

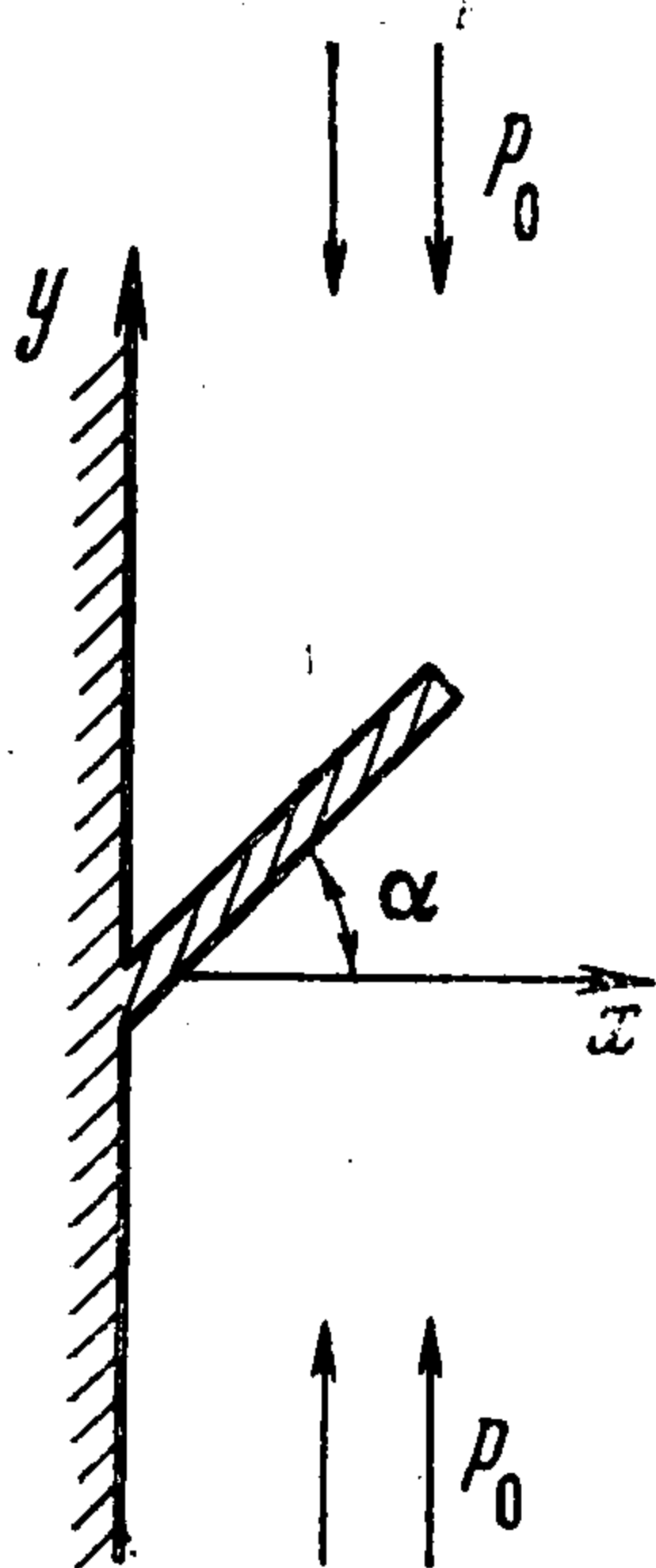
РАВНОВЕСИЕ ОТКОСА С ТЕКТОНИЧЕСКОЙ ТРЕЩИНОЙ

Г. П. Черепанов

(Москва)

В рамках плоской задачи теории упругости рассматривается равновесие упругой полуплоскости с краевой прямолинейной трещиной, выходящей на свободную границу полуплоскости под произвольным углом. Считается, что на большом расстоянии от трещины приложены заданные сжимающие напряжения, в результате действия которых противоположные берега трещины налегают один на другой. Взаимодействие берегов трещины описывается законом сухого трения со сцеплением. В математическом отношении эта задача совершенно аналогична задаче о тектонической трещине, когда промежуток между берегами трещины заполнен малопрочной средой. Вначале дается постановка задачи и приводятся основные соотношения. С использованием преобразования Меллина и метода Джонса выводится уравнение Винера — Хопфа данной краевой задачи. Затем находится точное аналитическое решение уравнения Винера — Хопфа и определяется коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины. Полученное решение привлекается для исследования геофизической проблемы устойчивости откоса с тектонической трещиной.

1. Постановка задачи и основные соотношения. Рассмотрим деформацию однородного и изотропного упругого полупространства, находящегося в условиях плоской деформации. В плоскости Oxy , где xy — прямо-



Фиг. 1

линейные декартовы координаты, полупространство занимает полуплоскость $x > 0$. На границу полупространства, свободную от внешних нагрузок, выходит прямолинейная трещина длины l под углом α к оси x (фиг. 1). В дальнейшем будем пользоваться полярными координатами $r\theta$ с центром в начале декартовых координат.

Пусть на бесконечности действуют сжимающие напряжения, которые вызывают налегание противоположных берегов трещины один на другой. Будем считать, что взаимодействие берегов трещины описывается законом сухого кулонова трения со сцеплением. Можно считать также, что это — тектоническая трещина с малопрочным заполнителем; в математическом отношении эта задача совершенно аналогична предыдущей (подробнее об этом см. ниже, п. 5).

Приведем основные соотношения (уравнения равновесия, условие совместности деформаций, закон Гука)

$$(1.1) \quad r \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + r \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2\tau_{r\theta} = 0$$

$$(1.2) \quad \Delta(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0 \quad \left(\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right)$$

$$(1.3) \quad \frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_r - \nu\sigma_\theta]$$

$$\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = \frac{1+\nu}{E} [(1-\nu)\sigma_\theta - \nu\sigma_r]$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} = 2 \frac{1+\nu}{E} \tau_{r\theta}$$

Без ограничения общности длину трещины можно считать равной единице (характерный масштаб длины).

Граничные условия задачи запишем в следующем виде:

$$(1.4) \quad \text{при } \theta = \pm \pi/2 \quad \sigma = \tau_{r\theta} = 0$$

$$(1.5) \quad \text{при } \theta = \alpha \quad [\sigma_\theta] = [\tau_{r\theta}] = 0, \quad [u_\theta] = 0$$

$$(1.6) \quad \text{при } \theta = \alpha, \quad 0 < r < 1 \quad \tau_{r\theta} = k - \sigma_\theta \operatorname{tg} \rho + f(r) \quad (\sigma_\theta < 0)$$

$$(1.7) \quad \text{при } \theta = \alpha, \quad 1 < r < \infty \quad [\sigma_r] = 0$$

Здесь k — коэффициент сцепления, ρ — угол сухого трения (между берегами трещины), $f(r)$ — заданная функция. Скобка означает скачок величины, заключенной в скобки (например, $[\sigma_\theta] = \sigma_\theta|_{\theta=\alpha+0} - \sigma_\theta|_{\theta=\alpha-0}$).

Условия (1.5) на трещине при $0 < r < 1$ физически означают отсутствие внешних нагрузок на трещине и наличие плотного контакта всюду между противоположными берегами трещины.

