Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 62—50

ОДНА ЗАДАЧА УКЛОНЕНИЯ ОТ МНОГИХ ПРЕСЛЕДОВАТЕЛЕЙ

Ф. Л. Черноусько

(Москва)

Показано, что управляемая точка, скорость которой ограничена по величине, может, оставаясь в окрестности заданного движения, избежать точной встречи с любым числом преследующих точек, скорости которых меньше скорости уклоняющейся точки. Построен способ управления, обеспечивающий уклонение от всех преследователей на конечное расстояние и сколько угодно мало отклоняющий движение точки от заданной прямой.

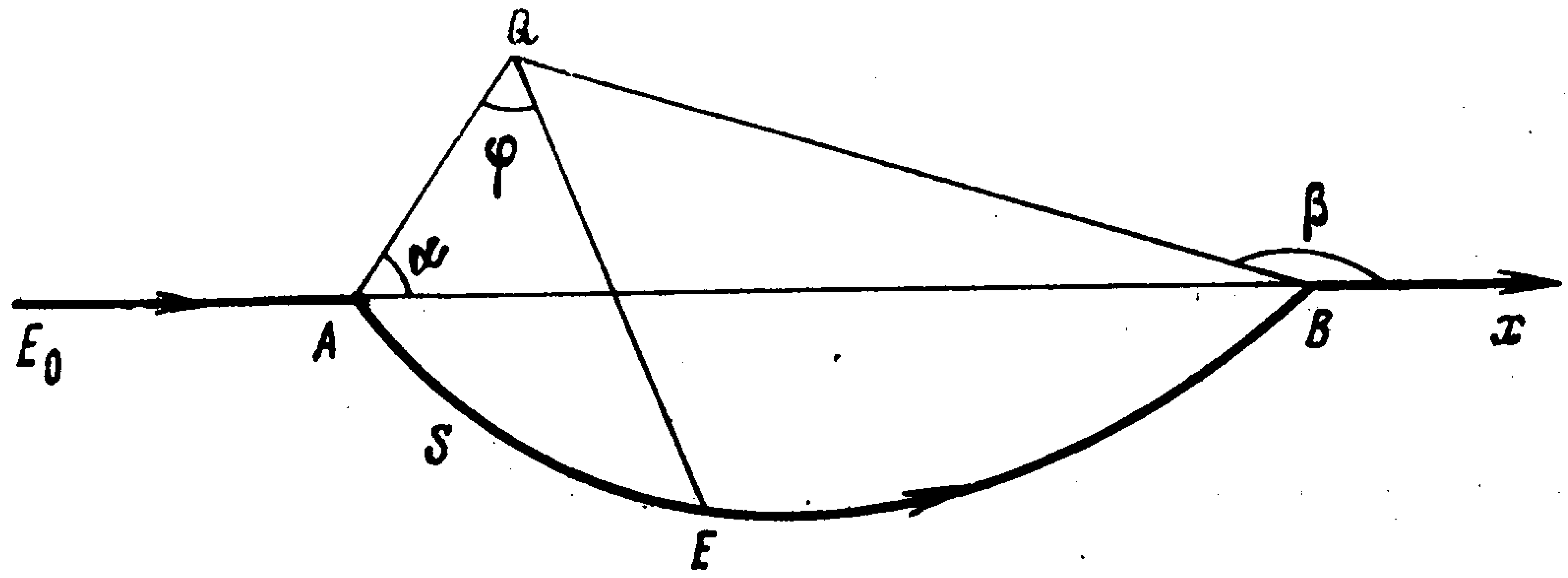
1. Постановка задачи. Рассмотрим движение одной уклоняющейся точки E и n преследующих точек $P_1, \ldots, P_n$ в m-мерном пространстве, $m > 1$. Скорости всех точек могут произвольно изменяться по направлению и ограничены по величине. Скорость точки E не превосходит константы v, а скорости всех преследователей $P_1, \ldots, P_n$ не превосходят kv, где k — постоянная, $0 < k < 1$.

В начальный момент времени $t = t_0$ точка E занимает положение E_0, не совпадающее ни с одной из точек $P_1, \ldots, P_n$. Задан луч x, проходящий через точку E_0, и число $\varepsilon > 0$. Движение точки E по лучу x со скоростью v будем называть номинальным. Требуется построить способ управления точкой E, при котором эта точка будет при всех $t \geqslant t_0$ находиться на ненулевом расстоянии от всех $P_1, \ldots, P_n$, оставаясь при этом в ε-окрестности номинального движения. Предполагается, что вектор скорости точки E в каждый момент времени t может выбираться в зависимости от положения точек E, $P_1, \ldots, P_n$ на интервале $[t_0, t]$, а также от констант v, k, ε и луча x. Для найденного способа управления требуется оценить минимальное расстояние δ от точки E до точек $P_1, \ldots, P_n$ при $t \geqslant t_0$.

Ниже построен способ управления, решающий поставленную задачу, и оценена для него величина δ. Траектория точки E при этом состоит из конечного числа дуг гладких кривых (логарифмических спиралей и отрезков луча x), а при достаточно больших t совпадает с лучом x. Для реализации движения достаточно знать положения точек $P_1, \ldots, P_n$ лишь в те моменты времени, когда они приближаются к точке E на определенные расстояния.

Без нарушения общности можно считать, что $m = 2$, т. е. движение происходит в плоскости. В самом деле, при $m > 2$ выберем произвольную плоскость, проходящую через луч x и будем считать, что точка E движется в этой плоскости, уклоняясь от проекций точек $P_1, \ldots, P_n$ на эту плоскость. Скорости проекций, очевидно, не превосходят kv. Если эта задача уклонения будет решена, то тем самым будет решена и исходная задача для $m > 2$. Поэтому ниже полагаем $m = 2$.

