left[ \frac{P_m}{(\zeta - P_m)^2} - \frac{2\zeta}{P_m^2} - \frac{1}{P_m} \right]$$

Знак штрих у суммы означает, что при суммировании исключается индекс  $m = 0$ .

Приведем зависимости, которым должны удовлетворять коэффициенты выражений (9). Из условий симметрии относительно координатных осей, находим, что

$$(10) \quad \text{Im } \alpha_{2k+2} = \text{Im } \beta_{2k+2} = \text{Im } A_{2k+2} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Нетрудно убедиться, что соотношения (9), (10) определяют класс симметричных задач с периодическим распределением напряжений.

Из условия равенства нулю главного вектора сил, действующих на дугу, соединяющие две конгруэнтные точки в  $D_\zeta$ , следует, что

$$\alpha_0 = 1/24 \pi^2 \beta_2 \lambda^2$$

В силу условий периодичности система граничных условий (8) на  $l_m$  ( $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) заменяется одним функциональным уравнением, например на контуре  $l_0$ .

Для составления уравнений относительно остальных коэффициентов выражений (9) функций  $\varphi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  и  $\omega(\zeta)$  разложим эти функции в ряды Лорана в окрестности точки  $\zeta = 0$

$$(11) \quad \begin{aligned} \varphi(\zeta) &= \alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{\zeta^{2k+2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k} \zeta^{2j} \\ \psi(\zeta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{\zeta^{2k+2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} r_{j,k} \zeta^{2j} - \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} (2k+2) \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} (2j+2k+2) r_{j,k} \zeta^{2j} \\ \omega(\zeta) &= \zeta - \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2} \frac{\lambda^{2k+2}}{(2k+1) \zeta^{2k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2} \lambda^{2k+2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,k} \zeta^{2j+1}}{2j+1} \end{aligned}$$

Здесь

$$r_{j,k} = \frac{(2j+2k+1)! g_{j+k+1}}{[(2j)!(2k+1)! 2^{2j+2k+2}], \quad g_{j+k+1} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2j+2k+2}}$$

Подставив в граничные условия (5), (8) на контуре  $l_0$  ( $\zeta = \lambda e^{i\theta}$ ) вместо  $\varphi(\zeta)$ ,  $\psi(\zeta)$  и  $\omega(\zeta)$  их разложения (11) и сравнивая коэффициенты при  $e^{2ik\theta}$  ( $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ), получим бесконечную систему нелинейных алгебраических уравнений относительно  $\alpha_{2k}$ ,  $\beta_{2k}$ ,  $A_{2k}$  (условие (5) было предварительно продифференцировано по  $\theta$ ). Ниже приводятся уравнения первого приближения

$$XD + YD_2 + ZD_1 = B(Da - A_2D_1 + a_1D_2) - \frac{Aa}{\lambda^2}$$

$$XD_1 + YD = B(Da_1 + aD_1) - \frac{AA_2}{\lambda^2}$$

$$XD_2 + ZD = B(D_2a - A_2D) - AA_2\lambda^2 r_{1,0}$$

$$2\alpha_2(1 + \lambda^4 r_{1,0})d = Bd_1$$

$$\begin{aligned}
 X &= a\beta_2 + A_2\beta_4\lambda^4 r_{1,0} + A_2\gamma_0, & Y &= a\beta_4 + A_2\beta_2 \\
 Z &= a\gamma_0 + A_2\gamma_1 + A_2\beta_2\lambda^4 r_{1,0}, & a &= 1 + A_2\lambda^2 r_{0,0} \\
 D &= a^2 - \frac{2}{3} A_2^2 \lambda^4 r_{0,1}, & D_1 &= -2aA_2 \\
 D_2 &= \frac{2}{3} A_2 \lambda^4 r_{0,1}, & a_1 &= \frac{1}{3} A_2 \lambda^4 r_{1,0} \\
 d &= a^2 + A_2^2 (1 + \frac{1}{9} \lambda^8 r_{1,0}^2), & d_1 &= -2aA_2 (1 - \frac{1}{3} \lambda^4 r_{1,0}) \\
 \gamma_j &= \beta_2 r_{j,0} \lambda^{2j+2} + \beta_4 r_{j,1} \lambda^{2j+4} - 2(2j+2) \alpha_2 \lambda^{2j+2} r_{j,0} \quad (j=0,1)
 \end{aligned}$$