Функция $f(r)$ определяется из внешней задачи при помощи принципа суперпозиции таким образом, чтобы на бесконечности выполнялось условие

$$(1.8) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad \sigma_\theta \rightarrow 0, \quad \tau_{r\theta} \rightarrow 0, \quad \sigma_r \rightarrow 0$$

Например, в случае, когда на бесконечности действует постоянное сжимающее напряжение $\sigma_y = -p_0$, а остальные напряжения равны нулю (фиг. 1), функция $f(r)$ равна следующей постоянной:

$$(1.9) \quad f(r) = -\frac{1}{2} p_0 \frac{\sin \rho + \sin(\rho + 2\alpha)}{\cos \rho}$$

Она равна величине $(\tau_{r\theta} + \sigma_\theta \operatorname{tg} \rho)$, взятой со знаком минус и отвечающей сплошному телу без трещины на линии $\theta = \alpha$. Напряжения и деформации в задаче, изображенной на фиг. 1, очевидно, равны напряжениям и деформациям, полученным из решения краевой задачи (1.1)–(1.8), плюс соответствующие напряжения и деформации в том же сплошном теле без трещины, сжатом напряжением $\sigma_y = -p_0$.

В случае тяжелого откоса, подверженного переменной внешней нагрузке и имеющего произвольный угол, функция $f(r)$ определена в п. 5.

В аналогичной физической постановке была изучена ранее задача о равновесии безграничного хрупкого тела с налегающими трещинами вдоль одной и той же прямой [1].

2. Уравнение Винера — Хопфа. Применим преобразование Меллина [2]

$$(2.1) \quad f^*(p) = \int_0^{\infty} f(r) r^p dr \quad (p \text{ — комплексный параметр})$$

к уравнениям равновесия (1.1), получим

$$(2.2) \quad \tau_{r\theta}^* = \frac{1}{p-1} \frac{d\sigma_\theta^*}{d\theta}, \quad p\sigma_r^* = \frac{1}{p-1} \frac{d^2\sigma_\theta^*}{d\theta^2} - \sigma_\theta^*$$

Из физических соображений напряжения в данной задаче будут ограниченными при $r \rightarrow 0$, а при $r \rightarrow \infty$ они ведут себя как $O(r^{-2})$. Следовательно, их преобразования Меллина будут аналитическими функциями комплексного переменного p в полосе $-1 < \operatorname{Re} p < 1$.

Подставляя σ_r^* в преобразованное уравнение (1.2), находим

$$(2.3) \quad \frac{d^4\sigma_\theta^*}{d\theta^4} + [(p+1)^2 + (p-1)^2] \frac{d^2\sigma_\theta^*}{d\theta^2} + (p+1)^2(p-1)^2 \sigma_\theta^* = 0$$

Решение этого уравнения запишем так:

$$(2.4) \quad \sigma_\theta^* = \begin{cases} \sigma_\theta^{*+}, & -\pi/2 \leq \theta < \alpha \\ \sigma_\theta^{*-}, & \alpha < \theta \leq \pi/2 \end{cases}$$

$$(2.5) \quad \sigma_\theta^{\pm} = A_1^\pm \sin(p+1) \left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) + A_2^\pm \sin(p-1) \left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) + \\ + A_3^\pm \cos(p+1) \left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right) + A_4^\pm \cos(p-1) \left(\theta \pm \frac{\pi}{2}\right)$$

Здесь $A_1^\pm, A_2^\pm, A_3^\pm, A_4^\pm$ — неизвестные функции параметра p , подлежащие определению из граничных условий.

Любые семь из них выражаются через одну неизвестную функцию при помощи семи «сквозных» граничных условий (1.4) и (1.5), преобразованных по r . Замечая, что согласно (1.3) будет

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} = \frac{1+\nu}{E} \left(2 \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{1-\nu}{r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \theta} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} \right)$$

и, следовательно

$$(2.6) \quad (p+1) \frac{\partial u_\theta^*}{\partial r} = \frac{1+\nu}{E} \left[2p\tau_{r\theta}^* + (1-\nu) \frac{d\sigma_r^*}{d\theta} - \nu \frac{d\sigma_\theta^*}{d\theta} \right]$$

Из преобразованных граничных условий (1.4) и (1.5) при помощи (2.2) — (2.6) находим

$$(2.7) \quad A_3^- + A_4^- = 0, \quad A_3^+ + A_4^+ = 0 \\ A_1^-(p+1) + A_2^-(p-1) = 0, \quad A_1^+(p+1) + A_2^+(p-1) = 0 \\ A_1^+ \sin(p+1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + A_2^+ \sin(p-1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \\ + A_3^+ \cos(p+1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + A_4^+ \cos(p-1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \\ = A_1^- \sin(p+1) \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + A_2^- \sin(p-1) \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \\ + A_3^- \cos(p+1) \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + A_4^- \cos(p-1) \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
& A_1^+(p+1) \cos(p+1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + A_2^+(p-1) \cos(p-1) \times \\
& \times \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - A_3^+(p+1) \sin(p+1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \\
& - A_4^+(p-1) \sin(p-1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = A_1^-(p+1) \cos(p+1) \times \\
& \times \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + A_2^-(p-1) \cos(p-1) \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - \\
& - A_3^-(p+1) \sin(p+1) \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - A_4^-(p-1) \sin(p-1) \times \\
& \times \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - A_1^+(p+1)^3 \cos(p+1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) - \\
& - A_2^+(p-1)^3 \cos(p-1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + A_3^+(p+1)^3 \sin(p+1) \times \\
& \times \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + A_4^+(p-1)^3 \sin(p-1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -A_1^-(p+1)^3 \times \\
& \times \cos(p+1) \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) - A_2^-(p-1)^3 \cos(p-1) \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + \\
& + A_3^-(p+1)^3 \sin(p+1) \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) + A_4^-(p-1)^3 \sin(p-1) \left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений запишем в следующем виде ($D(p)$ — неизвестная функция p):

$$\begin{aligned}
(2.8) \quad A_1^\pm &= \Delta_1^\pm(p) D(p), \quad A_2^\pm = -\frac{p+1}{p-1} \Delta_1^\pm(p) D(p) \\
A_3^\pm &= \Delta_2^\pm(p) D(p), \quad A_4^\pm = -\Delta_2^\pm(p) D(p)
\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
(2.9) \quad \Delta_1^\pm &= \pm \begin{vmatrix} c_1^- & a_1^\mp & c_1^+ \\ c_2^- & a_2^\mp & c_2^+ \\ c_3^- & a_3^\mp & c_3^+ \end{vmatrix}, \quad \Delta_2^\pm = \begin{vmatrix} a_1^+ & a_1^- & c_1^\mp \\ a_2^+ & a_2^- & c_2^\mp \\ a_3^+ & a_3^- & c_3^\mp \end{vmatrix} \\
a_1^\pm &= (p \mp 1) \sin(p \pm 1) \left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) - (p \pm 1) \sin(p \mp 1) \left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) \\
a_2^\pm &= -2(p+1) \cos \alpha \sin p \left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) \\
a_3^\pm &= (p+1) \left[(p \mp 1)^2 \cos(p \mp 1) \left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) - \right. \\
& \left. - (p \pm 1)^2 \cos(p \pm 1) \left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) \right] \\
c_1^\pm &= \mp 2(p-1) \cos \alpha \sin p \left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) \\
c_2^\pm &= (p-1) \sin(p-1) \left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) - (p+1) \sin(p+1) \left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) \\
c_3^\pm &= (p+1)^3 \sin(p+1) \left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) - (p-1)^3 \sin(p-1) \left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Граничные условия в смещениях ($[u_\theta] = 0$ при $\theta = \alpha$ и $[u_r] = 0$ при $\theta = \alpha r > 1$) можно считать автоматически выполняющимися в силу односвязности рассматриваемой области, поскольку удовлетворены условия $[du_\theta / dr] = 0$ при $\theta = \alpha$ и $[du_r / dr] = 0$ при $\theta = \alpha r > 1$. Во всяком случае, добавление произвольного постоянного скачка смещения вдоль линии $\theta = \alpha$ не повлияет на поле деформаций и напряжений.