2. Уклонение от одной точки. Построим маневр уклонения точки E от одной преследующей точки P, при котором для всех $t \geqslant t_0$ выполнено неравенство $EP \geqslant L$. Здесь $L > 0$ — произвольное заданное число, не превосходящее расстояния EP в момент t_0. Движение точки E зададим



Фиг. 1

состоящим из трех участков; первый и второй участки могут быть и нулевой длины. Скорость точки E на всех участках постоянна и равна v. На первом участке $[t_0, t_A]$ точка E движется по лучу x от начальной точки E_0 до такой точки A, в которой впервые выполняется равенство $EP = L$. На втором участке $[t_A, t_B]$ точка E движется по дуге некоторой кривой AB, концы которой лежат на луче x, а на третьем участке $[t_B, \infty]$ — снова по лучу x от точки B до ∞.

Найдем кривую AB из условия, что неравенство $EP \geqslant L$ выполнено даже при отсутствии измерений положения точки P при $t > t_A$. Обозначим через Q положение точки P в момент t_A, через α — угол между лучом x и отрезком AQ, причем $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, через R — текущее расстояние QE, через φ — текущий угол между отрезками QE и QA, через s — длину дуги кривой AE, отсчитанную от точки A (см. фиг. 1). Так как скорость точки P не превосходит kv, то имеем

(2.1) $$EP \geqslant QE - kv\,(t - t_A) = R - ks$$

Условие $EP \geqslant L$ на дуге AB будет выполнено, если положить в (2.1)

(2.2) $$R - ks = L$$

Дифференцируя равенство (2.2), получим

(2.3) $$dR = kds = k\,(dR^2 + R^2 d\varphi^2)^{1/2}$$

Интегрируя дифференциальное уравнение (2.3) при начальном условии $R\,(0) = L$, найдем зависимость

(2.4) $$R\,(\varphi) = Le^{\lambda\varphi}$$

Здесь и далее используются обозначения

(2.5) $$\lambda = k\,(1 - k^2)^{-1/2} = \operatorname{ctg}\gamma, \quad k = \lambda\,(1 + \lambda^2)^{-1/2} = \cos\gamma$$
$$0 < \gamma < \pi/2$$

При помощи соотношений (2.4), (2.5) нетрудно доказать, что касательная к логарифмической спирали (2.4) в точке A образует угол $\pi - \gamma$ с отрезком $0A$. Поэтому в зависимости от значений $\alpha \in [0, \pi]$ может представиться два случая.

Если $\pi - \gamma \leqslant \alpha \leqslant \pi$, то спираль (2.3) для $\varphi > 0$ в окрестности точки A лежит по ту же сторону от луча x, что и точка Q. В этом случае будем полагать $B = A$, дуга AB стягивается в точку. Второй участок движения при этом отсутствует, и точка E все время движется по лучу x. При этом угол $\beta = QBx$ равен α и лежит в пределах $[\pi - \gamma, \pi]$.

В случае $0 \leqslant \alpha < \pi - \gamma$ спираль AB пересекается с лучом x в точке B (см. фиг. 1). Угол φ в точке B равен $\beta - \alpha$, где $\beta = \angle QBx$. Подставляя $\varphi = \beta - \alpha$ и равенство (2.4) в уравнение луча x в виде $R(\varphi)\sin(\varphi + \alpha) = L \sin \alpha$, получим трансцендентное уравнение для β

$$f(\beta) = f(\alpha), \quad f(\beta) = e^{\lambda\beta} \sin \beta, \quad \alpha < \beta \leqslant \pi \tag{2.6}$$

Функция $f(\beta)$ из (2.6) обращается в нуль на концах интервала $[0, \pi]$ и, как показывает исследование, монотонно возрастает на интервале $[0, \pi - \gamma]$ и монотонно убывает на интервале $[\pi - \gamma, \pi]$. Отсюда следует, что при $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi - \gamma$ уравнение (2.6) имеет в интервале $[\alpha, \pi]$ единственное решение $\beta > \alpha$, лежащее в пределах $\pi - \gamma < \beta \leqslant \pi$. Таким образом, в обоих случаях, т. е. при любом $\alpha \in [0, \pi]$, имеем, с учетом обозначений (2.5)

$$\pi - \gamma \leqslant \beta \leqslant \pi, \quad \cos \beta \leqslant -k \tag{2.7}$$

Для описанного маневра уклонения на первых двух участках ($t_0 \leqslant t \leqslant t_B$) неравенство $EP \geqslant L$ выполнено по построению. Для произвольного момента третьего участка $t > t_B$ имеем

$$\begin{aligned} EP &\geqslant QE - kv(t - t_A) = (QB^2 + EB^2 - 2EB \cdot QB \cos \beta)^{1/2} - \\ &- kv(t - t_B) - kv(t_B - t_A) \geqslant QB - EB \cos \beta - kEB - kS_{AB} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Длина S_{AB} дуги AB согласно (2.2) равна $k^{-1}(QB - L)$. Используя еще неравенство (2.7), получим из (2.8), что $EP \geqslant L$. Итак, построенный маневр во всех случаях обеспечивает неравенство $EP \geqslant L$ при всех $t \geqslant t_0$.

