

**ОБ УРАВНЕНИЯХ, ОПИСЫВАЮЩИХ ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ
УПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ**

В. Л. Бердичевский, С. С. Квашнина

(Москва)

Построено уравнение для поперечных колебаний изотропных упругих стержней центрально-симметричного поперечного сечения, являющееся уточнением уравнения Бернулли — Эйлера. Дано сравнение с другими результатами по уточненным уравнениям стержней.

1. Постановка задачи. Рассмотрим прямолинейный упругий стержень длины $2l$ постоянного поперечного сечения Ω в декартовой системе координат x, x^α . (Греческие индексы пробегает значения 1, 2.) Ось стержня в недеформированном состоянии совпадает с осью x , а центр тяжести — с началом координат. Обозначим через w, w_α проекции вектора перемещений на оси x, x^α , через h — диаметр стержня (максимальное расстояние между точками границы области Ω). Стержень нагружен боковой поверхностью и по торцам поверхностными силами с компонентами p, p_α , зависящими от координат и времени t . Массовые силы отсутствуют.

Ограничимся рассмотрением стержней центрально-симметричного поперечного сечения. Под центрально-симметричным понимается сечение, которое наряду с точкой с координатами x^α содержит точку с координатами — x^α . Общая динамическая задача в этом случае распадается на две независимые — задачу о поперечных колебаниях (w — нечетная, w_α — четные функции x^α) и задачу о продольных колебаниях и кручении (w — четная, w_α — нечетные функции x^α , см. Добавление). Далее будет рассмотрена задача о поперечных колебаниях.

Статическая задача о поперечной деформации стержня, боковая поверхность которого свободна от нагрузки, была решена Сен-Венаном [1]. Решение в перемещениях имеет вид

$$(1.1) \quad w = e_\alpha(x)x^\alpha + g(x^\alpha), \quad w_\alpha = u_\alpha(x) + \frac{1}{4}\chi_\beta(x)R_\alpha^\beta$$

где $e_\alpha, u_\alpha, \chi_\alpha$ — функции от $x, g(x^\alpha)$ удовлетворяет уравнению

$$\mu \Delta g = -x^\alpha \partial_x [(\lambda + \mu)\chi_\alpha + (\lambda + 2\mu)\partial_x e_\alpha]$$

во всех точках сечения Ω и условию

$$\frac{\partial g}{\partial n} = -n^\alpha \left[e_\alpha + \partial_x u_\alpha + \frac{1}{4} \partial_x \chi_\beta R_\alpha^\beta \right]$$

на граничном контуре Γ . Здесь

$$I^{\alpha\beta} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} x^{\alpha} x^{\beta} d\Omega, \quad R^{\alpha\beta} = 2(x^{\alpha} x^{\beta} - I^{\alpha\beta}) - \delta^{\alpha\beta} (x^{\gamma} x_{\gamma} - I^{\gamma}_{\gamma}), \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}$$

Δ — оператор Лапласа по переменным x^{α} , λ , μ — параметры Ламе, n^{α} — компоненты вектора единичной внешней нормали к контуру Γ .

Функции (1.1) представляют точное решение уравнений теории упругости, если поверхностные силы на торцах, статически эквивалентные заданной силе и паре, подобраны специальным образом. В работе Тупина [2] было доказано, что напряжения, вызванные самоуравновешенной нагрузкой на торце стержня, убывают при удалении от торца по экспоненциальному закону. В работе [3] для постоянной в экспоненте γ получена оценка $\gamma_0 / h \leq \gamma$, где γ_0 зависит только от формы поперечного сечения. Таким образом, напряжения, вызванные самоуравновешенной нагрузкой, являются функциями типа погранслоя, и решение Сен-Венана полностью описывает внутреннее напряженное состояние стержня (разница между решением Сен-Венана и точным решением при $h \rightarrow 0$ не превосходит ch^q , где q — любое, сколь угодно большое число).

Задачу о напряженном состоянии стержня при произвольной боковой нагрузке можно было бы свести к предыдущей, если бы удалось построить какое-нибудь решение уравнений теории упругости, удовлетворяющее краевым условиям на боковой поверхности. Однако такие решения получены лишь в некоторых частных случаях [4–6]. В динамической теории изгиба стержней точное решение задачи удалось найти для колебаний бесконечного кругового цилиндра, боковая поверхность которого свободна от нагрузки [7, 8], и бесконечного стержня прямоугольного поперечного сечения в приближениях плоской деформации или плоского напряженного состояния [9].

Трудности в получении точного решения вызывают необходимость построения приближенных уравнений теории стержней.

Наиболее последовательным подходом является вывод приближенных уравнений асимптотическими методами, использующими наличие малого параметра h / l . Асимптотическим методам в теории стержней посвящены работы [10, 11]. В работе [10] методом асимптотического интегрирования уравнений трехмерной теории упругости получены приближенные уравнения статической задачи о деформации стержня, произвольно нагруженного по боковой поверхности. В работе [11] этот метод использован для вывода приближенных уравнений продольных колебаний стержней кругового поперечного сечения. К задаче о поперечных колебаниях стержней асимптотические методы не применялись.

Обычно приближенные уравнения теории колебаний стержней получают при помощи эвристических гипотез относительно характера деформированного и напряженного состояния. При оценке этих гипотез, с точки зрения асимптотического подхода, возникает понятие об асимптотически точной модели. Именно, модель (или уравнения) будем называть асимптотически точными, если при учете какого-нибудь эффекта включаются в рассмотрение все упругие эффекты, энергия которых имеет тот же порядок малости. Модель, соответствующая гипотезе плоских сечений (модель Бернулли — Эйлера), является асимптотически точной и дает первое приближение (см. п. 7).

Построению уточнений уравнений Бернулли — Эйлера посвящена обширная литература (см. [12–17]). Однако асимптотически точных уравнений в указанных работах не получено (см. п. 8).

Цель данной работы — формулировка гипотез для второго приближения и обоснование асимптотической точности соответствующей модели.

Систему уравнений, описывающую поперечные колебания стержней, будем выводить из условия экстремума функционала линейной теории упругости [18]

$$(1.2) \quad I = \int_{t_1}^{t_2} dt \left[\int_V \left(\rho \frac{v^2}{2} - U \right) dV + \int_{\sigma} (pw + p_{\alpha} w^{\alpha}) d\sigma \right]$$

$$2U = \lambda (\varepsilon_{\alpha}^{\alpha})^2 + 2\lambda\varepsilon\varepsilon_{\alpha}^{\alpha} + (\lambda + 2\mu) \varepsilon^2 + 2\mu\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^{\alpha\beta} + 4\mu\varepsilon_{\alpha}\varepsilon^{\alpha}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = w_{(\alpha, \beta)}, \quad \varepsilon = \partial_x w, \quad 2\varepsilon_{\alpha} = w_{, \alpha} + \partial_x w_{\alpha}$$

Здесь V — объем, занятый стержнем, σ — поверхность, ограничивающая объем V , v — модуль вектора скорости частицы стержня, U — внутренняя энергия единицы объема. Запятая в индексах означает дифференцирование по x^{α} . Вариации в начальный t_1 и конечный t_2 моменты времени считаются равными нулю.

Делая гипотезы относительно зависимости вектора перемещений от поперечных координат и проводя интегрирование в (1.2) по поперечному сечению стержня, получим функционал, определенный на функциях x, t .

Подынтегральное выражение в функционале будет содержать члены различного порядка малости по h . Уравнения n -го приближения получаются при варьировании функционала, в котором сохранены члены порядка h^{2n} и отброшены члены большего порядка по h .

При определении порядков величин будем считать, что дифференцирование по x и по t не уменьшает порядка малости.

Из точных решений задачи о свободных поперечных колебаниях известно, что существует счетное число качественно различных типов колебаний и, соответственно, ветвей дисперсионной кривой. Уравнения Бернулли — Эйлера описывают длинноволновые колебания, соответствующие первой ветви дисперсионной кривой. При этом дифференцирование по времени увеличивает порядок малости величины на единицу. При построении уточнений уравнений Бернулли — Эйлера примем более общее предположение: дифференцирование по времени не уменьшает порядка малости величины. Зависимость внешних сил от времени считаем такой, что это предположение не нарушается.

Для получения уравнений второго приближения примем относительно компонент вектора перемещений следующие гипотезы:

$$(1.3) \quad w = e_{\alpha}(x, t) x^{\alpha} + g(x, x^{\alpha}, t), \quad w_{\alpha} = u_{\alpha}(x, t) + 1/4 \chi_{\beta}(x, t) R_{\alpha}^{\beta}$$

Вектор перемещения представлен, по существу, в таком же виде, как и в решении Сен-Венана (1.1).