Приведем результаты вычислений по формулам (2.9), опуская громоздкие выкладки

$$(2.10) \quad \Delta_1^\pm(p) = \pm 16p(p^2 - 1) \cos \alpha \sin \pi p \sin p \left(\alpha \mp \frac{\pi}{2} \right)$$

$$\Delta_2^\pm(p) = -16p(p+1) \sin \frac{1}{2} \pi p \left[\pm p \cos \bar{\alpha} \cos p \left(\alpha \mp \frac{\pi}{2} \right) \mp \right. \\ \left. \mp \sin \bar{\alpha} \sin p \left(\alpha \mp \frac{\pi}{2} \right) \right]$$

Введем следующие функции:

$$(2.11) \quad \Phi^-(p) = \int_0^1 [\sigma_r] |_{\theta=\alpha} r^p dr, \quad \Psi^+(p) = \int_1^\infty (\tau_{r\theta} + \sigma_\theta \operatorname{tg} \rho) |_{\theta=\alpha} r^p dr$$

Функция $\Phi^-(p)$, очевидно, аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p > -1$, а функция $\Psi^+(p)$ аналитична в полуплоскости $\operatorname{Re} p < 1$.

Вследствие граничных условий (1.7) и (1.6) имеем

$$(2.12) \quad \text{при } \theta = \alpha \quad [\bar{\sigma}_r] = \Phi^-(p)$$

$$(2.13) \quad \text{при } \theta = \alpha \quad \tau_{r\theta}^* + \sigma_\theta^* \operatorname{tg} \rho = \Psi^+(p) + F(p)$$

$$(2.14) \quad F(p) = \int_0^1 [k + f(r)] r^p dr$$

При помощи формул (2.2), (2.4), (2.5) и (2.8) условия (2.12) и (2.13) можно записать так:

$$(2.15) \quad p(p-1) \Phi^-(p) = C_1(p) D(p)$$

$$(2.16) \quad (p-1) \{ \Psi^+(p) + F(p) \} = D(p) \{ 2C_2(p) + C_3(p) \operatorname{tg} \rho \}$$

Здесь

$$(2.17) \quad C_1(p) = \Delta_1^+(p) (p+1)^2 \sin(p+1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) - \\ - \Delta_1^+(p) (p^2 - 1) \sin(p-1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + \Delta_2^+(p) (p+1)^2 \times \\ \times \cos(p+1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) - \Delta_2^+(p) (p-1)^2 \cos(p-1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) - \\ - \Delta_1^-(p) (p+1)^2 \sin(p+1) \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + \Delta_1^-(p) (p^2 - 1) \times \\ \times \sin(p-1) \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) - \Delta_2^-(p) (p+1)^2 \cos(p+1) \times \\ \times \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) + \Delta_2^-(p) (p-1)^2 \cos(p-1) \left(\alpha - \frac{\pi}{2} \right) \\ C_2(p) = -\Delta_1^+(p) (p+1) \cos \bar{\alpha} \sin p \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) - \\ - \Delta_2^+(p) p \cos \alpha \cos p \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) + \Delta_2^+(p) \sin \alpha \sin p \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) \\ C_3(p) = \Delta_1^+(p) (p-1) \sin(p+1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) - \\ - \Delta_1^+(p) (p+1) \sin(p-1) \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right) - 2\Delta_2^+(p) \times \\ \times (p-1) \cos \alpha \sin p \left(\alpha + \frac{\pi}{2} \right)$$

Опуская выкладки, приведем результат преобразований по формулам (2.17) и (2.10)

$$(2.18) \quad \begin{aligned} C_1(p) &= 64p^2(p+1)\sin^2 \pi p \\ C_2(p) &= 8p(p+1)\sin \pi p (2p^2 \cos^2 \alpha \cos 2p\alpha - \\ &\quad - p \sin 2\alpha \sin 2p\alpha + \cos \pi p - \cos 2p\alpha) \\ C_3(p) &= 32p^2(p^2-1)\cos^2 \alpha \sin \pi p \sin 2p\alpha \end{aligned}$$

Исключая функцию $D(p)$ из двух соотношений (2.15) и (2.16), приходим к следующему функциональному уравнению Винера — Хопфа:

$$(2.19) \quad \Psi^+(p) + F(p) = \frac{1}{4} \operatorname{ctg} \pi p G(p) \Phi^-(p)$$

$$(2.20) \quad G(p) = 1 + \frac{\cos 2p\alpha}{\cos \pi p} \{2p^2 \cos^2 \alpha - 1 + p \operatorname{tg} 2p\alpha [2(p-1) \operatorname{tg} \rho \cos^2 \alpha - \sin 2\alpha]\}$$

3. Решение краевой задачи. Функция $G(p)$ в функциональном уравнении (2.19), обладает, как нетрудно установить, следующими свойствами:

а) функция $G(p)$ мероморфна, причем все полюсы, расположенные в точках $p = \pm \frac{1}{2} \pm n$, где $n = 1, 2, 3, \dots$, являются простыми;

б) всюду на мнимой оси функция $G(p)$ при $\rho \neq 0$ не имеет ни полюсов, ни нулей, за исключением точки $p = 0$, где она имеет нуль второго порядка

$$(3.1) \quad \begin{aligned} G(p) &= p^2 \left[2\alpha^2 - \frac{\pi^2}{2} + 2 \cos^2 \alpha - \right. \\ &\quad \left. - 4\alpha \cos \alpha (\operatorname{tg} \rho \cos \alpha + \sin \alpha) \right] + O(p^3) \quad (p \rightarrow 0) \end{aligned}$$

в) при $p \rightarrow \infty$ вдоль мнимой оси функция $G(p)$ стремится к единице в силу неравенства $\alpha < \pi/2$.

Рассмотрим контур L в плоскости p , состоящий из мнимой оси (за исключением малого симметричного отрезка около начала координат) и правой полуокружности малого радиуса с центром в начале координат (фиг. 2). Направление обхода контура L совпадает с направлением мнимой оси. Области, находящиеся слева и справа от контура L , обозначим соответственно через D_+ и D_- . На контуре L всюду функция $G(p)$, очевидно, не имеет ни полюсов, ни нулей и ее можно представить в виде