3. Маневр уклонения от n точек. Предлагаемый способ уклонения от n преследователей построим на основе маневра п. 2. Обозначим через δ_0 минимальное из расстояний $EP_1, \ldots, EP_n$ в момент t_0; по условию $\delta_0 > 0$. Движение точки E будет зависеть от параметров L и $\varkappa$, таких, что $0 < L \leqslant \delta_0$, $0 < \varkappa < 1$; эти параметры будут выбраны ниже. Введем обозначение $L_j = L\varkappa^{j-1}$ и назовем моментом j-го сближения такой момент t_j, когда впервые после начала движения выполняется условие

$$\min_i EP_i = L_j \equiv L\varkappa^{j-1}, \quad i = 1, \ldots, n, \; j = 1, 2, \ldots, 0 < \varkappa < 1 \tag{3.1}$$

Движение точки E зададим следующим образом: в каждый момент времени t точка E движется с постоянной по величине скоростью v по программной траектории для данного момента t. Определим понятие программной траектории для каждого момента $t \geqslant t_0$. Для любого $t \geqslant t_0$ текущая программная траектория представляет собой ориентированную кусочно-гладкую кривую без самопересечений, начинающуюся в точке текущего положения точки E в момент t и уходящую на бесконечность вдоль луча x. При $t = t_0$ программная траектория есть луч x. На интервалах $t_j < t < t_{j+1}$, $j = 0, 1, \ldots$ начало программной траектории перемещается вдоль нее вместе с точкой E; в остальном программная траектория здесь не меняется.

В моменты сближений t_j, $j = 1, 2, \ldots$ программная траектория перестраивается следующим образом. Обозначим через A_j, Q_j соответственно положения в момент t_j точки E и той из точек P_i, для которой достигается минимум в соотношении (3.1). Если минимум (3.1) при $t = t_j$ достигается одновременно для нескольких точек P_i, то в качестве Q_j берем для определенности ту из них, у которой номер i меньше. Проведем две L_j-спирали, уравнения которых имеют вид

$$R_j = L_j \exp(\lambda\varphi_j), \quad 0 \leqslant \varphi_j \leqslant \pi, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{3.2}$$

Здесь R_j — текущее расстояние от точки Q_j; φ_j — полярный угол, отсчитываемый от прямой Q_jA_j в двух противоположных направлениях для двух рассматриваемых спиралей. Дуги L_j-спиралей (3.2) зеркально-симметричны одна другой относительно отрезка Q_jA_j и имеют общие концы при $\varphi_j = 0$ и $\varphi_j = \pi$.

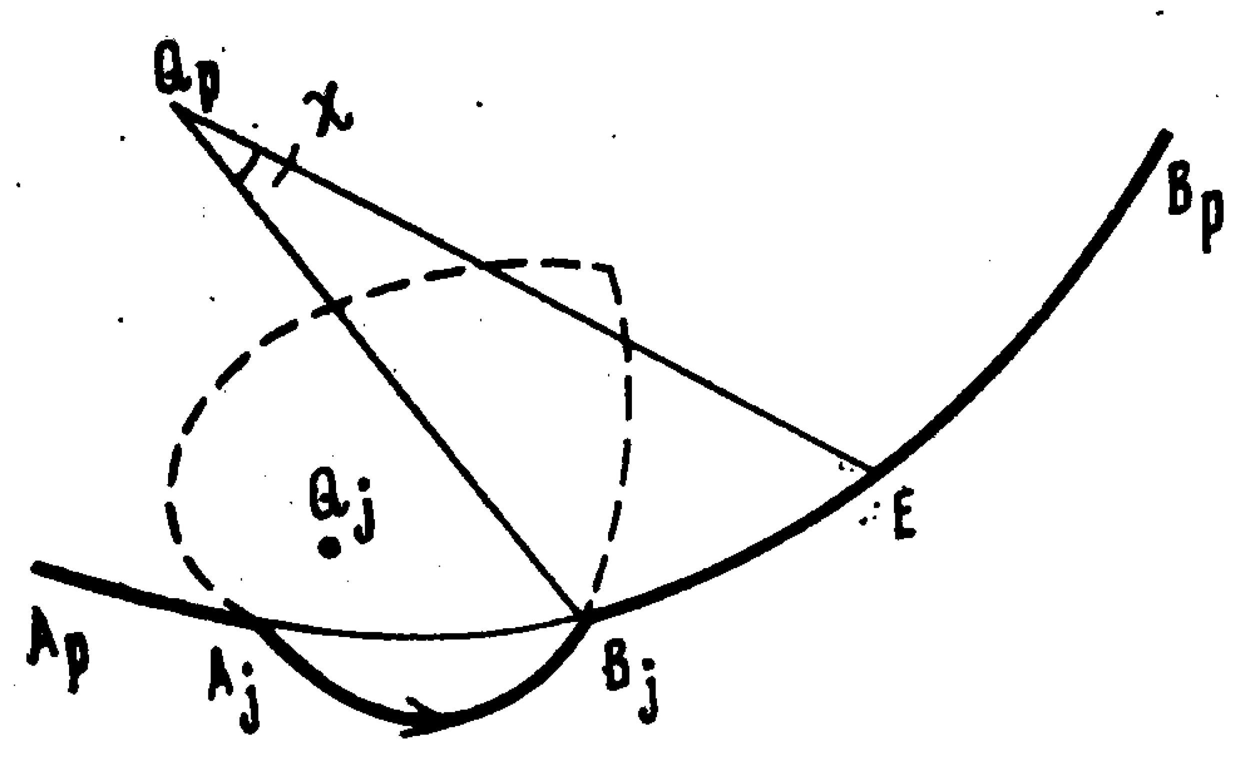
Пусть программная траектория при $t = t_j - 0$ построена и начинается в точке A_j. Если программная траектория для $t = t_j - 0$ не имеет с построенными L_j-спиралями (3.2) других общих точек, кроме A_j, то программная траектория для $t = t_j + 0$ будет той же, что и для $t = t_j - 0$.