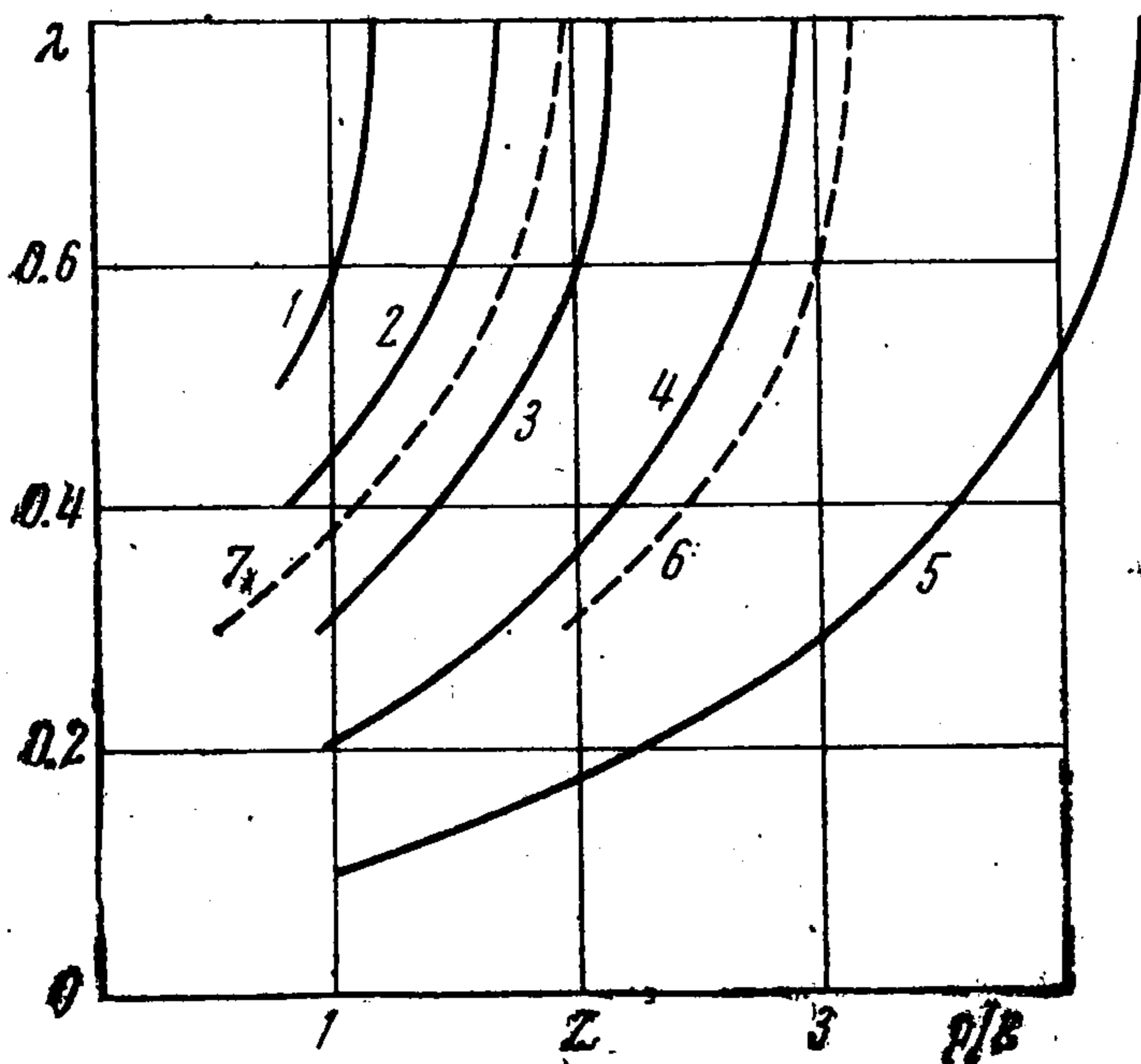
Для получения соотношения, связывающего параметр  $\lambda$  с приложенной нагрузкой  $p$ , подставим первую и третью формулы (9) в краевое условие (5), умножим полученное выражение на  $1/2\pi i \zeta$  и проинтегрируем по круговому контуру  $l_0$ . В результате получим [7]

$$\alpha_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_{2k+2} \lambda^{2k+2} r_{0,k} = B + C + B \ln \lambda \left[ 1 + \sum_{k=0}^{\infty} A_{2k+2} \lambda^{2k+2} r_{0,k} \right]$$