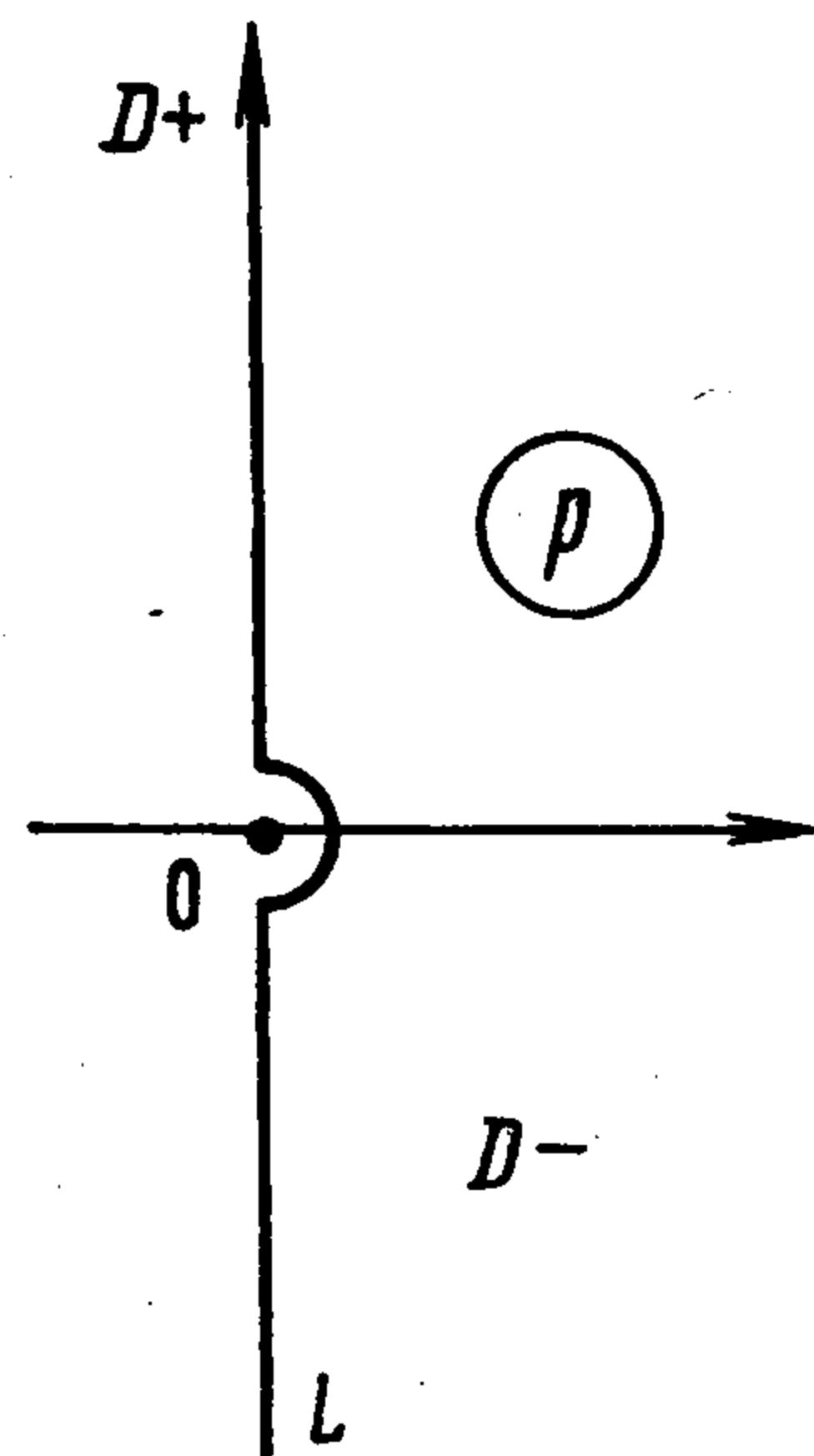
$$(3.2) \quad G(p) = G^+(p) / G^-(p) \quad (p \in L)$$

где $G^+(p)$ и $G^-(p)$ — функции, аналитические и не имеющие нулей соответственно в областях D_+ и D_- .

Функции $G^+(p)$ и $G^-(p)$ можно взять в следующем виде:

$$(3.3) \quad \exp \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(t) dt}{t-p} = \begin{cases} G^+(p), & p \in D_+ \\ G^-(p), & p \in D_- \end{cases}$$

Согласно свойствам интегралов типа Коши определенные таким путем функции $G^+(p)$ и $G^-(p)$ будут удовлетворять всем требуемым условиям



Фиг. 2

(условие (3.2) легко проверяется, если в формулах (3.3) перейти к предельным значениям функций на контуре L при помощи формулы Сохоцкого). При $|t| \rightarrow \infty$ на L функция $\ln G(t)$ убывает по экспоненте, поэтому интеграл (3.3) сходится быстро.

Используем еще следующее известное представление (см., например, [3], стр. 53):

$$(3.4) \quad p \operatorname{ctg} \pi p = K^+(p)K^-(p)$$

Здесь

$$(3.5) \quad K^\pm(p) = \Gamma(1 \mp p) / \Gamma(1/2 \mp p)$$

Согласно свойствам гамма-функций функция $K^+(p)$ аналитична и не имеет нулей при $\operatorname{Re} p < 1/2$, а функция $K^-(p)$ аналитична и не имеет нулей при $\operatorname{Re} p > -1/2$. Кроме того, согласно формуле Стирлинга имеем

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \text{при } p \rightarrow \infty \quad K^+(p) &= \sqrt{-p} + O(1) \quad (\operatorname{Re} p < 1/2) \\ K^-(p) &= \sqrt{p} + O(1) \quad (\operatorname{Re} p > -1/2) \end{aligned}$$

При помощи факторизации (3.2) и (3.4) функциональное уравнение (2.19) можно записать так:

$$(3.7) \quad \frac{\Psi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)} + \frac{F(p)}{K^+(p)G^+(p)} = \frac{\Phi^-(p)K^-(p)}{4pG^-(p)} \quad (p \in L)$$

Используем теперь следующее представление:

$$(3.8) \quad \frac{F(p)}{K^+(p)G^+(p)} = F^+(p) - F^-(p) \quad (p \in L)$$

Здесь

$$(3.9) \quad \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{F(t) dt}{K^+(t)G^+(t)(t-p)} = \begin{cases} F^+(p), & p \in D_+ \\ F^-(p), & p \in D_- \end{cases}$$

Подставляя (3.8) в (3.7), получаем

$$(3.10) \quad \frac{\Psi^+(p)}{K^+(p)G^+(p)} + F^+(p) = \frac{\Phi^-(p)K^-(p)}{4pG^-(p)} + F^-(p) \quad (p \in L)$$

Функция в левой части этого равенства аналитична всюду в области D_+ , а функция в правой части аналитична всюду в области D_- . На основании принципа непрерывного продолжения они равны одной и той же функции, аналитической во всей плоскости. Чтобы найти эту единую аналитическую функцию, нужно изучить поведение искомых функций $\Phi^-(p)$ и $\Psi^+(p)$ в бесконечности при $p \rightarrow \infty$. Для этого используем формулы (2.10) и известную асимптотику упругого поля вблизи конца трещины с налегающими берегами [1]. В условиях рассматриваемой задачи имеем при $\theta \rightarrow \alpha$, $r \rightarrow 1$

$$(3.11) \quad \sigma_r = - \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r_0}} \sin \frac{\varphi}{2} \left(2 + \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} \right) + O(1)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{\theta} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r_0}} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{3\varphi}{2} + O(1) \quad (r_0 \ll 1) \\ \tau_{r\theta} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r_0}} \cos \frac{\varphi}{2} \left(1 - \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{3\varphi}{2} \right) + O(1)\end{aligned}$$