В противном случае обозначим через B_j точку первого после A_j пересечения программной траектории, отвечающей $t_j - 0$, с замкнутой кривой, образованной дугами L_j-спиралей (3.2). Программной траекторией, отвечающей $t = t_j + 0$, будет кривая, составленная из дуги A_jB_j той из L_j-спиралей, которая содержит точку B_j, и из оставшейся части программной траектории для $t_j - 0$, начиная с точки B_j.

Описанный процесс рекуррентным образом определяет программную траекторию для любого момента времени $t \geqslant t_0$ при любом конечном числе сближений. При $t \in (t_j, t_{j+1})$ программная траектория по построению состоит из дуг L_j, L_{j-1}, ..., L_1-спиралей, соединенных в порядке уменьшения индекса, и из части луча x, включающей бесконечно удаленную точку. Дуги всех спиралей отвечают полярным углам $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, а некоторые дуги могут отсутствовать. Построение программной траектории в любой момент времени полностью определяет и способ управления точкой E. Реальная траектория точки E будет состоять из дуг L_j-спиралей и из части луча x, и для ее осуществления достаточно измерять положение точек P_i лишь в моменты сближений. Осталось выбрать параметры L, $\varkappa$ так, чтобы обеспечить конечность числа сближений и уклонение точки

E от всех $P_1, \ldots, P_n$ при сохранении ее движения в ε-окрестности номинального движения.

4. Оценка расстояний. Сначала получим некоторые оценки. Пусть непосредственно перед j-м сближением $(t = t_j - 0)$, $j \geqslant 1$ программная траектория начинается с дуги L_p-спирали, $p \leqslant j - 1$, имеющей ненулевую длину, за которой следует дуга L_q-спирали, $q \leqslant p - 1$. На фиг. 2 изображена дуга A_pB_p L_p-спирали с полюсом Q_p и дуги двух L_j-спиралей с полюсом Q_j. В результате построений п. 3 получена программная траектория для момента $t = t_j + 0$, участок которой $A_jB_jB_p$ изображен на фиг. 2 жирной линией со стрелками. Оценим при $t \geqslant t_j$ расстояние EP_i от точки E до той точки P_i, с которой произошло j-е сближение. Предположим сначала, что очередное $(j + 1)$-е сближение не наступает, пока точка E движется по участку $A_jB_jB_p$ программной траектории.



Фиг. 2

На дуге A_jB_j L_j-спирали имеем $EP_i \geqslant L_j$ согласно свойству логарифмической спирали (см. п. 2). Оценим двумя способами расстояние EP_i при движении точки E по дуге B_jB_p.

Введем в рассмотрение точку E', движущуюся с постоянной скоростью v по прямой A_jB_j от точки B_j в сторону, противоположную A_j. При этом пусть точка E' находится в B_j в тот же момент t', что и точка E. Применяя к точкам E' и P_i рассуждения, приведенные в конце п. 2 для точек E и P, получим, что $E'P_i \geqslant L_j$ при $t \geqslant t'$. Согласно неравенству треугольника имеем

$$(4.1)\qquad EP_i \geqslant E'P_i - EE' \geqslant L_j - EE'$$

Поскольку точки E и E' имеют одинаковую по величине скорость v и совпадают в момент t', получим

$$(4.2)\qquad EE' = \left| v \int_{t'}^{t} [\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}']\, dt \right|, \quad t \geqslant t'$$

Здесь $\mathbf{e}'$ — орт прямой A_jB_j, $\mathbf{e}(t)$ — орт касательной к дуге B_jB_p. Обозначим через s текущую длину дуги кривой B_jB_p, отсчитанную от точки B_j. Имеем

$$(4.3)\qquad |\mathbf{e}(t) - \mathbf{e}'| = \left| \mathbf{e}(t') - \mathbf{e}' + \int_{t'}^{t} \frac{d\mathbf{e}}{dt} dt \right| \leqslant |\mathbf{e}(t') - \mathbf{e}'| + \int_{0}^{s} \left| \frac{d\mathbf{e}}{ds} \right| ds$$

Орт $\mathbf{e}'$ секущей A_jB_j равен орту касательной в некоторой точке L_p-спирали, лежащей между A_j и B_j. Обозначая через s' длину дуги L_p-

спирали от этой промежуточной точки до точки B_j, получим из (4.3)

$$(4.4)\qquad |\mathbf{e}(t)-\mathbf{e}'| \leqslant \int_0^{s'} \left|\frac{d\mathbf{e}}{ds}\right| ds + \int_0^{s} \left|\frac{d\mathbf{e}}{ds}\right| ds \leqslant \frac{s+s'}{\rho_m} < \frac{s+s''}{\rho_m}$$

Здесь использовано неравенство $|d\mathbf{e}/ds| \leqslant \rho_m^{-1}$, где ρ_m — минимальный радиус кривизны L_p-спирали, а через s'' обозначена длина дуги A_jB_j этой спирали. Радиус кривизны L_p-спирали, определяемой уравнением (3.2), равен

$$\rho = (R^2 + R_\varphi^2)^{3/2}(R^2 + 2R_\varphi^2 - RR_{\varphi\varphi})^{-1} = L_p(\lambda^2+1)^{1/2}e^{\lambda\varphi}$$

Здесь индексы φ означают дифференцирование по φ_p, а индекс p опущен.