Предположим, что функции $u_{\alpha}, e_{\alpha}, \chi_{\alpha}$ порядка h^0 , $\varphi_{\alpha} = e_{\alpha} + \partial_x u_{\alpha}$ порядка h^2 , g порядка h^3 . Относительно внешних сил примем, что $p \sim h^2$, $p_{\alpha} \sim h^3$ на боковой поверхности, $p \sim h$, $p_{\alpha} \sim h^2$ на торцах. В дальнейшем для упрощения примем также, что на торцах $p = m_{\alpha}(x, t) x^{\alpha}$.

Обоснование гипотез (1.3) рассматривается в п. 7.

В силу определения R_{α}^{β} функции $u_{\alpha}(x, t)$ имеют смысл среднего поперечного перемещения $u_{\alpha}(x, t) = \langle w_{\alpha} \rangle$.

Не ограничивая общности, на функцию g можно наложить ограничение

$$(1.4) \quad \langle gx^{\alpha} \rangle = 0.$$

2. Уравнения второго приближения. После подстановки (1.3) в (1.2) и отбрасывания малых членов порядка h^6 и выше, получим функционал

второго приближения

$$(2.1) \quad 2I = \rho\Omega \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-l}^l \left(\partial_t u_\alpha \partial_t u^\alpha + I^{\alpha\beta} \partial_t e_\alpha \partial_t e_\beta + \frac{1}{16} \langle R_\gamma^\alpha R^{\beta\gamma} \rangle \partial_t \chi_\alpha \partial_t \chi_\beta \right) dx - \\ - \Omega \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-l}^l \{ [(\lambda + \mu) \chi_\alpha \chi_\beta + 2\lambda \chi_\alpha \partial_x e_\beta + (\lambda + 2\mu) \partial_x e_\alpha \partial_x e_\beta] I^{\alpha\beta} + \mu\Phi \} dx + \\ + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\sigma} \left(2p_\alpha u^\alpha + 2pe_\alpha x^\alpha + \frac{1}{2} p_\alpha \chi_\beta R^{\alpha\beta} \right) d\sigma \\ \partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \langle A \rangle = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} A d\Omega$$

$$(2.2) \quad \Phi = \frac{1}{\Omega} \left[\int_{\Omega} \left(\varphi_\alpha + \frac{1}{4} \partial_x \chi_\beta R_\alpha^\beta + g_{,\alpha} \right)^2 d\Omega - \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma} pg d\Gamma \right]$$

Функция g входит в I только через Φ . При $p = 0$ величина $\mu\Phi$ имеет смысл энергии сдвига. Очевидно, что искомое значение g доставляет минимум функционалу Φ . Минимальное значение Φ_0 функционала Φ является функцией $\varphi_\alpha, \partial_x \chi_\alpha$.

Полагая $\Phi = \Phi_0$ в (2.1), получим функционал, определенный на функциях x и t . Варьирование этого функционала приведет к уравнениям и краевым условиям второго приближения.

Для вычисления Φ_0 в функционале Φ удобно вместо функции g ввести в качестве искомой функцию G по формуле

$$(2.3) \quad G = g + x^\alpha \left[\varphi_\alpha + \frac{1}{12} (R_\alpha^\beta - 4I_\alpha^\beta + 2\delta_\alpha^\beta I_\gamma^\gamma) \partial_x \chi_\beta \right]$$

Условие (1.4) для функции g переходит в условие для G

$$(2.4) \quad \langle Gx^\alpha \rangle = \kappa^\alpha, \quad \kappa^\alpha = I^{\alpha\beta} \varphi_\beta + T^{\alpha\beta} \partial_x \chi_\beta \\ T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4} (I^{\alpha\beta} I_\gamma^\gamma + \frac{1}{3} I^{\alpha\beta\gamma} - 2I^{\alpha\gamma} I_\gamma^\beta), \quad I^{\alpha\beta\gamma} = \langle x^\alpha x^\beta x^\gamma x^\gamma \rangle$$

Разыскивая минимум функционала Φ по G при условии (2.4), получим

$$(2.5) \quad \Delta G = \gamma_\alpha x^\alpha \\ \frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{3} (\delta_\alpha^\beta x^\gamma x_\gamma - x_\alpha x^\beta) n^\alpha \partial_x \chi_\beta + \frac{1}{\mu} p \text{ на } \Gamma$$

Здесь $\gamma_\alpha(x, t)$ — множители Лагранжа, соответствующие условию (2.4). Граничное условие для функции G оказывается проще, чем для g .

Функция $\Phi_0(\kappa_\alpha, \partial_x \chi_\alpha)$ — квадратичная форма своих аргументов и может быть представлена в виде

$$(2.6) \quad 2\Phi_0(\kappa_\alpha, \partial_x \chi_\alpha) = A^{\alpha\beta} \partial_x \chi_\alpha \partial_x \chi_\beta + B^{\alpha\beta} \kappa_\alpha \kappa_\beta + 2C^{\alpha\beta} \kappa_\alpha \partial_x \chi_\beta$$

Тензоры $A^{\alpha\beta}$ и $B^{\alpha\beta}$ симметричны, $C^{\alpha\beta}$, вообще говоря, несимметричен. Все они зависят от геометрии поперечного сечения и продольной нагрузки на боковой поверхности p . За счет зависимости p от x, t эти тензоры также могут зависеть от x, t . При нулевой продольной нагрузке на боковой поверхности они определяются только геометрией поперечного сечения.

Из выражения для Φ (2.2) следует, что $\Phi_0 \sim h^4$. Коэффициенты в (2.6) имеют порядки

$$A^{\alpha\beta} \sim h^4, \quad B^{\alpha\beta} \sim h^{-4}, \quad C^{\alpha\beta} \sim h^0$$

Варьируя функционал (2.1), получим уравнения для u_α

$$(2.7) \quad \begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_\alpha - 1/2 \mu I_\alpha^\gamma (\partial_x B_{\gamma\beta} \kappa^\beta + \partial_x^2 C_{\gamma\beta} \chi^\beta) &= P_\alpha / \Omega \\ 1/2 \mu I_\alpha^\gamma (B_{\gamma\beta} \kappa^\beta + \partial_x C_{\gamma\beta} \chi^\beta) &= \mp \langle p_\alpha \rangle, \quad x = \mp l \end{aligned}$$

Уравнения для e_α

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \rho \partial_t^2 e_\alpha - \lambda \partial_x \chi_\alpha - (\lambda + 2\mu) \partial_x^2 e_\alpha + 1/2 \mu (B_\alpha^\beta \kappa_\beta + \partial_x C_\alpha^\beta \chi_\beta) &= \\ = N_\alpha / \Omega \\ I_\alpha^\beta (\lambda \chi_\beta + (\lambda + 2\mu) \partial_x e_\beta) &= \mp \langle p x_\alpha \rangle, \quad x = \mp l \end{aligned}$$

Уравнения для χ_α

$$(2.9) \quad \begin{aligned} \rho \partial_t^2 \chi_\beta \langle R_{\alpha\gamma} R^{\beta\gamma} \rangle + 16 I_\alpha^\beta [(\lambda + \mu) \chi_\beta + \lambda \partial_x e_\beta] - \\ - 8\mu [\partial_x (T_{\alpha\gamma} B_\beta^\gamma + C_{\beta\alpha}) \kappa^\beta + \partial_x^2 (T_{\alpha\gamma} C_{\gamma\beta} + A_{\alpha\beta}) \chi^\beta] &= 4D_\alpha / \Omega \\ \mu [(T_{\alpha\gamma} B^{\gamma\beta} + C_{\beta\alpha}) \kappa^\beta + \partial_x (T_\alpha^\gamma C_{\gamma\beta} + A_{\alpha\beta}) \chi^\beta] &= \mp 1/2 \langle p_\beta R_\alpha^\beta \rangle \\ & \quad x = \pm l \end{aligned}$$

Здесь

$$D_\alpha = \int_\Gamma R_\alpha^\beta p_\beta d\Gamma, \quad P_\alpha = \int_\Gamma p_\alpha d\Gamma, \quad N_\alpha = \int_\Gamma p x_\alpha d\Gamma$$

3. Разрешающее уравнение. Получим разрешающие уравнения системы (2.7)–(2.9), являющиеся уточнением уравнения Бернулли–Эйлера. Поскольку в последнем силы инерции и перерезывающие силы имеют одинаковый порядок малости, а дифференцирование по x не меняет порядка величины, следует считать, что дифференцирование по t увеличивает порядок малости на единицу. Это утверждение справедливо, если исключить из рассмотрения коротковолновые процессы [19].