Здесь r_0 — расстояние от конца трещины, малое по сравнению с ее длиной, φ — угол, составляемый радиус-вектором (с началом в конце трещины) с продолжением трещины $\theta = \alpha$, K_{II} — коэффициент интенсивности напряжений. Величина K_{II} подлежит определению в процессе решения задачи; она представляет наибольший интерес для механики разрушения. Согласно (3.11) имеем

$$(3.12) \quad \begin{aligned}\text{при } \theta = \alpha, r = 1 - r_0 \quad (r_0 \ll 1) \quad [\sigma_r] &= - \frac{4K_{II}}{\sqrt{2\pi r_0}} \\ \text{при } \theta = \alpha, r = 1 + r_0 \quad (r_0 \ll 1) \quad \tau_{r\theta} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r_0}}, \quad \sigma_{\theta} = O(1)\end{aligned}$$

Используем теперь теорему абелева типа [3], предварительно преобразовав интегралы (2.10) к стандартному виду на полубесконечном интервале при помощи новой переменной интегрирования $t = \ln r$. Получаем на основании формул (3.12)

$$(3.13) \quad \text{при } p \rightarrow \infty \quad \Phi^-(p) = - \frac{2\sqrt{2}K_{II}}{\sqrt{p}}, \quad \Psi^+(p) = \frac{K_{II}}{\sqrt{-2p}}$$

Следовательно, на основании формул (3.3), (3.6), (3.9) и (3.13) аналитическая функция, находящаяся в правой части равенства (3.10), стремится к нулю при $p \rightarrow \infty$ в D_- . Таким образом, единая аналитическая функция по теореме Лиувилля тождественно равна нулю во всей плоскости p .

Окончательно искомое решение задачи можно записать в виде

$$(3.14) \quad \Phi^-(p) = - \frac{4pF^-(p)G^-(p)}{K^-(p)}$$

$$(3.15) \quad \Psi^+(p) = - F^+(p)K^+(p)G^+(p)$$

Определяя отсюда при помощи (2.15) или (2.16) функцию $D(p)$, находим преобразование Меллина искомых напряжений, а после обращения преобразования — и сами напряжения.

4. Анализ решения. Найдем коэффициент интенсивности напряжений в вершине трещины по известной асимптотике (3.13), используя при $p \rightarrow \infty$ формулы (3.14), (3.3), (3.9) и (3.6). Получаем

$$(4.1) \quad K_{II} = - \frac{1}{\sqrt{2}\pi i} \int_L \frac{F(t)dt}{K^+(t)G^+(t)}$$

Этот двукратный интеграл удастся свести к однократному в наиболее часто встречающемся случае, когда внешняя нагрузка представляет собой полином или дробно-рациональную функцию. Для иллюстрации приведем три примера.

Постоянная нагрузка. Пусть функция $f(r)$ равна постоянной $f(r) = a = \text{const.}$ (Например, в случае однородного сжатия на бесконечности, изображенного на фиг. 1, величина этой постоянной дается формулой (1.9).)

При помощи формулы (2.14) находим в данном случае

$$(4.2) \quad F(p) = (a + k) / (p + 1)$$

Подставляя это выражение в формулу (4.1) и вычисляя интеграл при помощи теории вычетов, получаем

$$(4.3) \quad K_{II} = - \frac{\sqrt{2} (a + k)}{K^+(-1)G^+(-1)} = - \frac{\sqrt{\pi} (a + k)}{\sqrt{2} G^+(-1)}$$

Используя формулы (3.3) и (2.20), преобразуем интеграл $G^+(-1)$ к виду, удобному для вычислений. Прежде всего, заметим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int \frac{\ln G(t) dt}{t + 1}$$

по малой полуокружности радиуса ε вблизи начала координат на основании разложения (3.1) имеет порядок $\varepsilon \ln \varepsilon + O(\varepsilon)$, т. е. стремится к нулю при $\varepsilon \rightarrow 0$. Поэтому при вычислении $G^+(-1)$ в качестве контура L можно взять просто мнимую ось, при этом интеграл будет сходящимся (с логарифмической особенностью у подынтегральной функции в начале координат). Далее введем на контуре L действительную переменную τ ($p = i\tau$) и преобразуем интеграл к полубесконечному интервалу $(0, +\infty)$, воспользовавшись тем, что на мнимой оси $\text{Re } G$ — четная, а $\text{Im } G$ — нечетная функции τ . В результате получим

$$(4.4) \quad G^+(-1) = \exp \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln |G| + \tau \arg G}{1 + \tau^2} d\tau$$

Здесь

$$(4.5) \quad \ln |G| = \frac{1}{2} \ln [(\text{Re } G)^2 + (\text{Im } G)^2]$$

$$\arg G = \text{arctg} \frac{\text{Im } G}{\text{Re } G}$$

$$\text{Im } G = -2\tau^2 \text{tg } \rho \cos^2 \alpha \text{th } 2\alpha\tau \frac{\text{ch } 2\alpha\tau}{\text{ch } \pi\tau}$$

$$\text{Re } G = 1 - \frac{\text{ch } 2\alpha\tau}{\text{ch } \pi\tau} [1 + 2\tau^2 \cos^2 \alpha - \tau \text{th } 2\alpha\tau (\sin 2\alpha + 2\text{tg } \rho \cos^2 \alpha)]$$

Выражение $G^+(-1)$ представляет собой функцию, зависящую только от α и ρ . В табл. 1 представлены значения $G^+(-1) \times 10^3$ для разных ρ и α . Эти значения получены на ЭВМ при помощи приближенного интегрирования (4.4) по методу Симпсона. Для улучшения сходимости по-

лезно вначале избавиться от логарифмической особенности подынтегральной функции в нуле при помощи следующего тождества:

$$(4.6) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\ln \tau}{1+\tau} d\tau = -\frac{\pi}{6}$$

Линейная нагрузка. Пусть функция $f(r)$ будет линейной: $f(r) = \eta_1 r$, где η_1 — некоторый постоянный коэффициент. Такой случай может представиться, например, при учете собственного веса тяжелого массива или при учете асимптотического изгиба.

При помощи формулы (2.14) находим в данном случае

$$(4.7) \quad F(p) = \frac{k}{p+1} + \frac{\eta_1}{p+2}$$

Ограничившись вторым слагаемым в (4.7), при помощи (4.1), (3.3) и (3.5), находим

$$(4.8) \quad K_{II} = -\frac{\sqrt{2} \eta_1}{K^+(-2)G^+(-2)} = -\frac{3\sqrt{2\pi} \eta_1}{8G^+(-2)}$$

Здесь

$$(4.9) \quad G^+(-2) = \exp \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{2 \ln |G| + \tau \arg G}{4 + \tau^2} d\tau$$

Остальные обозначения даны в (4.5). В табл. 2 представлены значения $G^+(-2) \times 10^3$ для разных ρ и α , полученные на ЭВМ аналогично предыдущему случаю.

Квадратичная нагрузка. Пусть функция $f(r)$ будет квадратичной $f(r) = \eta_2 r^2$, где η_2 — некоторый постоянный коэффициент. На основании (2.14) в данном случае имеем

$$(4.10) \quad F(p) = \frac{k}{p+1} + \frac{\eta_2}{p+3}$$

Ограничившись вторым слагаемым в (4.10), при помощи (4.1), (3.3) и (2.20) находим

$$(4.11) \quad K_{II} = -\frac{\sqrt{2} \eta_2}{K^+(-3)G^+(-3)} = -\frac{5\eta_2 \sqrt{2\pi}}{16G^+(-3)}$$

Здесь

$$(4.12) \quad G^+(-3) = \exp \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{3 \ln |G| + \tau \arg G}{9 + \tau^2} d\tau$$

Остальные обозначения даны в (4.5). В табл. 3 представлены значения $G^+(-3) \times 10^3$ для разных ρ и α , полученные на ЭВМ аналогично предыдущим случаям.

