Прикладная математика и механика. Том 40, 1976

УДК 539.3 : 534.1

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ КРУГЛЫХ ПЛИТ

О. К. Аксентян, Т. Н. Селезнева

(Ростов-на-Дону)

Предлагается способ построения асимптотического процесса для нахождения частот осесимметричных колебаний круглой плиты. Рассматриваются случаи симметричных относительно срединной поверхности колебаний (колебаний растяжения — сжатия) и кососимметричных (изгибных).

Подробно асимптотический процесс изучается для плиты со свободными торцами при смешанных граничных условиях на боковой поверхности. Эта задача может быть рассмотрена как модельная, на которой анализируется практическая сходимость предложенного метода и оценивается точность нахождения частот на каждом этапе процесса. Далее предложенным методом решаются задачи о собственных колебаниях круглой плиты при других граничных условиях на боковой поверхности — условиях шарнирного опирания, жесткого защемления.

Цель данного исследования — разработка метода определения частот собственных колебаний плит «средней» толщины. Вопрос о нахождении высших частот, даже для тонких пластин, а также низших частот колебаний пластин средней толщины не может быть решен в рамках существующих прикладных теорий. Поэтому интересно сформулировать последовательность приближенных теорий, позволяющих определять при средних толщинах любое, наперед заданное число первых частот с достаточной точностью.

1. Рассматривается задача о собственных колебаниях круглой плиты при следующих граничных условиях

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad z = \pm h \tag{1.1}$$

$$u_r = \tau_{rz} = 0, \quad r = a \tag{1.2}$$

Здесь a — радиус плиты, $2h$ — ее толщина. Решение строим в виде

$$u_r = U(\rho, \zeta) e^{i\omega t}, \quad w = W(\rho, \zeta) e^{i\omega t}, \quad \rho = \frac{r}{a}, \quad \zeta = \frac{z}{h} \tag{1.3}$$

Удовлетворяя системе дифференциальных уравнений Лямэ и граничным условиям (1.1) с помощью символического метода А. И. Лурье [1], получим дифференциальное уравнение (1.6) для разрешающей функции ψ, связанной с компонентами вектора перемещений следующими соотношениями:

$$U = \frac{\partial}{\partial \rho}\left[2B \sin \lambda B \cos \lambda A\zeta - (\Delta^2 + A^2)\frac{\sin \lambda A}{A}\cos \lambda B\zeta\right]\psi \tag{1.4}$$

$$W = \left[(\Delta^2 + A^2) B \sin \lambda B\zeta \frac{\sin \lambda A}{A} - 2\Delta^2 B \sin \lambda B \frac{\sin \lambda A\zeta}{A}\right]\psi$$

в случае симметричных колебаний, и

$$U = \frac{\partial}{\partial\rho}\left[2A\cos\lambda B\sin\lambda A\zeta - (\Delta^2 + A^2)\frac{\sin\lambda B\zeta}{B}\cos\lambda A\right]\psi \tag{1.5}$$

$$W = [2\Delta^2\cos\lambda A\zeta\cos\lambda B - (\Delta^2 + A^2)\cos\lambda B\zeta\cos\lambda A]\psi$$

в случае кососимметричных колебаний. Здесь

$$\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}, \quad A^2 = \Delta^2 + \Omega^2, \quad B^2 = \Delta^2 + \frac{1-2\sigma}{2(1-\sigma)}\Omega^2$$

$$\Omega^2 = \frac{\omega^2 a^2 \rho_1}{G}, \quad \lambda = \frac{h}{a}$$

(G — модуль сдвига, σ — коэффициент Пуассона, ρ_1 — плотность материала плиты).

$$\left\{\frac{\operatorname{tg}\lambda A}{\operatorname{tg}\lambda B} - \left[\frac{(\Delta^2 + A^2)^2}{4\Delta^2 AB}\right]^{\pm 1}\right\}\psi = 0 \tag{1.6}$$

Верхний знак в (1.6) соответствует изгибным колебаниям, нижний — колебаниям растяжения — сжатия.

Опишем кратко построение точного решения задачи. Имеющимся произволом в однородном решении (1.4), (1.6) и (1.5), (1.6) воспользуемся для удовлетворения граничным условиям (1.2) с помощью, например, теоремы Бэтти. Решение уравнения (1.6) ищем в классе функций, удовлетворяющих уравнению

$$\Delta^2\psi = \mu\psi \tag{1.7}$$

$$\psi = MI_0(\sqrt{\mu}\rho) \tag{1.8}$$

Подставляя (1.7) в (1.6), имеем для μ уравнение Лэмба

$$\frac{\operatorname{tg}\lambda\alpha}{\operatorname{tg}\lambda\beta} - \left[\frac{(\mu + \alpha^2)^2}{4\mu\alpha\beta}\right]^{\pm 1} = 0 \tag{1.9}$$

$$\alpha^2 = \mu + \Omega^2, \ \beta^2 = \mu + (1-2\sigma)\,\Omega^2 / 2\,(1-\sigma)$$