Минимальное при $\varphi \geqslant 0$ значение радиуса кривизны равно

$$(4.5)\qquad \rho_m = L_p\sqrt{\lambda^2+1}$$

Длину s'' дуги A_jB_j L_p-спирали оценим при помощи соотношения (2.2) для L_p-спирали и неравенства треугольника

$$(4.6)\qquad s'' = (Q_pB_j - Q_pA_j)k^{-1} \leqslant A_jB_jk^{-1} \leqslant (Q_jB_j + Q_jA_j)k^{-1} \leqslant \leqslant L_jk^{-1}(e^{\lambda\pi}+1)$$

В оценках (4.6) использованы соотношения

$$(4.7)\qquad Q_jA_j = L_j, \quad Q_jB_j \leqslant L_je^{\lambda\pi}$$

вытекающие из (3.2). Подставляя неравенство (4.4) в (4.2) и интегрируя, получим

$$(4.8)\qquad EE' < (1/2 s^2 + ss'')/\rho_m$$

Вставляя в неравенство (4.1) соотношения (4.8), (4.5), (4.6) и пользуясь обозначениями (2.5), найдем

$$(4.9)\qquad EP_i > L_j - L_p^{-1}a_1s^2 - L_jL_p^{-1}a_2s, \quad s \geqslant 0$$
$$a_1 = 1/2(\lambda^2+1)^{-1/2}, \quad a_2 = \lambda^{-1}(e^{\lambda\pi}+1)$$

Для оценки расстояния EP_i другим способом отметим, что при $t = t_j$ точка P_i занимает положение Q_j, а ее скорость не превосходит kv. Поэтому

$$(4.10)\qquad EP_i \geqslant Q_jE - Q_jP_i \geqslant (B_jE - Q_jB_j) - kv(t-t_j) \geqslant \geqslant B_jE - L_je^{\lambda\pi} - k(s_j + s)$$

Здесь дважды использовано неравенство треугольника для оценки EP_i и Q_jE, а также неравенство (4.7) для Q_jB_j. Через s_j обозначена длина дуги A_jB_j L_j-спирали. Оценим ее, учитывая равенство (2.2) и оценки (4.7)

$$(4.11)\qquad s_j = k^{-1}(Q_jB_j - Q_jA_j) \leqslant L_jk^{-1}(e^{\lambda\pi}-1)$$

Обозначая для сокращения записи

$$R = Q_pE, \quad R_* = Q_pB_j, \quad \chi = \angle B_jQ_pE$$

и пользуясь равенствами $R = R_*e^{\lambda\chi} = R_* + ks$, вытекающими из соотношений (3.2), (2.2) для L_p-спирали, получим (см. фиг. 2)

$$(4.12) \quad B_jE = (R^2 + R_*^2 - 2RR_*\cos\chi)^{1/2} = (R - R_*)\,[1 + 4\sin^2(\chi/2)\,RR_*\,(R - R_*)^{-2}]^{1/2} = ks\,[1 + 4\sin^2(\chi/2)\,e^{\lambda\chi}\times(e^{\lambda\chi} - 1)^{-2}]^{1/2} = ks\,[1 + \sin^2(\chi/2)\,\mathrm{sh}^{-2}(\lambda\chi/2)]^{1/2} \quad (0 \leqslant \chi \leqslant \pi)$$

Легко проверить дифференцированием, что на интервале $0 \leqslant \chi \leqslant \pi$ функция $\sin(\chi/2)\,\mathrm{sh}^{-1}(\lambda\chi/2)$ при любом $\lambda > 0$ монотонно убывает и поэтому ее минимум достигается при $\chi = \pi$. Тогда из (4.12) получим

$$(4.13) \quad B_jE \geqslant ks\,[1 + \mathrm{sh}^{-2}(\lambda\pi/2)]^{1/2} = ks\,\mathrm{cth}\,(\lambda\pi/2)$$

Вставляя неравенства (4.11), (4.13) в неравенство (4.10) и используя обозначения (2.5), найдем

$$(4.14) \quad EP_i \geqslant a_3s - a_4L_j, \quad s \geqslant 0$$

$$a_3 = k\,[\mathrm{cth}\,(\lambda\pi/2) - 1] = 2\lambda\,(1 + \lambda^2)^{-1/2}\,(e^{\lambda\pi} - 1)^{-1}$$

$$a_4 = 2e^{\lambda\pi} - 1 > 1$$

Сопоставляя обе оценки (4.9), (4.14), получим

$$(4.15) \quad EP_i \geqslant \max\,[f_1(s),\ f_2(s)] \geqslant \min_{s\geqslant 0}\max\,[f_1(s),\ f_2(s)]$$

$$f_1(s) = L_j - L_p^{-1}a_1s^2 - L_jL_p^{-1}a_2s, \quad f_2(s) = a_3s - a_4L_j$$

Функция $f_1(s)$ монотонно убывает, а $f_2(s)$ монотонно возрастает с ростом s при $s \geqslant 0$, причем $f_1(0) > 0$, $f_2(0) < 0$. Минимум в (4.15) достигается при таком $s_* > 0$, для которого

$$(4.16) \quad f_1(s_*) = f_2(s_*), \quad EP_i \geqslant f_2(s_*) = L_j\mu$$

Здесь μ — безразмерная величина, введенная последним соотношением (4.16). Из этого соотношения, используя (4.15), выразим

$$(4.17) \quad s_* = L_j\,(a_4 + \mu)\,a_3^{-1}$$

Подставим в первое уравнение (4.16) равенство (4.17) и выражения (4.15) для f_1, f_2, а затем разрешим полученное уравнение относительно L_j. Получим

$$(4.18) \quad \frac{L_j}{L_p} = g(\mu), \quad g(\mu) = \frac{a_3^2\,(1 - \mu)}{(a_4 + \mu)\,(a_1a_4 + a_2a_3 + a_1\mu)}$$

Функция $g(\mu)$ строго убывает на интервале $[0, 1]$, следовательно, существует обратная функция g^{-1}, непрерывная и строго убывающая на интервале $[0, g(0)]$. Поэтому, учитывая еще соотношения (3.1) и неравенство $j - p \geqslant 1$, получим

$$(4.19) \quad \mu = g^{-1}(\varkappa^{j-p}) \geqslant g^{-1}(\varkappa), \quad 0 < \varkappa < g(0)$$