5. Устойчивость откоса с тектонической трещиной. Полученное математическое решение можно применить для изучения развития линий скольжения в металлах и в трещиноватых горных породах. Согласно

Таблица 1

$\rho \backslash \alpha$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	85°
0°	448	458	486	502	491	418	257
5°	448	461	490	505	491	416	257
10°	448	464	494	507	490	415	256
15°	448	458	498	509	490	414	256
20°	448	471	502	511	490	412	255
25°	448	474	505	513	490	411	255
30°	448	478	509	516	489	410	254
35°	448	482	513	517	489	408	254
40°	448	486	517	519	488	407	253
45°	448	491	522	521	487	406	252
50°	448	496	526	522	486	404	252
60°	448	509	534	522	482	401	250

Таблица 2

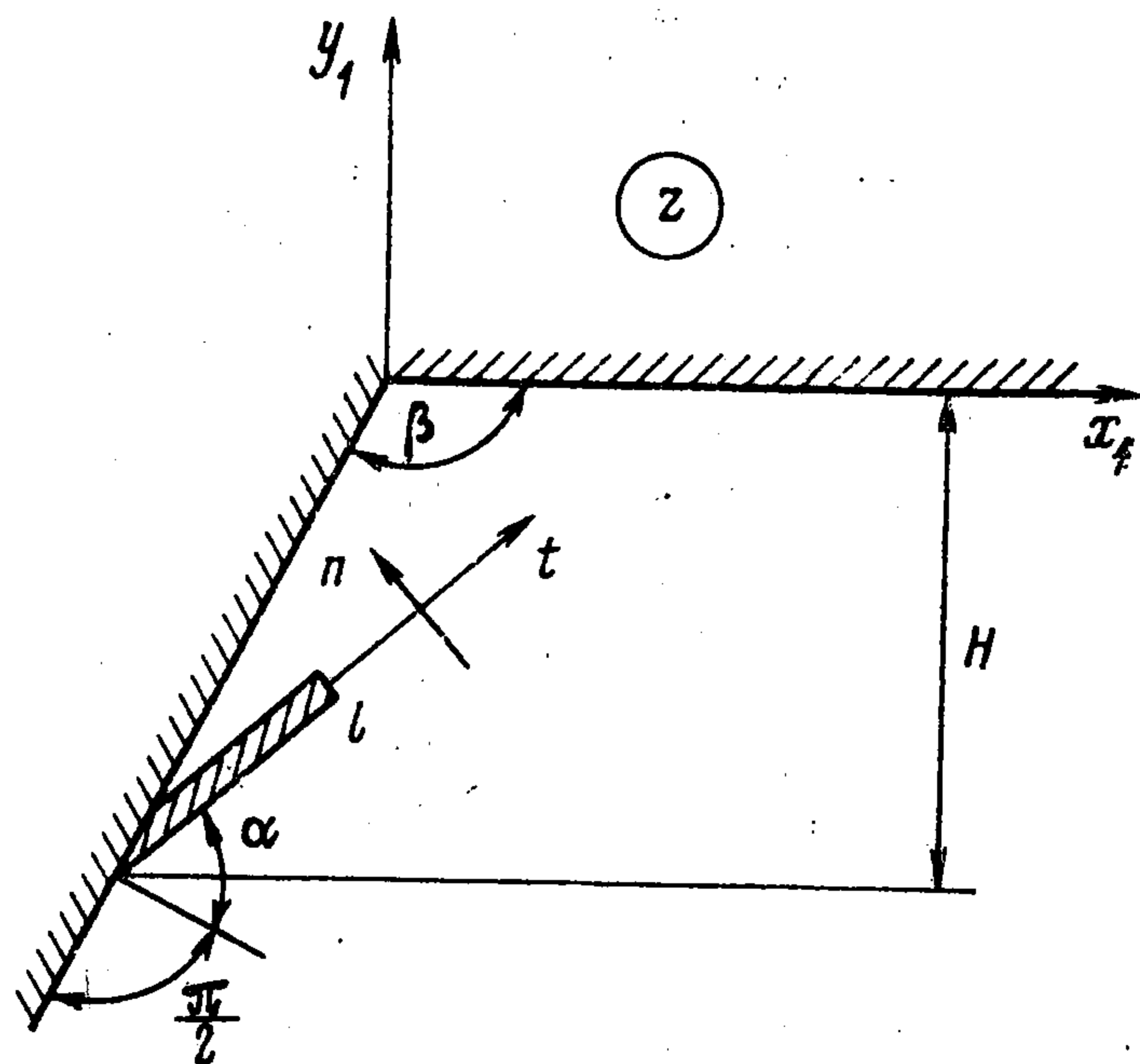
$\rho \backslash \alpha$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	85°
0°	633	640	654	660	650	602	446
5°	633	642	656	661	649	600	446
10°	633	645	659	662	649	599	445
15°	633	647	661	663	648	597	444
20°	633	649	663	663	647	596	444
25°	633	651	664	664	646	594	443
30°	633	653	666	664	646	593	443
35°	633	655	668	663	645	592	442
40°	633	658	669	663	643	591	441
45°	633	660	670	662	642	589	441
50°	633	663	670	660	640	588	439
60°	633	668	667	650	632	586	438

Таблица 3

$\rho \backslash \alpha$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	85°
0°	718	723	730	731	722	690	557
5°	718	724	732	731	721	689	556
10°	718	726	733	731	720	688	556
15°	718	727	734	731	719	687	556
20°	718	728	735	731	718	686	555
25°	718	729	735	730	717	685	555
30°	718	730	735	729	716	684	554
35°	718	731	735	728	715	683	554
40°	718	732	734	726	713	682	553
45°	718	733	733	723	711	682	553
50°	718	734	731	719	708	682	553
60°	718	735	722	704	699	681	552

общефункциональному методу механики разрушения [1] развитие линии скольжения (или трещины сдвига) может происходить только тогда¹, когда абсолютная величина коэффициента интенсивности напряжений K_{II} в рассматриваемой точке будет равняться некоторой постоянной K_{IIc} . Величина K_{IIc} (вязкость скольжения) вполне определена структурой и прочностью материала непосредственно в «голове» линии скольжения. Напомним зависимость $K_{IIc}^2 = 2E\gamma_* / (1 - \nu^2)$, где γ_* — необратимая работа пластических деформаций в голове линии скольжения, затраченная на образование единицы площади поверхности скольжения. Подчеркнем, что в γ_* не входит работа необратимых деформаций на уже образовавшейся поверхности скольжения. Привлечем этот критерий для теоретического решения одной геофизической проблемы устойчивости откоса с тектонической трещиной.

Пусть тяжелый изотропный упругий массив занимает сектор $y_1 < 0, x_1 \operatorname{tg} \beta + y_1 < 0$ с углом раствора β (фиг. 3). Ускорение силы тяжести направлено противоположно оси y_1 . Откос содержит прямолинейную тектоническую трещину, заполненную малопрочной породой и выходящую на боковую поверхность откоса на глубине H под углом α . Величина K_{IIc} может быть различной в разных точках трещины, характеризуя неоднородность заполнителя и его различное сопротивление сдвигу в голове линии скольжения, развивающейся вдоль тектонического разрыва. Длина линии скольжения равна l . Неоднородность заполнителя по прочности может быть вызвана, например, различной степенью увлажнения из-за фильтрации дождевой или грунтовой воды.