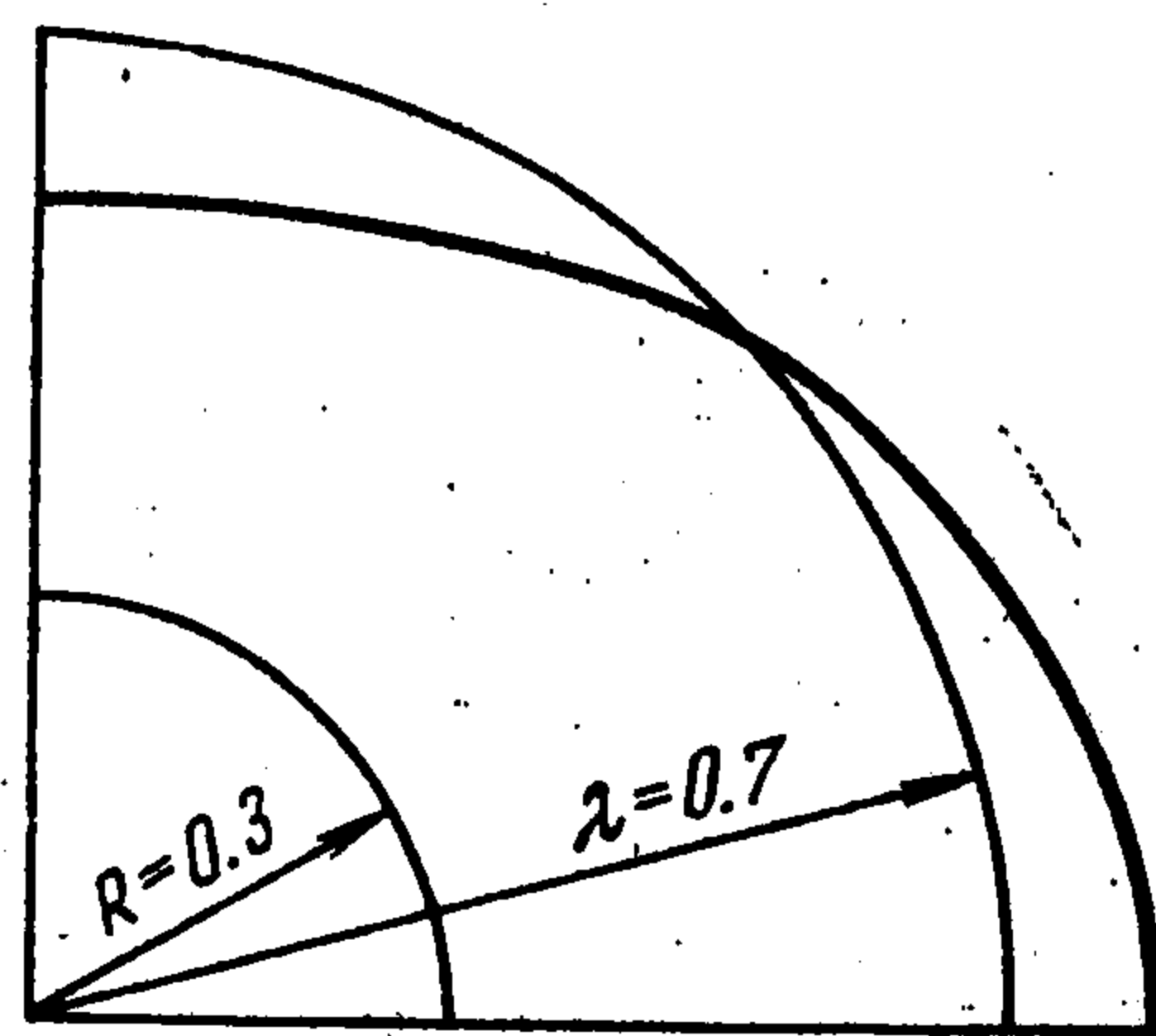
Граничные условия на контуре отверстия  $L_m$  (1) и условия текучести определяют величины  $A$ ,  $B$  и  $C$ .

Рассмотрим некоторые частные случаи.