Суммируя решения вида (1.8) по корням μ_n уравнения (1.9), имеем

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty} M_n I_0(\sqrt{\mu_n}\rho) \tag{1.10}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.2), задачу сводим к бесконечной системе алгебраических однородных уравнений с диагональной матрицей относительно M_n

$$M_n F(\mu_n, \Omega, \sigma)\, I_1(\sqrt{\mu_n}) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.11}$$

Здесь $F(\mu_n, \Omega, \sigma)$ — производная правой части уравнения Лэмба по η_n, где $\eta_n^2 = \mu_n$. Так как в рассматриваемой области изменения Ω уравнение Лэмба не имеет ненулевых кратных корней [2], то $F(\mu_n, \Omega, \sigma) \neq 0$. Система (1.11) дает

$$I_1(\sqrt{\mu_n}) = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{1.12}$$

Подставляя в (1.9) корни функции Бесселя, получаем частотные уравнения, называемые в дальнейшем «точными».

Приступим к построению асимптотического процесса для приближенного нахождения частот собственных колебаний круглой плиты с граничными условиями (1.2). Исходим вновь из представления (1.10) для функции ψ. Граничные условия (1.2) с учетом (1.3) — (1.5) дадут

$$\frac{\partial}{\partial\rho}(\Delta^2+A^2)[\cos\lambda B\cos\lambda A\zeta-\cos\lambda A\cos\lambda B\zeta]\,\psi\,|_{\rho=1}=0 \tag{1.13}$$
$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[2A\cos\lambda B\sin\lambda A\zeta-(\Delta^2+A^2)\cos\lambda A\,\frac{\sin\lambda B\zeta}{B}\right]\psi\,\Big|_{\rho=1}=0$$

в случае изгибных колебаний, и

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[2B\sin\lambda B\cos\lambda A\zeta-(\Delta^2+A^2)\,\frac{\sin\lambda A}{A}\cos\lambda B\zeta\right]\psi\,\Big|_{\rho=1}=0 \tag{1.14}$$
$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[(\Delta^2+A^2)\frac{\sin\lambda A}{A}\,B\sin\lambda B\zeta-B\sin\lambda B\,\frac{\sin\lambda A\zeta}{A}\right]\psi\,\Big|_{\rho=1}=0$$

в случае колебаний растяжения — сжатия.

Предлагаемый асимптотический процесс состоит в следующем. Строятся асимптотические разложения корней уравнения (1.9) по степеням λ, позволяющие вычислить любое число первых корней μ_n с наперед заданной степенью точности. Тогда функция ψ на каждом этапе асимптотического процесса будет иметь вид

$$\psi=\sum_{n=1}^{2N}M_nI_0(\sqrt{\mu_n}\rho) \tag{1.15}$$

в случае кососимметричных колебаний и

$$\psi=\sum_{n=1}^{2N-1}M_nI_0(\sqrt{\mu_n}\rho) \tag{1.16}$$

в случае симметричных колебаний; N — номер приближения ($N=1,2,3,\ldots$).

Левые части граничных условий (1.13) раскладываются в ряды по степеням ζ

$$A_{11}\psi\,|_{\rho=1}+A_{12}\psi\,|_{\rho=1}\zeta^2\lambda^2+\ldots=0 \tag{1.17}$$
$$A_{21}\psi\,|_{\rho=1}\zeta\lambda+A_{22}\psi\,|_{\rho=1}\zeta^3\lambda^3+\ldots=0$$

где A_{ij} — дифференциальные операторы бесконечного порядка, легко определяемые по (1.13). Аналогично раскладываются в ряды и граничные условия (1.14). Соответствующие дифференциальные операторы в случае симметричных колебаний в дальнейшем помечены звездочкой.

Приравнивая нулю коэффициенты при нескольких первых степенях ζ в (1.17), получим конечное множество граничных условий для функции ψ. На каждом этапе процесса число удовлетворяемых граничных условий должно быть согласовано с числом первых взятых корней μ_n уравнения Лэмба (с числом N).

Итак, на N-м этапе асимптотического процесса в случае изгибных колебаний имеем следующие граничные условия:

$$A_{ij}\psi|_{\rho=1} = 0 \quad (i = 1, 2;\ j = 1, 2, \dots N) \tag{1.18}$$

а в случае колебаний растяжения — сжатия

$$A_{1j}{}^{*}\psi|_{\rho=1} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, N) \tag{1.19}$$
$$A_{2k}{}^{*}\psi|_{\rho=1} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, N-1)$$

Вместо (1.17) можно построить разложения левых частей (1.13) в ряды Фурье или в ряды по полиномам Лежандра. Проведенный численный анализ показал, что последний способ наиболее эффективен.

Теперь последовательно (для $N = 1, 2, \dots$) определяем собственные частоты построенных задач. Подставляя (1.15) в (1.18), (1.16) в (1.19) и приравнивая нулю определители однородных систем линейных алгебраических уравнений относительно M_n, получаем уравнения для определения собственных частот на N-м этапе.