Фиг. 3

Задачу будем решать следующим методом последовательных приближений (типа метода Михлина — Шермана). В первом приближении решается задача для откоса без трещины; в этом приближении удовлетворяются все граничные условия исходной задачи, кроме силового условия на линии скольжения $\tau_{nt} = k - \sigma_n \operatorname{tg} \rho$. Во втором приближении решается задача для полуплоскости с разрезом вдоль линии скольжения (см. граничные условия (1.4)–(1.8)), причем «невязка» $f(r)$ определяется из предыдущего приближения.

В третьем приближении решается задача для откоса без трещины, нагруженного только по дневной поверхности $y_1 = 0$, причем эти нагрузки определяются из второго приближения и т. д. Коэффициент интенсивности напряжений K_{II} определяется вторым, четвертым и т. д. приближением. Ограничимся вторым приближением, считая, что длина l достаточно мала по сравнению с H . Случай $l \sim H$, по существу, почти

¹ Возможны и другие, более сложные критерии, учитывающие различные временные процессы, внешнюю среду, макропластичность и т. д. [1].

всегда весьма близок к критическому состоянию, так как в этом случае возникают значительные растягивающие напряжения над концом линии скольжения на дневной поверхности, так что нормальный разрыв происходит по перпендикуляру к дневной поверхности.

Определим вначале поле напряжений в однородном и изотропном тяжелом откосе без тектонического разрыва, считая, что на массив, кроме сил тяжести, действуют следующие нормальные поверхностные нагрузки:

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \text{при } \theta_1 = 0 \quad \sigma_\theta &= -q_0 - \delta_1 x_1, \quad \tau_{r\theta} = 0 \\ \text{при } \theta_1 = -\beta \quad \sigma_\theta &= -q_1 + \delta_0 y_1, \quad \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned}$$

Здесь $\delta_0, \delta_1, q_0, q_1$ — некоторые положительные постоянные, $r_1 \theta_1$ — полярные координаты с центром в углу откоса (фиг. 3). Второе граничное условие при $\delta_0 \neq 0$ существенно, например, когда откос является берегом реки или моря.

Напряжения σ_r, σ_θ и $\tau_{r\theta}$ в рассматриваемом тяжелом массиве можно представить при помощи потенциалов Колосова — Мусхелишвили $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ следующим образом [4] (δ — удельный вес горной породы):

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \sigma_r + \sigma_\theta &= 2[\Phi(z) + \overline{\Phi(\bar{z})}] + \frac{\delta(z - \bar{z})}{2i(1 - \nu)} \\ \sigma_r - \sigma_\theta + 2i\tau_{r\theta} &= e^{2i\theta_1} \left[2z\Phi'(z) + 2\Psi'(z) + \frac{\delta(1 - 2\nu)}{2i(1 - \nu)}(z - \bar{z}) \right] \\ (z = x_1 + iy_1 = r_1 e^{i\theta_1}) \end{aligned}$$

Решение сингулярной граничной задачи (5.1), (5.2) ищем в виде (из групповых соображений легко доказать, что это единственно возможный вид искомого решения [1])

$$(5.3) \quad \Phi(z) = E_1 z + E_3 + E_0 \ln z, \quad \Psi(z) = E_2 z + E_4 + E_5 \ln z$$

где E_0, \dots, E_5 — некоторые комплексные постоянные. Сложим первое и второе соотношения (5.2), получим представление для комбинации $\sigma_\theta + i\tau_{r\theta}$, заданной согласно (5.1) при $\theta_1 = 0$ и $\theta_1 = -\beta$; подставляем в нее (5.3), находим следующие уравнения:

$$(5.4) \quad \begin{aligned} E_0 + E_3 + \bar{E}_3 + E_4 &= -q_0, \quad 2E_1 + \bar{E}_1 + E_2 = -\delta_1 \\ 2E_1 e^{-\beta i} + \bar{E}_1 e^{\beta i} + E_2 e^{-3\beta i} &= \frac{\delta \sin \beta}{2(1 - \nu)} [1 + (1 - 2\nu) e^{-2\beta i}] - \delta_0 \sin \beta \\ E_0 + \bar{E}_0 + E_5 &= 0, \quad E_0 + \bar{E}_0 + E_5 e^{-2\beta i} = 0 \\ \beta i (\bar{E}_0 - E_0) + E_0 - \beta i E_5 e^{-2\beta i} + E_3 + \bar{E}_3 + E_4 e^{-2\beta i} &= -q_1 \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений запишем в виде

$$(5.5) \quad \begin{aligned} E_0 &= \frac{i(q_0 - q_1) \sin 2\beta}{2(\beta \sin 2\beta - 1 + \cos 2\beta)}, \quad E_5 = 0 \\ E_3 &= \frac{q_1(1 - \cos 2\beta) - q_0(2\beta \sin 2\beta - 1 + \cos 2\beta)}{4(\beta \sin 2\beta - 1 + \cos 2\beta)} \\ E_4 &= -q_0 - \frac{(q_0 + q_1)(1 - \cos 2\beta) - 2\beta q_0 \sin 2\beta + i(q_0 - q_1) \sin 2\beta}{2(\beta \sin 2\beta - 1 + \cos 2\beta)} \end{aligned}$$

$$E_1 = \frac{B(\cos 2\beta - 1) + i(B - \bar{B})\sin 2\beta}{8\sin^4\beta}$$

$$E_2 = -\delta_1 - \frac{(2B + \bar{B})(\cos 2\beta - 1) + i(B + \bar{B})\sin 2\beta}{8\sin^4\beta}$$

$$B = \delta_0 \sin \beta e^{\beta i} - \delta_1 e^{-2\beta i} - \frac{\delta \sin \beta}{2(1-\nu)} e^{\beta i} [1 + (1-2\nu)e^{-2\beta i}]$$

Случай локальных нагрузок, действующих около угла откоса, удобнее всего изучать методом С. М. Белоносова [5].

В полученном решении (5.3) и (5.5) при помощи (5.2) вычислим нормальное и касательное напряжения вдоль тектонического разрыва при

$$z = He^{-\beta i} + r \exp i(\alpha - \beta + \pi/2)$$

(r — расстояние от основания трещины на боковой поверхности откоса, фиг. 3). Находим

$$(5.6) \quad \sigma_n + i\tau_{tn} = 2 \operatorname{Re} (E_1 z + E_3) + \frac{\delta(z - \bar{z})}{4i(1-\nu)} + 2 \operatorname{Re} (E_0 \ln z) -$$

$$- e^{2i(\alpha-\beta)} \left[E_0 \frac{\bar{z}}{z} + E_1 \bar{z} + E_2 z + E_4 + \frac{\delta(1-2\nu)}{4i(1-\nu)} (z - \bar{z}) \right] =$$

$$= 2 \operatorname{Re} E_3 + 2H \operatorname{Re} (E_1 e^{-i\beta}) - \frac{\delta H \sin \beta}{2(1-\nu)} - e^{2i(\alpha-\beta)} \left[E_4 + \right.$$

$$+ E_1 H e^{i\beta} + E_2 H e^{-i\beta} - \frac{\delta H \sin \beta (1-2\nu)}{2(1-\nu)} \left. \right] + r \left\{ -2 \operatorname{Im} [E_1 e^{i(\alpha-\beta)}] + \right.$$

$$+ \frac{\delta \cos(\alpha-\beta)}{2(1-\nu)} - e^{2i(\alpha-\beta)} \left[\frac{\delta(1-2\nu) \cos(\alpha-\beta)}{2(1-\nu)} + E_2 i e^{i(\alpha-\beta)} - \right.$$

$$\left. - i E_1 e^{-i(\alpha-\beta)} \right] \left. \right\} - 2 \arg z \operatorname{Im} E_0 - E_0 \exp 2i(\alpha - \beta - \arg z)$$