*Условие пластичности Треска — Сен-Венана или Губера — Мизеса.* Пусть в пластической зоне выполняются соотношения  $|\sigma_\theta - \sigma_r| = 2k$



Фиг. 1



Фиг. 2

( $k$  — постоянная пластичности). В этом случае, согласно (1), (2), имеем

$$A = 0, \quad B = \epsilon k, \quad 2C = -p - \epsilon k (1 + 2 \ln R)$$

Здесь  $\epsilon = \pm 1$  выбирается из физических соображений. Результаты расчета в первых двух приближениях даны в табл. 1. На фиг. 1 сплошными линиями представлены зависимости параметра  $\lambda$  от величины приложенной нагрузки  $p/k$  для значений радиуса отверстия  $R = 0.5, 0.4, 0.3, 0.2, 0.1$  (кривые 1—5).

*Неоднородно-пластический материал.* Пусть теперь условие пластичности имеет вид [8]

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2 \left[ k_0 + k_1 \left( \frac{R}{r} \right)^2 \right]$$

Здесь  $k_0$  и  $k_1$  — постоянные материала.

Таблица 1

$\lambda$	0.2	0.4	0.6	0.8
Первое приближение				
$\beta_2/k$	1.00060	1.00769	1.02267	1.05520
$\beta_4/k$	0.02908	0.08726	0.14352	0.20279
$A_2$	-0.02904	-0.08592	-0.13708	-0.18362
$\alpha_2/k$	0.02902	0.08502	0.13037	0.15692
Второе приближение				
$\beta_2/k$	1.00061	1.00758	1.02066	1.04468
$\beta_4/k$	0.02911	0.08783	0.14264	0.19617
$\beta_6/k$	0.00238	0.01821	0.02467	0.02734
$A_2$	-0.02903	-0.08549	-0.13500	-0.17599
$A_4$	-0.00155	-0.01048	-0.00477	0.00573
$\alpha_2/k$	0.29010	0.08460	0.12846	0.15130
$\alpha_4/k$	0.00010	0.00009	-0.00605	-0.01312

Таблица 2

$\lambda$	0.2	0.4	0.6	0.8
$\beta_2/k_0$	3.27270	1.60176	1.31016	1.23598
$\beta_4/k_0$	-0.33327	-0.01791	0.08694	0.16020
$\beta_6/k_0$	0.10828	0.08469	0.08332	0.08842
$A_2$	-0.09458	-0.13470	-0.17103	-0.20369
$A_4$	-0.00504	-0.01644	-0.00635	0.00494
$\alpha_2/k_0$	0.09394	0.13269	0.16259	0.17564
$\alpha_4/k_0$	-0.00273	-0.00317	-0.01059	-0.01715

Это условие пластичности можно рассматривать как обычное условие Треска — Сен-Венана с пределом текучести, зависящим от радиуса. В этом случае, согласно (1) и (2), имеем

$$A = -k_1 R^2, \quad B = k_0, \quad 2C = k_1 - k_0 - p - 2k_0 \ln R$$

Результаты расчета во втором приближении даны в табл. 2 для значения параметра неоднородности  $k_1 R^2 / k_0 = 0,09$ .

На фиг. 1 кривыми 6, 7 представлены зависимости параметра  $\lambda$  от величины  $p / k_0$  при  $R = 0,3$  для значений параметров неоднородности  $k_1 / k_0$ , равных 1 и -0,5 соответственно.

*Экспоненциальное условие текучести.* Пусть условие пластичности имеет вид

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2k \left[ 1 - \exp \left( -\frac{\sigma_0}{k} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2k} \right) \right]$$

Здесь  $k > 0$  и  $\sigma_0 > 0$  — постоянные материала, имеющие размерность напряжений.

Это условие текучести описывает предельное состояние некоторых горных пород [9]. В этом случае, согласно (1), (2), имеем

$$A = -ke^{-2t-2}R^2, \quad B = -k, \quad C = 1/2\sigma_0 - k \ln tR^{-1}$$

где  $t$  — постоянная, являющаяся корнем уравнения

$$k^{-1}(\sigma_0 + p) - 1 = e^{-2t-2} + 2 \ln t \quad (t > e^{-1})$$

*Более общие условия текучести.* Пусть имеют место следующие условия текучести в пластической зоне [10]:

$$\sigma_r - \sigma_\theta = 2 \left[ k + \frac{b}{r^2} - \frac{k}{r^\gamma} \exp \left( -\frac{\sigma_\theta}{k} + \frac{\sigma_r + \sigma_\theta}{2^{\gamma+1}k} \right) \right] \quad (\gamma = 0, 1)$$