Разрешая систему (2.7)–(2.9) относительно u_α , отбрасывая малые в силу сделанного предположения члены $I_\alpha^\beta \partial_t^4 u_\beta$ и считая, что коэффициенты квадратичной формы (2.6) не зависят от x , получим

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \rho \partial_t^2 u_\alpha + E I_\alpha^\beta \partial_x^4 u_\beta - \rho I_\alpha^\beta \partial_t^2 \partial_x^2 u_\beta + E \Psi_\alpha^\beta \partial_x^6 u_\beta = \\ = \frac{1}{\Omega} \left[P_\alpha + \partial_x N_\alpha + \frac{\nu}{2} \partial_x^2 D_\alpha \right] \end{aligned}$$

где E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона, $\Psi_{\alpha\beta}$ — симметричный тензор, определяемый через коэффициенты квадратичной формы (2.6)

$$\Psi_{\alpha\beta} = 4(1 + \nu) B_{\alpha\beta}^{-1} + 4\nu (C_{(\alpha\gamma} B^{-1\gamma}_{\beta)} + T_{\alpha\beta}) + \frac{\nu^2}{1 + \nu} (C_{\gamma\alpha} B^{-1\gamma\omega} C_{\omega\beta} - A_{\alpha\beta})$$

Через $B_{\alpha\beta}^{-1}$ обозначен тензор, обратный к $B_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\gamma}^{-1} B^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\beta$.

Уравнения (3.1) являются уравнениями второго приближения для средних смещений u_α при поперечных колебаниях стержня произвольного центрально-симметричного поперечного сечения. При сравнении уравне-

ний второго приближения, полученных в работах разных авторов, следует иметь в виду, что эквивалентные между собой в рамках данного приближения уравнения могут различаться по форме [19]. В самом деле, представим разрешающее уравнение в случае свободных колебаний в операторном виде

$$(L_1 + h^2 L_2)u = (M_1 + h^2 M_2)P$$

где L_1, M_1 — операторы, соответствующие уравнению Бернулли — Эйлера. Все уравнения вида

$$(L_1 + h^2 L_2')u = (M_1 + h^2 M_2')P$$

будут эквивалентны данному, если (D — некоторый дифференциальный оператор)

$$L_2' - L_2 = DL_1, \quad M_2' - M_2 = DM_1$$

Выбирая оператор D надлежащим образом, получим разрешающие уравнения, эквивалентные уравнениям (3.1) и не содержащие члена $\partial_x^6 u_\beta$ ($\Gamma_{\alpha\beta}^1$ — тензор, обратный $I_{\alpha\beta}$)

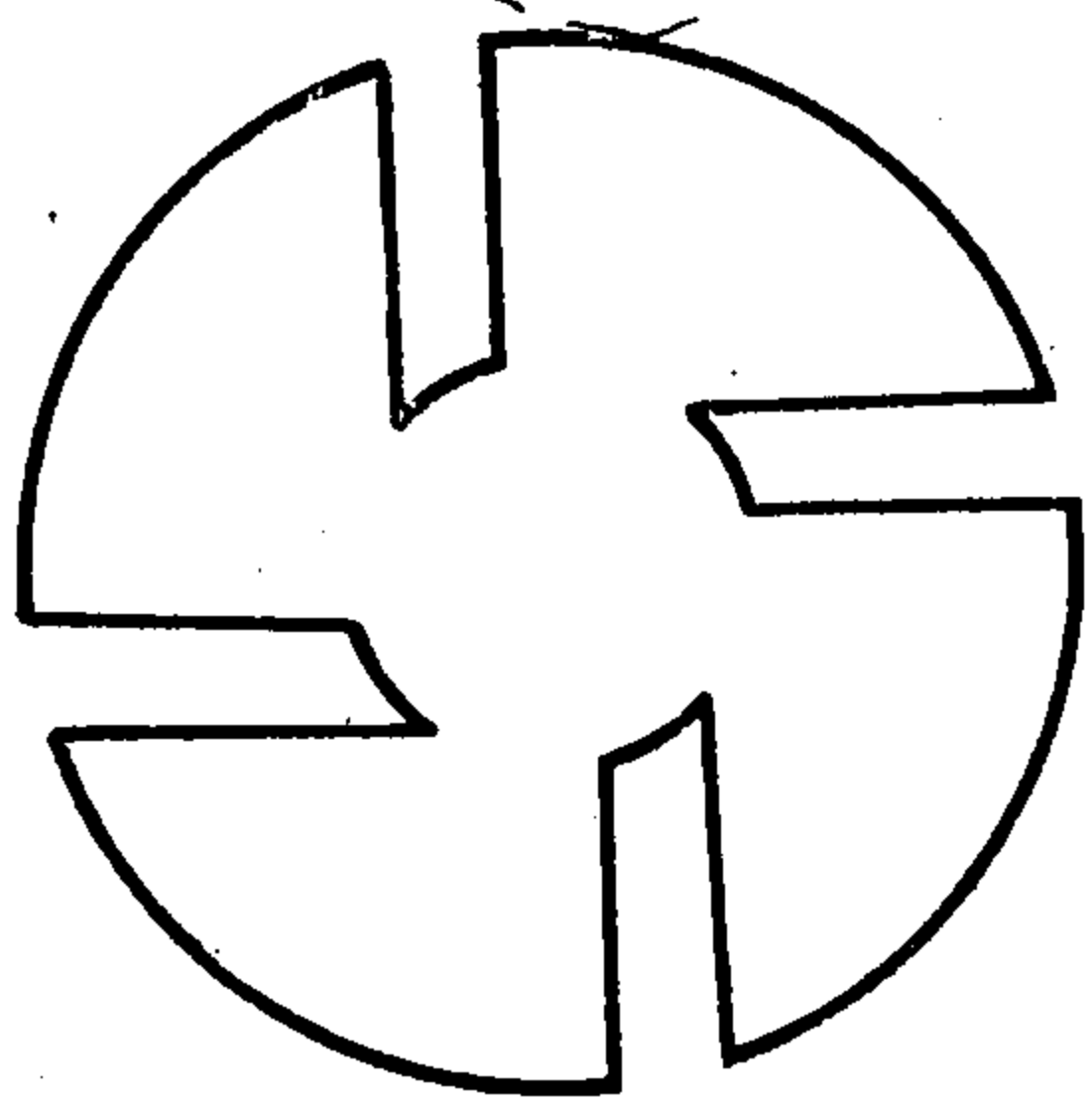
$$(3.2) \quad \rho \partial_t^2 u_\alpha + E I_\alpha^\beta \partial_x^4 u_\beta - \rho [I_\alpha^\beta + \Gamma_{\gamma\alpha}^{-1\beta} \Psi_\alpha^\gamma] \partial_t^2 \partial_x^2 u_\beta = \\ = \frac{1}{\Omega} \left[P_\alpha + \partial_x N_\alpha + \frac{\nu}{2} \partial_x^2 D_\alpha - \Gamma_{\gamma\alpha}^{-1\beta} \Psi_\alpha^\gamma \partial_x^2 (P_\beta + \partial_x N_\beta) \right]$$

4. Коэффициенты разрешающего уравнения, разделение колебаний и симметрия поперечного сечения. Система уравнений (3.2) содержит два уравнения для компонент вектора перемещений u_α . Вообще говоря, колебания вдоль одной оси стержня вызывают колебания вдоль другой. Возникает вопрос: существует ли система координат x^α , в которой колебания вдоль двух осей оказываются независимыми? Ответ на этот вопрос для уравнений первого приближения положителен, так как тензор $I^{\alpha\beta}$ может быть приведен к диагональному виду ортогональным преобразованием. В случае уравнений второго приближения ответ связан со свойствами симметрии поперечного сечения.

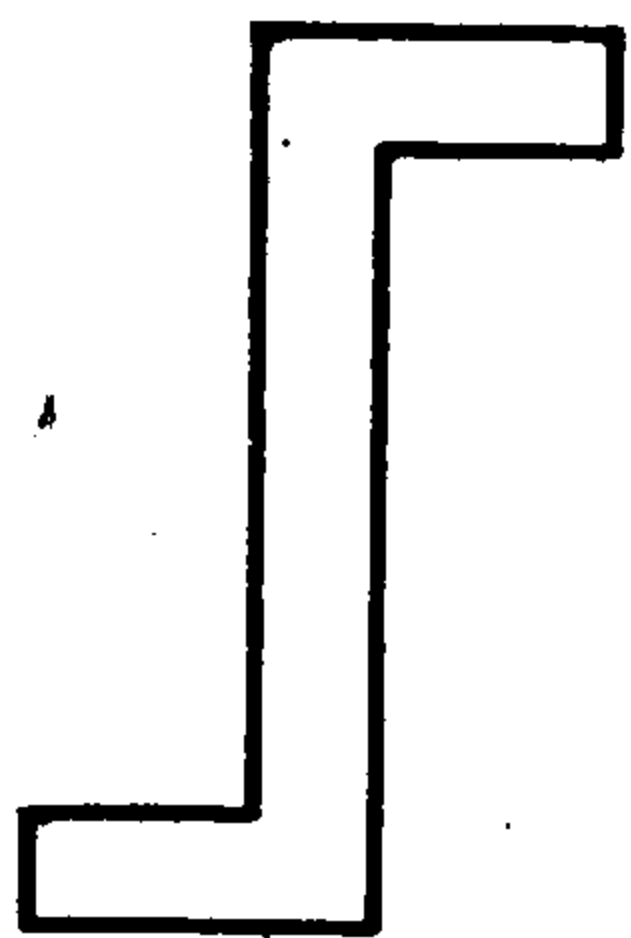
Поперечные сечения можно расклассифицировать, относя к одному классу сечения, инвариантные относительно одной и той же подгруппы группы ортогональных преобразований на плоскости. Каждая группа симметрии будет содержать поворот на угол π , поскольку сечение центрально-симметрично.