Заметим, что из соотношений (4.18), (4.9), (4.14) следует

$$g(0) < a_3^2 a_4^{-2} a_1^{-1} < a_3^2 a_1^{-1} = 8\lambda^2 (1 + \lambda^2)^{-1/2} (e^{\lambda\pi} - 1)^{-2} < $$
$$< 8 [\lambda / (e^{\lambda\pi} - 1)]^2 < 8\pi^{-2} < 1 \quad (\lambda > 0)$$

Подставляя неравенство (4.19) в (4.16), будем иметь

$$EP_i \geqslant L_j g^{-1}(\varkappa) \tag{4.20}$$

Итак, для любого $\varkappa$ из интервала

$$0 < \varkappa < g(0) < 1 \tag{4.21}$$

справедлива оценка (4.20) при движении точки E по дуге B_jB_p. Так как при условиях (4.21) имеем $g^{-1}(\varkappa) < 1$, то неравенство (4.20) справедливо также и при движении по дуге A_jB_j L_j-спирали, где $EP_i \geqslant L_j$. Выполнение условий (4.21) гарантирует оценку (4.20) при движении точки E от A_j до ее выхода в точке B_p на дугу L_q-спирали, $q \leqslant p - 1$. Это утверждение справедливо, конечно, и в том случае, когда одна или обе из дуг A_jB_j, B_jB_p — нулевые.

Выше предполагалось, что при движении точки E по участку $A_jB_jB_p$ не происходит очередного $(j + 1)$-го сближения. Теперь откажемся от этого предположения. Пусть точка E после момента t_j испытывает сближения с точками $P_1, \ldots, P_n$, и $\nu(t) \geqslant 0$ — число этих сближений на интервале (t_j, t). Через τ обозначим такой момент времени, когда точка E впервые выходит на программную траекторию, соответствующую моменту $t_j + 0$, после точки B_p. Другими словами, τ — первый после t_j момент выхода точки E на некоторую L_r-спираль, $r \leqslant q \leqslant p - 1$. Рассмотрим точку E_*, движущуюся со скоростью v по участку $A_jB_jB_p$ программной траектории. Пусть точка E_* в момент t_j совпадает с E и приходит в точку B_p в момент τ_*. Тогда, согласно неравенству треугольника и полученной оценке (4.20) для точки E_*, имеем

$$EP_i \geqslant E_*P_i - EE_* \geqslant L_j g^{-1}(\varkappa) - EE_*, \quad t_j \leqslant t \leqslant \tau_* \tag{4.22}$$

Оценим расстояние между точками E и E_*

$$EE_* = \left| \int_{t_j}^{t} [\mathbf{v}(t) - \mathbf{v}_*(t)]\, dt \right|, \quad t_j \leqslant t \leqslant \tau_* \tag{4.23}$$

Здесь $\mathbf{v}(t)$, $\mathbf{v}_*(t)$ — векторы скорости точек E, E_*, соответственно, равные по величине постоянной v. Для участков траектории точки E, принадлежащих траектории точки E_*, соответствующий вклад в интеграл (4.23) равен нулю. Для остальных участков интеграл (4.23) мажорируется их удвоенной суммарной длиной, т. е.

$$EE_* \leqslant 2\Sigma, \quad t_j \leqslant t \leqslant \tau_* \tag{4.24}$$

Здесь Σ — сумма дуг $L_{j+1}, \ldots, L_{j+\nu}$-спиралей, которую оценим при помощи неравенства (4.11) и формулы (3.1)

$$\Sigma \leqslant s_{j+1} + s_{j+2} + \ldots + s_{j+\nu} \leqslant L_j k^{-1} (e^{\lambda\pi} - 1) \varkappa (1 - \varkappa^\nu)(1 - \varkappa)^{-1} \tag{4.25}$$

Если $\tau \leqslant \tau_*$, то оценки (4.22), (4.24) справедливы на всем интервале $[t_j, \tau]$. Если же $\tau > \tau_*$, то требуется еще рассмотреть $t \in [\tau_*, \tau]$. Путь, пройденный точкой E за время $[t_j, t]$, не более чем на Σ превышает путь, пройденный точкой E_* за время $[t_j, \tau_*]$. Поэтому за время $t - \tau_*$ точка E пройдет путь не более Σ и $t - \tau_* \leqslant \Sigma / v$. За это время расстояние EP_i может уменьшиться не более чем на

$$v(1 + k)\cdot(t - \tau_*) \leqslant (1 + k)\Sigma$$

Вычитая эту величину из правой части неравенства (4.22) и используя неравенства (4.24), (4.25), получим искомую оценку

$$EP_i \geqslant L_j g^{-1}(\varkappa) - (3 + k)\Sigma \geqslant L_j[g^{-1}(\varkappa) - (3k^{-1} + 1)(e^{\lambda\pi} - 1)\varkappa(1 - \varkappa^\nu)(1 - \varkappa)^{-1}], \quad t_j \leqslant t \leqslant \tau \tag{4.26}$$

Отметим, что из формулы (4.25) вытекает ограниченность Σ и, следовательно, τ при $\nu \to \infty$.