В этом случае, согласно (1), (2), постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$  будут иметь значения

$$A = b - ke^{\gamma-2t-2}R^2, \quad B = -k, \quad C = 2^{\gamma-1} [\sigma_0 + k \ln (R^2t^{-2})]$$

Здесь  $t$  — постоянная, являющаяся корнем уравнения

$$k^{-1} \left( \sigma_0 + p + \frac{b}{R^2} \right) - 1 = e^{-2t-2} + 2 \ln t \quad (t > e^{-1}) \quad \text{при } \gamma = 0$$

$$k^{-1} \left( 2\sigma_0 + p + \frac{b}{R^2} \right) - 1 + 2 \ln R = 4 \ln t + e^{-1}t^{-2} \quad (t > e^{-1}) \quad \text{при } \gamma = 1$$

Положив в последнем соотношении (11)  $\zeta = \lambda e^{i\theta}$ , получим уравнение упругопластической границы  $r = |\omega(\lambda e^{i\theta})| = f(\theta)$ . В первом приближении  $r^2 = \lambda^2 (d + d_1 \cos 2\theta)$ , причем

$$(12) \quad r_{\max} = \lambda \left[ 1 + A_2 \left( -1 + \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r_{j,0}}{2j+1} \lambda^{2j} \right) \right]$$

$$(13) \quad r_{\min} = \lambda \left[ 1 + A_2 \left( 1 + \lambda^2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j r_{j,0}}{2j+1} \lambda^{2j} \right) \right]$$

На фиг. 2 упругопластическая граница (четверть контура) представлена при условии текучести Треска — Сен-Венана для случая  $R = 0.3$ ,  $p = 2.12k$  ( $\lambda = 0.7$ ,  $r_{\max} = 0.81$ ,  $r_{\min} = 0.58$ ).

Из условия  $r_{\min} \geq R$  определяется наименьшая нагрузка, при которой контур отверстия целиком охватывается пластической зоной. Соотношение (13) при  $r_{\max} \leq 1$  позволяет найти наибольшую нагрузку, при которой пластические зоны касаются одна другой.

До сих пор средние напряжения в плоскости принимались равными нулю. Пусть в плоскости имеют место средние напряжения (растяжение или сжатие на бесконечности)

$$\sigma_x = \sigma_x^\infty, \quad \sigma_y = \sigma_y^\infty, \quad \tau_{xy} = 0$$

В этом случае комплексные потенциалы отыскиваются в виде

$$\Phi_*(\zeta) = \frac{\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty}{4} + \varphi(\zeta), \quad \Psi_*(\zeta) = \frac{\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty}{2} + \psi(\zeta)$$

где  $\varphi(\zeta)$  и  $\psi(\zeta)$  определены первыми двумя соотношениями (9).

Автор благодарит Г. П. Черепанова за внимание к работе.

Поступила 18 XI 74

## ЛИТЕРАТУРА

1. Галин Л. А. Плоская упругопластическая задача. ПММ, 1946, т. 10, вып. 3.
2. Космодамианский А. С. Упругопластическая задача для изотропного массива, ослабленного бесконечным рядом одинаковых выработок. Изв. АН СССР, ОТН. Механика и машиностроение, 1961, № 4.
3. Аннин Б. Д. Двумерные упругопластические задачи. Новосибирск, Изд-во Новосиб. ун-та, 1968.
4. Мирсалимов В. М. О решениях упругопластических задач для плоскости с одно-периодической системой круговых отверстий. Докл. АН АзССР, 1973, т. 29, № 5.
5. Куршин Л. М., Суздальницкий И. Д. Упругопластическая задача для плоско-сти, ослабленной двоякопериодической системой круглых отверстий. ПММ, 1968, т. 32, вып. 3.
6. Мирсалимов В. М. Некоторые упругопластические задачи для плоскости, ослаб-ленной двоякопериодической системой круглых отверстий. ПМТФ, 1974, № 4.
7. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упру-гости. Изд. 5. М., «Наука», 1966.
8. Кузнецов А. И. Плоская деформация неоднородных пластических тел. Вестн. ЛГУ, Сер. матем., механ. и астрон., вып. 3, 1958, № 13.
9. Аннин Б. Д. Одна плоская упругопластическая задача при экспоненциальном условии текучести. Инж. ж. МТТ, 1966, № 3.
10. Рева Т. Л. О бигармонических решениях задач для упругопластических тел. Прикл. механ., 1971, т. 7, № 4.