Тензоры (4.1) инвариантны относительно группы симметрии поперечного сечения. (Это утверждение справедливо, если продольная нагрузка на боковой поверхности p имеет симметрию поперечного сечения.) По теореме Германа — Германа (см. [20, 21]) тензор второго ранга, инвариантный относительно группы поворотов, содержащей поворот на угол, меньший π , является шаровым. Поэтому для поперечных сечений, инвариантных относительно таких групп, $A^{\alpha\beta} = A \delta^{\alpha\beta}$ и т. д. для всех тензоров (4.1). Согласно (3.2), поперечные колебания разделяются в любой ортогональной системе координат.

На фиг. 1 изображено поперечное сечение, инвариантное относительно поворота на $\pi/2$. Введенные выше тензоры, характеризующие это поперечное сечение, шаровые, и соответствующий стержень при поперечных колебаниях во втором приближении ведет себя как круглый. Этот факт заранее не очевиден, так как в исходной трехмерной задаче не существует



Фиг. 1



Фиг. 2

даже двух осей, вдоль которых поперечные колебания происходят раздельно.

Имеются только две подгруппы ортогональной группы, не содержащие поворота на угол, меньший π . Одна из них состоит из двух нетривиальных (отличных от тождественного) преобразований: поворота на угол π и отражения относительно

некоторой оси L . В этом случае, выбирая ось x^1 вдоль L , ось x^2 перпендикулярно L , из условия инвариантности тензоров (4.1) получим $A^{12} = A^{21} = 0$ и т. д. для всех тензоров (4.1).

Таким образом, в системе координат x^1, x^2 тензоры (4.1) одновременно приводятся к диагональному виду и, согласно (3.2), колебания вдоль x^1 и x^2 разделяются. Примеры таких поперечных сечений дают эллипс и прямоугольник.

Другая подгруппа содержит одно нетривиальное преобразование: поворот на угол π . (Пример такого поперечного сечения приведен на фиг. 2). Тензоры (4.1) могут иметь самый общий вид. Тем не менее, и в этом случае, в принципе, могут существовать системы координат, в которых колебания разделяются. Нетрудно убедиться, что необходимыми и достаточными условиями разделения колебаний, являются равенства $\Gamma_\beta^\alpha \Psi^{\beta\gamma} = \Gamma_\beta^\gamma \Psi^{\beta\alpha}$, вытекающие из теоремы об одновременном приведении двух симметричных матриц ортогональным преобразованием к диагональному виду.

5. Примеры вычисления функции G и коэффициентов разрешающего уравнения. В тех случаях, когда задача Неймана (2.5) допускает простые аналитические решения, можно вычислить коэффициенты $A^{\alpha\beta}, B^{\alpha\beta}, C^{\alpha\beta}$ квадратичной формы Φ_0 (2.6) и, следовательно, коэффициенты разрешающего уравнения второго приближения (3.2). Ниже приведены результаты для круга, кругового кольца, эллипса и прямоугольника при условии, что на боковой поверхности продольное усилие $p = 0$.

1°. Круг радиуса r

$$G = \frac{12}{7r^4} (3r^2 - x^\beta x_\beta) x^\alpha x_\alpha$$

$$A^{\alpha\beta} = \frac{r^4}{27} \delta^{\alpha\beta}, \quad B^{\alpha\beta} = \frac{2 \cdot 96}{7r^4} \delta^{\alpha\beta}, \quad C^{\alpha\beta} = -\frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta}$$

$$\Psi^{\alpha\beta} = \frac{r^4}{48} \frac{4\nu^2 + 12\nu + 7}{1 + \nu} \delta^{\alpha\beta}$$

2°. Кольцо с радиусами r_1 и r_2

$$G = \frac{12}{7r_1^4 + 34r_1^2r_2^2 + 7r_2^4} \left(3 \frac{r_1^2r_2^2}{x^\beta x_\beta} + 3(r_1^2 + r_2^2) - x^\beta x_\beta \right) x^\alpha x_\alpha$$

$$A^{\alpha\beta} = \frac{r_1^4 + r_1^2r_2^2 + r_2^4}{27} \delta^{\alpha\beta}, \quad B^{\alpha\beta} = \frac{2 \cdot 96}{7r_1^4 + 34r_1^2r_2^2 + 7r_2^4} \delta^{\alpha\beta}, \quad C^{\alpha\beta} = -\frac{2}{3} \delta^{\alpha\beta}$$

$$\Psi^{\alpha\beta} = \frac{1}{54(1+\nu)} \left[\frac{4\nu^2 + 12\nu + 9}{8} (7r_1^4 + 34r_1^2r_2^2 + 7r_2^4) + \nu(\nu+3)(r_1^4 + r_1^2r_2^2 + r_2^4) \right] \delta^{\alpha\beta}$$

3°. Эллипс $x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 \leq 1$

$$G = \frac{1}{8} \Gamma_\alpha x^\alpha x_\beta x^\beta + \frac{1}{6(3a^2 + b^2)} \left\{ \left[\frac{1}{4} (a^2 - b^2) (3x_2^2 - x_1^2) - 3a^2 (2a^2 + b^2) \right] \Gamma_1 - \right. \\ \left. - \frac{2}{3} (a^2 - b^2) (3x_2^2 - x_1^2 + 3a^2) \partial_x \chi_1 \right\} x_1 + [a \leftrightarrow b, 1 \leftrightarrow 2]$$

$$\Gamma_1 = \frac{1}{a^4(5a^2 + 2b^2)} \left[\frac{a^2}{3} (b^4 + 4a^2b^2 - 5a^4) \partial_x \chi_1 - 24(3a^2 + b^2) \kappa_1 \right]$$

$$A_{11} = \frac{b^4(81a^4 + 30a^2b^2 + b^4)}{108(3a^2 + b^2)(5a^2 + 2b^2)}, \quad B_{11} = \frac{48(3a^2 + b^2)}{a^4(5a^2 + 2b^2)}$$

$$C_{11} = -\frac{2}{3} \frac{b^2(6a^2 + b^2)}{a^2(5a^2 + 2b^2)}$$

$$\Psi_{11} = \frac{1}{1+\nu} \frac{a^2}{48(3a^2 + b^2)} \left[4(1+\nu)^2 a^2 (5a^2 + 2b^2) - \nu(1+\nu) \times \right. \\ \left. \times (3a^4 + 6a^2b^2 - b^4) - 4\nu^2 b^4 \right]$$

Символом $[a \leftrightarrow b, 1 \leftrightarrow 2]$ обозначается предыдущее слагаемое с перестановкой a и b и индексов 1 и 2. Значения $\Gamma_2, A_{22}, B_{22}, C_{22}, \Psi_{22}$ получаются по формулам для $\Gamma_1, A_{11}, B_{11}, C_{11}, \Psi_{11}$ заменой $a \leftrightarrow b$ и индексов $1 \leftrightarrow 2$. Остальные компоненты тензоров $A^{\alpha\beta}, B^{\alpha\beta}, C^{\alpha\beta}, \Psi^{\alpha\beta}$ в главных осях инерции равны нулю.

4°. Прямоугольник $|x_1| \leq a, |x_2| \leq b$

$$G = \left\{ \frac{x_1}{6} \left[(x_1^2 - 3a^2) \Gamma_1 + \left(\frac{4}{3} x_1^2 + b^2 - a^2 \right) \partial_x \chi_1 \right] + \right. \\ \left. + \frac{2b^3}{\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 \operatorname{ch}(n\pi a/b)} \operatorname{sh} \frac{n\pi x_1}{b} \cos \frac{n\pi x_2}{b} \partial_x \chi_1 \right\} + [a \leftrightarrow b, 1 \leftrightarrow 2] - \\ - \frac{1}{6} x_\alpha x^\alpha x_\beta \partial_x \chi^\beta$$

$$\Gamma_1 = \frac{5}{6a^2} \left[\left(\frac{b^2}{3} - \frac{2a^2}{5} \right) \partial_x \chi_1 - \frac{9}{a^2} \kappa_1 \right]$$

$$A_{11} = a^4 \left(\frac{79}{27 \cdot 45} - \frac{a}{b} \frac{4}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi b}{a} \right), \quad B_{11} = \frac{15}{a^4}, \quad C_{11} = \frac{5b^2}{9a^2}$$

$$\Psi_{11} = \frac{2}{3} a^4 \left[\frac{5\nu+6}{15} + \frac{\nu^2}{1+\nu} \left(\frac{25b^4 - 79a^4}{810a^4} + \frac{a}{b} \frac{2}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} \frac{n\pi b}{a} \right) \right]$$

Значения $\Gamma_2, A_{22}, B_{22}, C_{22}, \Psi_{22}$ получаются заменой $a \leftrightarrow b$ и индексов $1 \leftrightarrow 2$, остальные компоненты тензоров $A^{\alpha\beta}, B^{\alpha\beta}, C^{\alpha\beta}, \Psi^{\alpha\beta}$ в главных осях инерции равны нулю.