5. Выбор параметров маневра. Потребуем, чтобы при всех целых ν выполнялось неравенство

$$g^{-1}(\varkappa) \geqslant (3k^{-1} + 1)(e^{\lambda\pi} - 1)\varkappa(1 - \varkappa^\nu)(1 - \varkappa)^{-1} + \varkappa^{\nu+1} \tag{5.1}$$

Из неравенства (4.26) при условии (5.1) следует $EP_i \geqslant L_{j+\nu+1}$ при всех $t_j \leqslant t \leqslant \tau$. Это означает, что среди сближений, происходящих в интервале (t_j, t), не будет сближения с точкой P_i. Поэтому при условии (5.1) на всем интервале (t_j, τ) не произойдет сближений с точкой P_i. Условие (5.1) перепишем в виде

$$g^{-1}(\varkappa) \geqslant b\varkappa - \varkappa^{\nu+1}(b - 1), \quad b = (3k^{-1} + 1)(e^{\lambda\pi} - 1)(1 - \varkappa)^{-1} \tag{5.2}$$

Оценим величину b, пользуясь формулами (2.5). Получим

$$b > 3k^{-1}\lambda\pi > 3\pi > 1$$

Поэтому неравенство (5.2) будет выполнено при всех $\nu \geqslant 0$, если оно выполнено при $\nu = 0$. Подставляя $\nu = 0$ в (5.2), получим условие $g^{-1}(\varkappa) \geqslant \varkappa$. Объединяя его с наложенным выше условием (4.21) и учитывая монотонность функции g, будем иметь

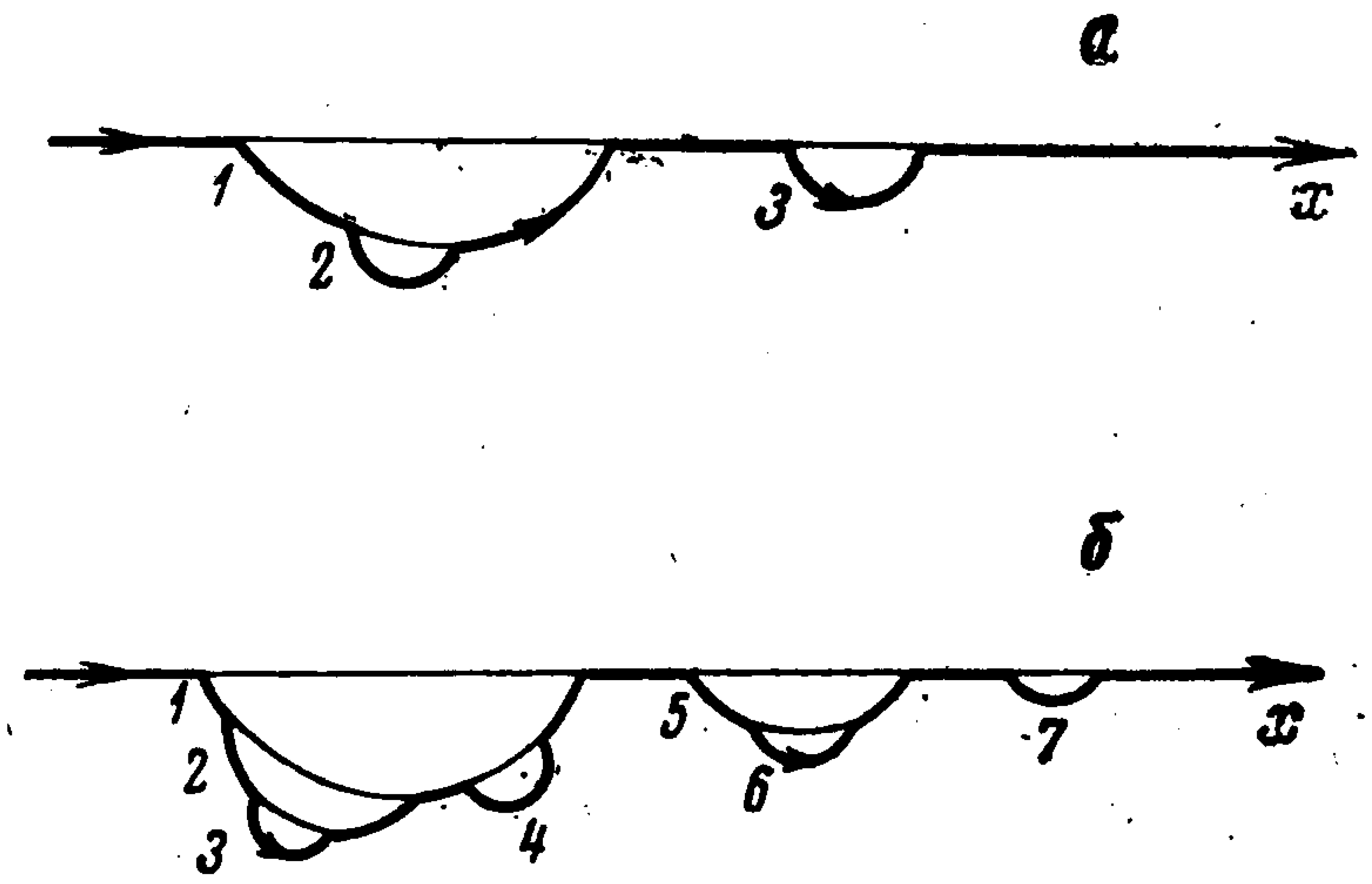
$$0 < \varkappa \leqslant \varkappa_* \tag{5.3}$$

где $\varkappa_*$ — единственный положительный корень уравнения

$$g(\varkappa_*) = \varkappa_*, \quad \varkappa_* > 0 \tag{5.4}$$

Параметр $\varkappa$ выбираем из интервала (5.3). При этом движение точки E, описанное в п. 3, будет обладать следующим свойством. Если j-е сближение произошло с точкой P_i при движении точки E по дуге L_p-спирали, $p \leqslant j - 1$, то следующее сближение с этой же точкой P_i может произойти не ранее, чем после выхода точки E на дугу L_r-спирали, $r \leqslant p - 1$. Это свойство распространяется и на луч x, который можно считать L_0-спиралью.