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{-H \sin \beta + r \cos(\alpha - \beta)}{H \cos \beta - r \sin(\alpha - \beta)} \quad (-\beta < \arg z < 0)$$

По формулам (5.6) вычислим функцию $f(r)$

$$f(r) = -(\tau_{tn} + \sigma_n \operatorname{tg} \rho) = -\frac{1}{\cos \rho} \operatorname{Im} [e^{i\rho} (\sigma_n + i\tau_{tn})]$$

определяющую решение во втором приближении (см. п. 3, 4) и, в частности, коэффициент интенсивности напряжений. Из соображений удобства вычислений разложим в ряд по r в окрестности точки $r = 1/2 l$ два последних нелинейных слагаемых в (5.6), ограничившись двумя первыми членами; затем воспользуемся результатами вычислений, проведенных в п. 4 для случая линейной функции $f(r)$.

Приведем окончательные формулы, переходя к размерным переменным

$$(5.7) \quad f(r) = a + \eta_1 r$$

$$(5.8) \quad K_{II} = -\frac{\sqrt{\pi l}(a+k)}{\sqrt{2} G^+(-1)} - \frac{3\eta_1 \sqrt{2\pi} l^{3/2}}{8G^+(-2)}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 (5.9) \quad a = & -\frac{1}{\cos \rho} \operatorname{Im} \left\{ e^{i\rho} \left[2 \operatorname{Re} E_3 + 2H \operatorname{Re} (E_1 e^{-i\beta}) - \right. \right. \\
 & -\frac{\delta H \sin \beta}{2(1-\nu)} - e^{2i(\alpha-\beta)} (E_4 + E_1 H e^{i\beta} + E_2 H e^{-i\beta} - \\
 & -\frac{\delta H \sin \beta}{2} \frac{1-2\nu}{1-\nu}) - 2 \operatorname{Im} E_0 \left(\Delta - \frac{2Hl \cos \alpha}{4H^2 - 4Hl \sin \alpha + l^2} \right) - \\
 & \left. \left. - E_0 \left(1 + \frac{4Hl \cos \alpha}{4H^2 - 4Hl \sin \alpha + l^2} \right) e^{2i(\alpha-\beta-\Delta)} \right] \right\} \\
 \eta_1 = & -\frac{1}{\cos \rho} \operatorname{Im} \left\{ e^{i\rho} \left[-2 \operatorname{Im} (E_1 e^{i(\alpha-\beta)}) + \frac{\delta \cos(\alpha-\beta)}{2(1-\nu)} - \right. \right. \\
 & - e^{2i(\alpha-\beta)} \left(\frac{1-2\nu}{1-\nu} \frac{\delta \cos(\alpha-\beta)}{2} + iE_2 e^{i(\alpha-\beta)} - iE_1 e^{-i(\alpha-\beta)} \right) - \\
 & \left. \left. - \frac{8H \cos \alpha \operatorname{Im} E_0}{4H^2 - 4Hl \sin \alpha + l^2} + \frac{8iE_0 H \cos \alpha}{4H^2 - 4Hl \sin \alpha + l^2} e^{2i(\alpha-\beta-\Delta)} \right] \right\} \\
 \Delta = & \operatorname{arctg} \frac{-2H \sin \beta + l \cos(\alpha-\beta)}{2H \cos \beta - l \sin(\alpha-\beta)} \quad (-\beta < \Delta < 0)
 \end{aligned}$$

В предельном состоянии величина $|K_{II}|$ равна постоянной K_{IIc} . Отсюда при помощи (5.8) получаем зависимость, связывающую длину линии скольжения с приложенными нагрузками

$$(5.10) \quad \frac{a+k}{G^+(-1)} + \frac{3\eta_1 l}{4G^+(-2)} = -\frac{\sqrt{2} K_{IIc}}{\sqrt{\pi l}}$$

В частности, если $K_{IIc} \ll \sqrt{\pi l} |a+k|$, т. е. предельнодопустимая концентрация напряжений мала по сравнению со средним напряжением, на основании (5.10) имеем

$$(5.11) \quad l = -\frac{4(a+k)G^+(-2)}{3\eta_1 G^+(-1)}$$

Этот случай может иметь практический смысл для весьма малопрочных заполнителей (например, типа влажной глины). Следует подчеркнуть, что в этом предельном случае получающаяся задача является классической упругопластической задачей о развитии тонких пластических слоев скольжения (при этом для металлов можно положить $\rho = 0$).

В случае неоднородного заполнителя величину K_{IIc} в (5.10) следует считать некоторой заданной функцией l .

Исследование устойчивости движения линий скольжения производится методами механики разрушения [1]. В данных задачах необходимое и достаточное условие устойчивости имеет вид $\partial K_{II} / \partial l < 0$, т. е. на основании (5.8) и (5.10)

$$(5.12) \quad \frac{a+k}{G^+(-1)} > \frac{-9\eta_1 l}{4G^+(-2)}$$

В качестве иллюстрации полученного решения приведем зависимость безразмерной критической высоты откоса $K_{IIc} / (\delta H \sqrt{\pi l})$ от безразмерных параметров $k / \delta H$ и l / H для ненагруженного тяжелого откоса при $\nu = 0,3$, $q_0 = q_1 = 0$, $\delta_0 = \delta_1 = 0$, $\beta = 120^\circ$, $\alpha = 75^\circ$, $\rho = 30^\circ$

$$\frac{K_{IIc}}{\delta H \sqrt{\pi l}} = 0.46 - 0.26 \frac{k}{\delta H} - 0.034 \frac{l}{H}$$

Полученное решение, естественно, может быть использовано также для экспериментального определения величины K_{IIc} , например, в опытах на одноосное сжатие образцов с искусственным краевым разрывом вдоль наклонной плоскости склейки (формула (5.9) при $\eta_1 = 0$, причем величина a равняется правой части равенства (1.9)). Свойства «клея» вдоль линии скольжения и на ее продолжении должны моделировать свойства заполнителя в тектонической трещине и его взаимодействие с основной породой (во всяком случае, величины k и ρ для клея должны равняться соответствующей минимальной величине k и ρ , характеризующей пары заполнитель — заполнитель и заполнитель — порода в предельном состоянии и в состоянии скольжения). Практические трудности моделирования структуры «головы» линии скольжения будут, по-видимому, не меньшими, чем в случае трещин нормального разрыва.

Поступила 18 VI 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
2. Уфлянд Я. С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1967.
3. Нобл Н. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1962.
4. Черепанов Г. П. Одна обратная задача теории упругости. Инж. ж. МТТ, 1966, № 3.
5. Белоносов С. М. Основные плоские статические задачи теории упругости для односвязных и двусвязных областей. Новосибирск, Сиб. отд. АН СССР, 1962.