В частности, для квадрата со стороной a

$$A^{\alpha\beta} = a^4 \left(\frac{79}{27 \cdot 45} - \frac{4}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} n\pi \right) \delta^{\alpha\beta}, \quad B^{\alpha\beta} = \frac{15}{a^4} \delta^{\alpha\beta}, \quad C^{\alpha\beta} = \frac{5}{9} \delta^{\alpha\beta}$$

$$\Psi^{\alpha\beta} = \frac{2}{3} a^4 \left[\frac{5\nu + 6}{15} + \frac{\nu^2}{1 + \nu} \left(\frac{2}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} n\pi - \frac{1}{15} \right) \right] \delta^{\alpha\beta}$$

6. Дисперсионное уравнение. Из (3.1) или (3.2) можно получить дисперсионное уравнение — связь между частотой ω и волновым числом k , при которой функции

$$u_\alpha = u_\alpha^0 e^{i(\omega t - kx)}, \quad u_\alpha^0 = \text{const}$$

являются решениями задачи о свободных колебаниях бесконечного стержня. Соответственно, для (3.1) и (3.2) имеем

$$(6.1) \quad (\rho\omega^2 - Ek^4 I_{11} + \rho\omega^2 k^2 I_{11} + Ek^6 \Psi_{11}) (\rho\omega^2 - Ek^4 I_{22} + \rho\omega^2 k^2 I_{22} + Ek^6 \Psi_{22}) = (\rho\omega^2 k^2 I_{12} - Ek^4 I_{12} + Ek^6 \Psi_{12})^2$$

$$(6.2) \quad [\rho\omega^2 - Ek^4 I_{11} + \rho\omega^2 k^2 (I_{11} + \Psi_1^\gamma I_{\gamma 1}^{-1})] [\rho\omega^2 - Ek^4 I_{22} + \rho\omega^2 k^2 (I_{22} + \Psi_2^\gamma I_{\gamma 2}^{-1})] = [\rho\omega^2 k^2 (I_{12} + \Psi_1^\gamma I_{\gamma 2}^{-1}) - Ek^4 I_{12}] [\rho\omega^2 k^2 (I_{12} + \Psi_2^\gamma I_{\gamma 1}^{-1}) - Ek^4 I_{21}]$$

Дисперсионное уравнение — инвариантная характеристика механической системы, поэтому уравнения (6.1) или (6.2) должны давать второе приближение к точному дисперсионному уравнению, соответствующему трехмерной задаче.

Как известно, точное дисперсионное уравнение имеет бесконечное число ветвей. Уравнение Бернулли — Эйлера описывает «медленные колебания» и соответствует ветвям $\omega_0(k)$, для которых $\omega_0(0) = 0$. Поэтому рассматриваемые приближенные дисперсионные уравнения должны уточнять именно эти ветви.

Во многих работах делается попытка одновременно описать две ветви дисперсионной кривой $\omega_0(k)$ и $\omega_1(k)$, $\omega_1(0) \neq 0$. В связи с этим следует подчеркнуть, что для других ветвей дифференцирование по x и t уменьшает порядок малости на единицу, поэтому задача остается существенно трехмерной и смысл одномерного приближения требует разъяснений.

По точному дисперсионному уравнению трехмерной задачи можно строить его второе приближение и по приближенному дисперсионному уравнению восстанавливать уравнение в $x - t$ — представлении. На этом может быть основана проверка асимптотической точности приближенных уравнений.

Для стержня круглого поперечного сечения дисперсионное уравнение трехмерной задачи $f(\omega, k) = 0$ построено Похгаммером [7]. Раскладывая $f(\omega, k)$ в ряд по ω , k и оставляя члены порядка r^2 и r^4 , получим

$$(6.3) \quad \rho\omega^2 - \frac{E}{4} r^2 k^4 + \rho \frac{8\nu + 29}{24} r^2 \omega^2 k^2 - E \frac{7\nu + 9}{96(1 + \nu)} r^4 k^6 = 0$$

Уравнения (6.3) и (6.1) после подстановки в последнее значений $\Psi_{\alpha\beta}$ для стержня круглого сечения различаются между собой на член

$$\frac{18\nu + 23}{24} r^2 k^2 \left(\rho \omega^2 - \frac{E}{4} r^2 k^4 \right)$$

т. е. эквивалентны в указанном в п. 3 смысле.

Вычисленные в п. 5 значения $\Psi_{\alpha\beta}$ позволяют написать дисперсионное уравнение во втором приближении в случаях, для которых точное уравнение неизвестно.

7. Асимптотическая точность гипотез (1.3). Представим вектор перемещения точки стержня $w^{-i}(x, x^\alpha, t)$ в виде

$$w^i(x, x^\alpha, t) = u^i(x, t) + e_\alpha^i(x, t)x^\alpha + 1/2\chi_{\alpha\beta}^i(x^\alpha x^\beta - I^{\alpha\beta}) + g^i(x, x^\alpha, t) \quad i = 0, 1, 2$$

При выписывании проекций векторов и тензоров на ось x^α индекс α обычно опускается.

Потребуем, чтобы функции g^i удовлетворяли ограничениям

$$(7.1) \quad \langle g^i \rangle = 0, \quad \langle g^i x^\alpha \rangle = 0, \quad \langle g_{,\alpha}^i x^\beta \rangle = 0$$

Тогда функции $u^i, e_\alpha^i, \chi_{\alpha\beta}^i$ будут однозначным образом определяться через функции w^i , а именно

$$u^i(x, t) = \langle w^i \rangle, \quad e_\alpha^i(x, t) = I_{\alpha\beta}^{-1} \langle w^i x^\beta \rangle, \quad \chi_{\alpha\beta}^i(x, t) = I_{\beta\gamma}^{-1} \langle w_{,\alpha}^i x^\gamma \rangle$$

Между множеством функций $\{w^i\}$ и множеством наборов $\{u^i, e_\alpha^i, \chi_{\alpha\beta}^i, g^i\}$ существует взаимнооднозначное соответствие.

Систему уравнений для функций $u^i, e_\alpha^i, \chi_{\alpha\beta}^i, g^i$ получим из условия экстремума функционала (1.2). В задаче о поперечных колебаниях g — нечетная, g^α — четные функции x^α . Система ограничений (7.1) сведется к ограничениям

$$(7.2) \quad \langle g^\alpha \rangle = 0, \quad \langle g x^\alpha \rangle = 0, \quad \langle g_{,\beta}^\alpha x^\gamma \rangle = 0$$

При варьировании функционала получим следующую систему уравнений Эйлера и граничных условий:

уравнения для u_α

$$(7.3) \quad \rho \partial_t^2 u_\alpha - \mu \partial_x (\varphi_\alpha + \langle g_{,\alpha} \rangle) = P_\alpha / \Omega$$

$$\mu (\varphi_\alpha + \langle g_{,\alpha} \rangle) = \mp \langle p_\alpha \rangle, \quad x = \mp l$$

уравнения для e_α

$$(7.4) \quad \mu (\varphi_\alpha + \langle g_{,\alpha} \rangle) - I_\alpha^\gamma (\lambda \partial_x \chi_\gamma + L_2(e_\gamma)) = N_\alpha / \Omega$$

$$I^{\alpha\gamma} (\lambda \chi_\gamma + (\lambda + 2\mu) \partial_x e_\gamma) = \mp \langle p x^\alpha \rangle, \quad x = \mp l$$

уравнения для $\chi^{\alpha\beta\gamma}$

$$(7.5) \quad 2\lambda I_{(\gamma\delta\beta)\alpha}^\nu (\chi_\nu + \partial_x e_\nu) + 2\mu (\chi_{(\alpha\beta)\nu} I_\nu^\gamma + \chi_{(\alpha\gamma)\nu} I_\nu^\beta) -$$

$$- 1/2 L_1(\chi_{\alpha\sigma\mu}) \langle (x^\sigma x^\mu - I^{\sigma\mu}) (x_\beta x_\gamma - I_{\beta\gamma}) \rangle - \langle L_1(g_\alpha) x_\beta x_\gamma \rangle -$$

$$- \mu \langle (x_\beta x_\gamma - I_{\beta\gamma}) \partial_x g_{,\alpha} \rangle = D_{\alpha\beta\gamma} / \Omega$$

$$\mu [1/2 \partial_x \chi_{\alpha\mu\sigma} \langle (x^\beta x^\gamma - I^{\beta\gamma}) (x^\mu x^\sigma - I^{\mu\sigma}) \rangle +$$

$$+ \langle (x^\beta x^\gamma - I^{\beta\gamma}) (g_{,\alpha} + \partial_x g_\alpha) \rangle] = \mp \langle p_\alpha (x^\beta x^\gamma - I^{\beta\gamma}) \rangle, \quad x = \mp l$$