Пусть, без нарушения общности, точки P_i пронумерованы в том порядке, в каком происходят их первые сближения с точкой E. Тогда первое сближение с точкой P_1 происходит на луче x и, согласно установленному свойству, других сближений с этой точкой не произойдет никогда. Первое сближение с точкой P_2 может произойти либо на дуге L_1-спирали, либо на луче x после схода с этой дуги. В первом случае повторное сближение с точкой P_2 может произойти лишь после выхода на луч x, а во втором случае его вообще не будет.



Фиг. 3

Оценим общее число сближений $N(n)$ с n преследователями. Из предыдущих рассуждений следует $N(1) \leqslant 1$, $N(2) \leqslant 3$.

На фиг. 3 схематически, без соблюдения масштаба, изображены типичные траектории точки E при $n = 2$, $N = 3$ (*а*) и $n = 3$, $N_3 = 7$ (*б*); цифрами указаны номера сближений.

Справедливо следующее неравенство, доказываемое по индукции:

$$N(n) \leqslant 2^n - 1 \tag{5.5}$$

При $n = 1, 2, 3$ неравенство (5.5) верно. Пусть оно верно для n. Тогда в случае $n + 1$ преследователей общее число сближений можно оценить следующим образом. После первого сближения с точкой P_1 точка E будет двигаться по L_1-спирали и может сближаться с оставшимися n точками. До выхода на луч x может произойти не более $N(n)$ сближений с этими точками. После выхода на луч x точку P_1 можно не учитывать, так как с ней больше не произойдет сближений, а с остальными точками может произойти еще $N(n)$ сближений. Таким образом, с учетом (5.5)

$$N(n+1) \leqslant 1 + N(n) + N(n) \leqslant 2^{n+1} - 1$$

и неравенство (5.5) доказано по индукции.

Оценим теперь расстояние между точкой E и точкой $E°$, совершающей номинальное движение. Аналогично неравенствам (4.23) — (4.25) получим

$$EE° \leqslant 2[s_1 + s_2 + \ldots + s_{N(n)}] < 2Lk^{-1}(e^{\lambda\pi} - 1)(1 - \varkappa)^{-1} \tag{5.6}$$

Движение точки E должно лежать в ε-окрестности номинального движения, т. е. $EE° \leqslant \varepsilon$. Для этого, согласно (5.6), достаточно принять

$$0 < L \leqslant \min\left[{}^1/_2\, \varepsilon k (1 - \varkappa)(e^{\lambda\pi} - 1)^{-1},\ \delta_0\right] \tag{5.7}$$

Здесь учтено также наложенное выше условие $L \leqslant \delta_0$.

Итак, параметры L, $\varkappa$ следует выбирать в границах (5.3), (5.7). При этом маневр уклонения п. 3 будет удовлетворять всем наложенным условиям, а число сближений будет удовлетворять неравенству (5.5).

Определение $\varkappa_*$ требует, согласно (4.18), (5.4), решения кубического уравнения. Получим простое явное выражение $\varkappa = \varkappa_0$, лежащее в пределах (5.3). Рассмотрим наряду с функцией g из (4.18) линейную функцию

(5.8) $$g_0(\mu) = (1-\mu)\, g_1, \quad g_1 = a_3^2 (a_4+1)^{-1}(a_1a_4 + a_2a_3 + 1)^{-1}$$

Сравнивая (4.18) и (5.8), видим, что $g_0(\mu) \leqslant g(\mu)$ при $0 \leqslant \mu \leqslant 1$, и корень $\varkappa_0$ уравнения

(5.9) $$g_0(\varkappa_0) = \varkappa_0$$

лежит в пределах (5.3). Разрешая уравнение (5.9) с учетом (5.8), найдем искомую величину

(5.10) $$\varkappa_0 = g_1 / (1 + g_1)$$

Оценим еще минимальное расстояние δ между точками E и $P_1, \ldots, P_n$ при $t \geqslant t_0$. Так как максимальное число сближений не превышает $N(n)$ из (5.5), то

(5.11) $$\delta = \min_{\substack{i,t \\ 1\leqslant i\leqslant n,\ t\geqslant t_0}} EP_i \geqslant L_{N(n)+1} = L\varkappa^{N(n)} \geqslant L\varkappa^{(2^n-1)}$$

Если выбирать максимально возможное L, допускаемое неравенством (5.7), то из (5.11) получим

(5.12) $$\delta \geqslant \min\,[C_n(k)\,\varepsilon,\ C_n^*(k)\,\delta_0]$$
$$C_n(k) = {}^1\!/_2\, k\,(1-\varkappa)\,(e^{\lambda\pi}-1)^{-1}\varkappa^{(2^n-1)}, \qquad C_n^*(k) = \varkappa^{(2^n-1)}$$

В качестве $\varkappa$ здесь можно взять любое число из интервала (5.3), например, $\varkappa_0$ из (5.10). Явные выражения для $\varkappa_0$, $C_n(k)$, $C_n^*(k)$ получим, подставляя в формулы (5.10), (5.12) соотношения (5.8), (4.9), (4.14), (2.5). В частности, для случая, когда возможности преследователей приближаются к возможностям уклоняющейся точки ($k \to 1$), найдем согласно указанным формулам асимптотически

$$\varkappa_0 \approx 2\lambda e^{-4\pi\lambda}, \quad C_n(k) \approx 0.5 e^{-\pi\lambda}\varkappa_0^{(2^n-1)}$$
$$C_n^*(k) \approx \varkappa_0^{(2^n-1)}, \quad \lambda = k\,(1-k^2)^{-1/2} \to \infty, \quad k \to 1$$

Отметим, что предложенная в п. 3 стратегия уклонения точки E, а также границы (5.3), (5.7) для выбора параметров L, $\varkappa$ не зависят от числа преследователей n.

Поступила 22 IV 1975 г.