уравнения для g

$$(7.6) \quad \begin{aligned} \mu \Delta g + (\lambda + \mu) \partial_x g_{,\alpha} + L_2(g) &= \mu x^\alpha \gamma_\alpha(x, t) \\ \left(g_{,\alpha} + \partial_x g_\alpha + \varphi_\alpha + \frac{1}{2} \partial_x \chi_{\alpha\beta\gamma} (x^\beta x^\gamma - I^{\beta\gamma}) \right) n^\alpha &= \frac{1}{\mu} p \text{ на } \Gamma_i \\ \lambda g_{,\alpha} + (\lambda + 2\mu) \partial_x g &= \mp p + \lambda^\alpha(x, t) x_\alpha, \quad x = \mp i \end{aligned}$$

уравнения для g_α

$$(7.7) \quad \begin{aligned} \mu \Delta g_\alpha + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (\partial_x g + g_{,\beta}^\beta) + L_1(g_\alpha) + \frac{1}{2} L_1(\chi_{\alpha\beta\gamma}) (x^\beta x^\gamma - I^{\beta\gamma}) &= \Lambda_\alpha(x, t) \\ \lambda (\partial_x g + g_{,\beta}^\beta) n_\alpha + 2\mu g_{(\alpha,\beta)} n^\beta &= p_\alpha + \lambda_{\alpha\beta\gamma} x^\beta x^\gamma \text{ на } \Gamma \\ \mu [g_{,\alpha} + \partial_x g_\alpha + \varphi_\alpha + \frac{1}{2} \partial_x \chi_{\alpha\beta\gamma} (x^\beta x^\gamma - I^{\beta\gamma})] &= \mp p_\alpha, \quad x = \mp i \end{aligned}$$

Здесь

$$D_\alpha^{\beta\gamma} = \int_\Gamma p_\alpha (x^\beta x^\gamma - I^{\beta\gamma}) d\Gamma, \quad L_1 = \mu \partial_x^2 - \rho \partial_t^2, \quad L_2 = (\lambda + 2\mu) \partial_x^2 - \rho \partial_t^2$$

$$\chi_\alpha = \chi_{\beta\alpha}^\beta$$

$\gamma_\alpha, \lambda_\alpha, \Lambda_\alpha, \lambda_{\alpha\beta\gamma}$ — множители Лагранжа, соответствующие условиям (7.2).

Система уравнений (7.3)—(7.7) представляет собой точную систему уравнений, описывающих динамический изгиб стержня произвольной толщины. Можно показать, что эта система эквивалентна классическим уравнениям трехмерной теории упругости.

Для оценки порядков искомых величин сделаем замену переменных $x^\alpha = h z^\alpha$. Тогда $0 \leq z^\alpha \leq 1$.

Систему (7.3)—(7.7) можно исследовать как систему, содержащую малый параметр h с помощью формальных асимптотических разложений. При этом будем считать, что дифференцирование по x не меняет, а дифференцирование по t увеличивает порядок малости величин на единицу.

Представим искомые функции и заданные внешние силы в виде следующих разложений по h (f — любая из функций $u_\alpha, e_\alpha, \varphi_\alpha, \chi_{\alpha\beta\gamma}, g, g_\alpha$):

$$f = \sum_{s=0}^{\infty} h^s f^{(s)}$$

$$P_\alpha = h^4 \sum_{s=0}^{\infty} h^s P_\alpha^{(s)}, \quad N_\alpha = h^4 \sum_{s=0}^{\infty} h^s N_\alpha^{(s)}, \quad D_{\alpha\beta\gamma} = h^6 \sum_{s=0}^{\infty} h^s D_{\alpha\beta\gamma}^{(s)}$$

$$p_\alpha = h^3 \sum_{s=0}^{\infty} h^s p_\alpha^{(s)}, \quad p = h^2 \sum_{s=0}^{\infty} h^s p^{(s)}$$

Предположение о характере дифференцирования по времени соответствует тому, что все функции зависят от t через параметр $\tau = ht$.

Разложения для внешних сил выбираются таким образом, чтобы разложения искомых функций можно было начинать с h^0 , а не с отрицательных степеней h .

Подстановка этих разложений в систему (7.3)—(7.7) и приравнивание коэффициентов при одинаковых степенях h дают систему рекуррентных уравнений (Δ — оператор Лапласа в переменных z_α)

$$(7.8) \quad \rho \partial_t^2 u_\alpha^{(k-2)} - \mu \partial_x (\varphi_\alpha^{(k)} + \langle g_{,\alpha}^{(k+1)} \rangle) = P_\alpha^{(k-2)} / S$$

$$(7.9) \quad \begin{aligned} \mu (\varphi_\alpha^{(k)} + \langle g_{,\alpha}^{(k+1)} \rangle) - J^{\alpha\gamma} (\lambda \partial_x \chi_\gamma^{(k-2)} + (\lambda + 2\mu) \partial_x^2 e_\gamma^{(k-2)} - \\ - \rho \partial_t^2 e_\gamma^{(k-4)}) = N_\alpha^{(k-2)} / S \end{aligned}$$

$$(7.10) \quad 2\lambda J_{(\gamma\delta\beta)\alpha}^{(\nu)} (\chi_{\nu}^{(k)} + \partial_x e_{\nu}^{(k)}) + 2\mu (\chi_{(\alpha\beta)\nu}^{(k)} J_{\gamma}^{\nu} + \chi_{(\alpha\gamma)\nu}^{(k)} J_{\beta}^{\nu}) - 1/2 (\mu \partial_x^2 \chi_{\alpha\sigma\mu}^{(k-2)} - \rho \partial_t^2 \chi_{\alpha\sigma\mu}^{(k-4)}) \langle (z^{\sigma} z^{\mu} - J^{\sigma\mu}) (z_{\beta} z_{\gamma} - J_{\beta\gamma}) \rangle - \langle (\mu \partial_x^2 g_{\alpha}^{(k)} - \rho \partial_t^2 g_{\alpha}^{(k-2)}) z_{\beta} z_{\gamma} \rangle - \mu \langle \partial_x g_{\alpha}^{(k+1)} (z_{\beta} z_{\gamma} - J_{\beta\gamma}) \rangle = D_{\alpha\beta\gamma}^{(k-2)} / S$$

$$(7.11) \quad \mu \Delta g^{(k)} + (\lambda + \mu) \partial_x g_{,\alpha}^{(k-1)} + (\lambda + 2\mu) \partial_x^2 g^{(k-2)} - \rho \partial_t^2 g^{(k-4)} = \mu z^{\alpha} \gamma_{\alpha}^{(k-3)}$$

$$(7.12) \quad \mu \Delta g_{\alpha}^{(k)} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial z_{\alpha}} (\partial_x g^{(k-1)} + g_{,\beta}^{(k)\beta}) + \mu \partial_x^2 g_{\alpha}^{(k-2)} - \rho \partial_t^2 g_{\alpha}^{(k-4)} + 1/2 (\mu \partial_x^2 \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(k-4)} - \rho \partial_t^2 \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(k-6)}) (z^{\beta} z^{\gamma} - J^{\beta\gamma}) = \Lambda_{\alpha}^{(k-2)}$$

Здесь

$$g_{,\alpha} = \partial g / \partial z_{\alpha}, \quad S = \Omega / h^2, \quad J^{\alpha\beta} = I^{\alpha\beta} / h^2$$

Аналогичным путем можно получить рекуррентную систему граничных условий, соответствующих уравнениям (7.8)–(7.12). Решая последовательно уравнение (7.11) для $k = 0, 1, 2$ и уравнение (7.12) для $k = 0, 1, 2, 3$ при соответствующих граничных условиях, получим, что первыми отличными от нуля коэффициентами в разложениях для φ_{α} , g , g_{α} будут соответственно $\varphi_{\alpha}^{(2)}$, $g^{(3)}$, $g_{\alpha}^{(4)}$. При этом все величины с отрицательными порядковыми номерами полагаются равными нулю, и используются решения уравнения (7.10) для $\chi_{\alpha\beta\gamma}$ при $k = 0, 1$.

Решим уравнение (7.10) в первом приближении. Легко проверить, что любой тензор третьего ранга, симметричный по двум последним индексам, можно представить в виде (круглыми скобками в индексах отмечается операция симметрирования)

$$(7.13) \quad \chi_{\alpha\beta\gamma} = \chi_{(\alpha\beta)\gamma} + \chi_{(\alpha\gamma)\beta} - \chi_{(\beta\gamma)\alpha}$$

Уравнение (7.10) в первом приближении (при $k = 0$) имеет вид

$$(7.14) \quad 2\lambda J^{\nu(\gamma\delta\beta)\alpha} (\chi_{\nu}^{(0)} + \partial_x e_{\nu}^{(0)}) + 2\mu (\chi^{(0)(\alpha\beta)} J^{\gamma\nu} + \chi^{(0)(\alpha\gamma)} J^{\beta\nu}) = 0$$

Свертывая (7.14) последовательно с $\delta^{\alpha\beta}$ и $\delta^{\beta\gamma}$, получим после вычислений

$$(7.15) \quad \chi_{\alpha}^{(0)} = -\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \partial_x e_{\alpha}^{(0)}$$

$$(7.16) \quad \chi_{(\alpha\beta)\gamma}^{(0)} = 1/2 \delta_{\alpha\beta} \chi_{\gamma}^{(0)}$$

Из (7.13) и (7.16) имеем

$$(7.17) \quad \chi_{\alpha\beta\gamma}^{(0)} = 1/2 (\chi_{\gamma}^{(0)} \delta_{\alpha\beta} + \chi_{\beta}^{(0)} \delta_{\alpha\gamma} - \chi_{\alpha}^{(0)} \delta_{\beta\gamma})$$

При $k = 1$ уравнение (7.10) совпадает с (7.14) и, следовательно, его решение дается формулами (7.17), (7.15).

Из уравнений (7.8), (7.9) и (7.15) в первом приближении получаем уравнение Вернулли — Эйлера. Таким образом, для порядков искомых величин имеем

$$\varphi_{\alpha} \sim h^2, \quad g \sim h^3, \quad g_{\alpha} \sim h^4$$

Из формулы для функционала (1.2) после подстановки перемещений в виде

$$w = e_{\alpha} x^{\alpha} + g, \quad w_{\alpha} = u_{\alpha} + 1/2 \chi_{\alpha\beta\gamma} (x^{\beta} x^{\gamma} - I^{\beta\gamma}) + g_{\alpha}$$

можно видеть, что подынтегральное выражение содержит члены порядка h^2 , h^4 , h^6 , причем слагаемые, содержащие g_{α} , порядка h^6 и при выводе уравнений второго приближения должны быть отброшены. Таким образом, для получения второго приближения нужно положить $g_{\alpha} = 0$. Вычисляя $\chi_{\alpha\beta\gamma}$ по (7.17), получим следующее асимптотически точное представление перемещений: $w = e_{\alpha} x^{\alpha} + g$, $w_{\alpha} = u_{\alpha} + 1/4 \chi_{\beta} R_{\alpha}^{\beta}$.

Случай, когда дифференцирование по времени не меняет порядка малости величины, рассматривается аналогично и приводит к тому же представлению для перемещений.

8. Сравнение с другими результатами по уточненным теориям. Для получения одномерных уравнений теории стержней обычно применяются метод гипотез и метод разложений в ряды по поперечным координатам.

Классическое уравнение колебаний балки Бернулли — Эйлера основано на гипотезе для перемещений

$$(8.1) \quad w = -\partial_x u_\alpha(x, t)x^\alpha, \quad w_\alpha = u_\alpha(x, t) + 1/4\chi_\beta(x, t)R_\alpha^\beta$$

Подставляя (8.1) в (1.2), предполагая, что дифференцирование по t повышает порядок малости на единицу, и отбрасывая в подынтегральном выражении члены порядков h^4 и h^6 , приходим к функционалу

$$(8.2) \quad I = \Omega \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-l}^l \left(\frac{1}{2} \rho \partial_t u_\alpha \partial_t u^\alpha - F \right) dx + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{-l}^l (u_\alpha P^\alpha - \partial_x u_\alpha N^\alpha) dx + \\ + \int_{t_1}^{t_2} dt [u_\alpha \langle p^\alpha \rangle - \partial_x u_\alpha \langle px^\alpha \rangle]_{-l}^l \\ F = 1/2 I^{\alpha\beta} [(\lambda + \mu)\chi_\alpha \chi_\beta - 2\lambda \chi_\alpha \partial_x^2 u_\beta + (\lambda + 2\mu)\partial_x^2 u_\alpha \partial_x^2 u_\beta]$$

Функционал (8.2) отличается от функционала Бернулли — Эйлера видом функции F . Для того чтобы получить известное выражение, заметим, что параметры χ_α входят в функционал (8.2) без производных, поэтому уравнения Эйлера для χ_α алгебраические и легко разрешаются

$$\chi_\alpha = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \partial_x^2 u_\alpha$$

Подстановка значения χ_α в выражение для упругой энергии единицы длины F приводит к известной формуле

$$F = 1/2 EI^{\alpha\beta} \partial_x^2 u_\alpha \partial_x^2 u_\beta$$

Уравнение Релея [12] по существу также основано на гипотезе (8.1) и соответствует тому, что в функционале (8.2) удерживается слагаемое $\rho I^{\alpha\beta} \partial_t \partial_x u_\alpha \partial_t \partial_x u_\beta$, имеющее порядок h^4 и описывающее инерцию вращения поперечного сечения. Из предыдущего следует, что модель Релея не является асимптотически точной.

Уравнение Тимошенко [13] основано на верном для второго приближения представлении перемещений (1.3). Однако вместо решения выписанных выше уравнений для функций χ_α и g принимаются гипотезы, сводящиеся к двум равенствам (q_α — компоненты перерезывающей силы, k — коэффициент сдвига)

$$(8.3) \quad \langle \sigma_\alpha^\alpha x^\beta \rangle = 0, \quad q_\alpha = k\mu\Omega\varphi_\alpha \\ (\sigma^{\alpha\beta} = \partial U / \partial \varepsilon_{\alpha\beta}, \quad \sigma_\alpha = \partial U / \partial \varepsilon_\alpha, \quad q_\alpha = \Omega \langle \sigma_\alpha \rangle)$$

Из (8.3) следует соответственно

$$(8.4) \quad \chi_\alpha = -\frac{\lambda}{\lambda + \mu} \partial_x e_\alpha, \quad \varphi_\alpha + \langle g, \alpha \rangle = k \varphi_\alpha$$

и система уравнений для функций u_α и e_α оказывается замкнутой. Разрешая эту систему относительно u_α , получим уравнение балки Тимошенко. В случае свободных колебаний оно имеет вид

$$(8.5) \quad \rho \partial_t^2 u_\alpha + EI_\alpha^\beta \partial_x^4 u_\beta - \rho I_\alpha^\beta \left(1 + \frac{E}{\mu k}\right) \partial_t^2 \partial_x^2 u_\beta + \frac{\rho^2}{\mu k} I_\alpha^\beta \partial_t^4 u_\beta = 0$$

Из результатов п. 2 и п. 7 следует, что соотношения (8.4) во втором приближении неверны.

В модели Тимошенко коэффициент сдвига k считается зависящим только от формы поперечного сечения.

Следует подчеркнуть, что если ввести k при помощи второй формулы (8.4) $k = q_1 / (\mu \Omega \varphi_1)$ (разумеется, такое определение возможно, если колебания происходят в плоскости (x, x_1)) и вычислять по асимптотически точной теории, то k будет зависеть не только от формы поперечного сечения, но и от внешней нагрузки (даже при $p = 0$).

Можно предложить другой способ определения коэффициента k . Отбросим в уравнении Тимошенко (8.5) малый во втором приближении последний член. Тогда уравнения (3.2) и (8.5) будут иметь одинаковый вид. Для полного совпадения уравнений, описывающих колебания вдоль оси x_1 (в случаях, допускающих разделение колебаний), k следует определить по формуле

$$(8.6) \quad k = \frac{E}{\mu} \frac{(I_{11})^2}{\Psi_{11}}$$

Вычислению коэффициента сдвига k для разных поперечных сечений посвящено значительное количество работ (см. обзор [17]). Тимошенко для вычисления k использовал распределение напряжений в сечении по элементарной теории. В работе [22] для вычисления k по второй формуле (8.4) использовано решение задачи Сен-Венана о консольной балке. Уравнения работы [22] получены также с помощью гипотез (8.3) и в связи с этим не являются асимптотически точными.

Формула (8.6) для случаев круга, эллипса и прямоугольника дает

$$(8.7) \quad k^{-1} = \frac{4\nu^2 + 12\nu + 7}{6(1 + \nu)^2} \quad (\text{круг})$$

$$(8.8) \quad k^{-1} = \frac{4(1 + \nu)^2(5 + 2m^{-2}) - 4\nu^2 m^{-4} - \nu(1 + \nu)(3 + 6m^{-2} - m^{-4})}{6(1 + \nu)^2(3 + m^{-2})} \quad (\text{эллипс})$$

$$(8.9) \quad k^{-1} = \frac{191\nu^2 + 594\nu + 324}{270(1 + \nu)^2} + \frac{\nu^2}{(1 + \nu)^2} \left(\frac{5}{54} m^{-4} + m \frac{6}{\pi^5} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \operatorname{th} n\pi m^{-1} \right) \quad (\text{прямоугольник})$$

Здесь $m = a / b$, полуось a расположена вдоль оси x_1 . Для колебаний вдоль оси x_2 в формулах (8.8), (8.9), следует заменить m на m^{-1} .

Ниже приведены численные значения коэффициента k для круга и прямоугольника при $\nu = 0.3$ по данным разных авторов

	[13]	[22]	[14]	формулы (8.7), (8.9)
Круг	0.750	0.866	0.614	0.930
Прямоугольник	0.833	0.850	—	0.872 ($m = 1$)

Отметим, что по Тимошенко [13] и Кауперу [22] k в случае прямоугольника не зависит от отношения сторон m . Из формул (8.9) видно, что это предположение приводит к большим погрешностям при вычислении значений k , соответствующих колебаниям вдоль разных сторон прямоугольника. Например, уже при $m = 3$ значения k отличаются на 35% (при $\nu = 0.3$).

Следует подчеркнуть, что определение k по формуле (8.6) позволяет добиться только совпадения разрешающих уравнений. Система уравнений второго приближения (2.7)—(2.9) и система уравнений Тимошенко вообще остаются различными.

Приближенные уравнения поперечных колебаний стержня кругового поперечного сечения были получены в работе [14] с помощью формального символического метода из трехмерных динамических уравнений. Как показано в [23], приближенные уравнения работы [14] не являются асимптотически точными и не совпадают с уравнениями Похгаммера. Заметим что метод [14] пригоден лишь для круглого стержня.

Разложение вектора перемещений в двойной степенной ряд по поперечным координатам и интегрирование динамических уравнений трехмерной теории упругости по сечению стержня приводят исходную задачу к бесконечной системе одномерных дифференциальных уравнений. Иногда в разложениях используются полиномы Якоби или Лежандра. Различные приближенные теории получаются путем обрывания бесконечного ряда. Этот метод в теории стержней применялся в основном для вывода уравнений продольных колебаний. Уравнения второго приближения поперечных колебаний методом разложений в ряды получены в работах [15, 16]. Способы обрывания рядов, указанные в этих работах, не дают асимптотически точных уравнений. Следует подчеркнуть также, что не для всякого поперечного сечения вектор перемещений во втором приближении можно представить в виде полинома конечной степени по поперечным координатам. Например, в случае прямоугольного или кольцевого сечений, согласно п. 5, вектор перемещения во втором приближении не является полиномом.

9. Добавление. *Разделение поперечных и продольно-крутильных колебаний в стержнях с центрально-симметричным поперечным сечением.* Рассмотрим анизотропный линейно-упругий прямолинейный стержень с постоянным центрально-симметричным поперечным сечением. В каждой точке стержня имеется плоскость упругой симметрии, перпендикулярная оси. Стержень вообще неоднороден, однако его упругие свойства центрально-симметричны. Покажем, что в таком стержне поперечные и продольно-крутильные колебания независимы.

Для функций, определенных в центрально-симметричных областях, можно ввести понятие четности. Каждая функция представляется в виде суммы четной и нечетной (четные дальше отмечаются двумя штрихами, нечетные — одним).

Рассмотрим соответствующее представление для перемещений

$$w(x^\alpha, x, t) = w'(x^\alpha, x, t) + w''(x^\alpha, x, t),$$

$$w_\alpha(x^\beta, x, t) = w_\alpha'(x^\beta, x, t) + w_\alpha''(x^\beta, x, t)$$

Аргументы x, t входят в эти представления как параметры. Дифференцирование по x, t не меняет, а дифференцирование по x^α меняет четность.

В результате подстановки указанных представлений в функционал (1.2) последний разбивается на сумму двух функционалов, один из которых зависит только от w_α'' , w' , а второй — от w_α' , w'' . В самом деле, компоненты тензора деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}'$, ε' , ε_α'' зависят от w_α'' , w' , компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta}''$, ε'' , ε_α' — от w_α' , w'' . Из центральной симметрии упругих свойств следует, что компоненты тензора упругих модулей — четные функ-

ции x^α , а из существования плоскости упругой симметрии — отсутствие в упругой энергии произведений $\varepsilon_{\alpha\beta}\varepsilon^\alpha$ и $\varepsilon\varepsilon^\alpha$. Поэтому интеграл по поперечному сечению от упругой энергии разбивается на сумму двух, один из которых содержит $\varepsilon_{\alpha\beta}'$, ε' и ε_α'' , второй — $\varepsilon_{\alpha\beta}''$, ε'' , ε_α' . Аналогично, интеграл по поперечному сечению от кинетической энергии можно разделить на интегралы, зависящие от $\partial_t w_\alpha''$, $\partial_t w'$ и $\partial_t w_\alpha'$, $\partial_t w''$. Соответствующее разделение в силу линейности производится с функционалом, описывающим работу внешних сил.

Рассматриваемая вариационная задача полностью разделяется на две независимые, поскольку можно независимо варьировать четные и нечетные составляющие функций. Задачу, содержащую четную составляющую w_α и нечетную составляющую w , естественно назвать задачей о поперечных колебаниях, задачу, содержащую нечетную составляющую w_α и четную составляющую w , — задачей о продольно-крутильных колебаниях.

Авторы благодарят Л. И. Седова, Э. И. Григолюка, В. В. Лохина и А. Н. Голубятникова за обсуждение работы.

Поступила 29 X 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Saint-Venant B.* De mémoire sur la flexion des prismes élastiques. J. Math. Pure et Appl. Ser. 2, 1856, t. 1, p. 89—189.
2. *Toupin R. A.* Saint-Venant's principle. Arch. Rational Mech. and Analysis, 1965, vol. 18, No. 2.
3. *Бердичевский В. Л.* К доказательству принципа Сен-Венана для тел произвольной формы. ПММ, 1974, т. 38, вып. 5.
4. *Mitchell J. H.* The theory of uniformly loaded beams. Quart. J. Math., 1900, vol. 32, p. 28—42.
5. *Almansi E.* Sopra la deformazione dei cilindri sollecitate lateralmente. Atti Accad. naz Lincei. Rend. adunanze solenni. Ser. 5, 1901, t. 10, p. 333—338, 400—408.
6. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
7. *Pochhammer L.* Über die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten kleiner Schwingungen in einem unbegrenzten isotropen Kreis-Cylinder. J. reine und angew. Math., 1876, vol. 81, No. 4.
8. *Chree C.* The equations of an isotropic elastic solid in polar and cylindrical coördinates, their solution and application. Trans. Cambridge Philos. Soc., 1889, vol. 14, pt. III, p. 250—369.
9. *Timoshenko S.* On the transverse vibrations of bars of uniform cross-sections. Philos. Mag. Ser. 6, 1922, vol. 43, No. 253, p. 125—131.
10. *Понятовский В. В.* Применение асимптотического метода интегрирования к задаче равновесия тонкого бруса, произвольно нагруженного по боковой поверхности. Изв. АН СССР, МТТ, 1968, № 5.
11. *Nariboli G. A.* Asymptotic theory of wave-motion in rods. Z. angew. Math. und Mech., 1969, Bd 49, Nr 9.
12. *Рэлей Д. В.* Теория звука, т. 1—2. М., Гостехиздат, 1955.
13. *Тимошенко С. П.* Колебания в инженерном деле. М., «Наука», 1967.
14. *Утешева В. И.* Приближенные уравнения динамики упругого стержня кругового поперечного сечения. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963, № 4.
15. *Новожилов В. В., Слепян Л. И.* О принципе Сен-Венана в динамике стержней. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
16. *Döktesi M. S.* A general theory of elastic beams. Internat. J. Solids and Structures, 1972, vol. 3, p. 1205—1222.
17. *Григолюк Э. И., Селезов И. Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М., ВИНТИ, 1973.
18. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 2. М., «Наука», 1973.
19. *Бердичевский В. Л.* К динамической теории тонких упругих пластин. Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 6.
20. *Герман В. Л.* Некоторые теоремы об анизотропных средах. Докл. АН СССР, 1945, т. 48.
21. *Hermann C.* Tensoren und Kristallsymmetrie. Z. Kristallographic, 1934, Bd 89, H 1.
22. *Cowper G. R.* The shear coefficient in Timoshenko's beam theory. Trans. ASME, Ser. E. J. Appl. Mech., 1966, vol. 33, No. 2.
23. *Квашина С. С.* Одномерная модель динамического изгиба тонкого упругого стержня кругового поперечного сечения. Научн. тр. Ин-та механики МГУ, 1974, № 31.