Приведем асимптотические разложения корней уравнения Лэмба.

В случае кососимметричных колебаний уравнение Лэмба имеет два корня порядка $1 / \lambda$ и счетное множество корней порядка $1 / \lambda^2$

$$\mu_n = \frac{\Omega}{\lambda}\left[(-1)^n \sum_{i=0,2,4,\dots}^{\infty} \lambda^i\Omega^i C_i + \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \lambda^i\Omega^i C_i\right] \quad (n = 1, 2) \tag{1.20}$$

$$\mu_k = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=0}^{\infty} F_{ki}\Omega^{2i}\lambda^{2i} \quad (k = 3, 4, \dots), \quad \mu_{p+1} = \bar{\mu}_p \quad (p = 3, 5, \dots) \tag{1.21}$$

Построены рекуррентные системы для нахождения коэффициентов C_i и F_{ki}, причем F_{k0} — корни уравнения

$$\sin 2\sqrt{F_{k0}} - 2\sqrt{F_{k0}} = 0$$

В случае колебаний растяжения — сжатия уравнение Лэмба имеет один корень порядка λ^0 и счетное множество корней порядка $1 / \lambda^2$

$$\mu_1{}^{*} = \Omega^2 \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{2i}\Omega^{2i}C_i{}^{*}$$

$$\mu_k{}^{*} = \frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{2i}\Omega^{2i}F_{ki}{}^{*} \quad (k = 2, 3, \dots), \quad \mu^{*}_{p+1} = \bar{\mu}_p{}^{*} \quad (p = 2, 4, \dots)$$

Для коэффициентов $C_i{}^{*}$ и $F_{ki}{}^{*}$ получены рекуррентные системы, причем $F_{k0}{}^{*}$ — корни уравнения

$$\sin 2\sqrt{F^{*}_{k0}} + 2\sqrt{F^{*}_{k0}} = 0$$

В случае изгибных колебаний в рассматриваемой области изменения Ω, μ_k $(k = 3, 4, \dots)$ — комплексные, следовательно, $I_1(\sqrt{\mu_k}) \neq 0$. Окончательно частотное уравнение имеет вид

$$I_1\left(\left\{\frac{\Omega}{\lambda}\left[(-1)^n \sum_{i=0,2,4,\dots}^{\infty} \lambda^i\Omega^i C_i + \sum_{i=1,3,\dots}^{\infty} \lambda^i\Omega^i C_i\right]\right\}^{1/2}\right) = 0 \quad (n = 1, 2)$$

Проведем сравнение с результатами теории Миндлина [3] и классической теорией [4].

В теории изгибных колебаний Миндлина связь между μ и Ω можно представить асимптотическим разложением вида

$$\mu_n = \frac{\Omega}{\lambda}\left[(-1)^n C_0 + \lambda\Omega C_1(1+\varepsilon_1) + (-1)^n \lambda^2\Omega^2 C_2(1+\varepsilon_2) + \ldots\right]$$
$$(n = 1, 2)$$

Постоянные ε_1, ε_2 зависят от материала тела и при $\sigma = {}^1/_3$ имеем $\varepsilon_1 = 0.056$, $\varepsilon_2 = 0.36$. Таким образом, первый член асимптотического представления для μ по теории Миндлина совпадает (как и в классической теории) с соответствующим членом разложения (1.20); коэффициент при λ отличается на 5.6%, а при λ^2 — на 36% от соответствующих коэффициентов разложения (1.20). Таким образом, уточнение, даваемое теорией Миндлина, состоит в том, что эта теория учитывает второй член асимптотического ряда (1.20), входящего в частотное уравнение (этот член определяется по Миндлину достаточно точно). Поэтому можно ожидать, что при небольших λ эта теория позволит лучше определять частоты, чем классическая. При достаточно больших λ, когда в рядах нужно удерживать следующие члены разложения, теория Миндлина не даст хороших результатов.

В случае колебаний растяжения — сжатия частотное уравнение имеет вид

$$I_1\left(\Omega\left[\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^{2i}\Omega^{2i}C_i^*\right]^{1/2}\right) = 0$$

В теории симметричных колебаний Миндлина [5] связь между μ и Ω может быть представлена следующим асимптотическим разложением:

$$\mu_1^* = \Omega^2\left[C_0^* + \lambda^2\Omega^2 C_1^*(1-e_1) + \lambda^4\Omega^4 C_2^*(1-e_2) + \ldots\right]$$

где e_1, e_2 зависят от материала тела и при $\sigma = {}^1/_3$ имеем $e_1 = 0.189$, $e_2 = 0.574$. Таким образом, первый член асимптотического разложения для μ_1^* совпадает с истинным, второй отличается на 18.9%, третий — на 57.4%. Большей погрешностью в определении второго коэффициента разложения по сравнению со случаем изгибных колебаний объясняется меньшая точность теории Миндлина при определении частот колебаний растяжения — сжатия, чем изгибных колебаний.

На ЭЦВМ «Одра-1204» проводился счет корней частотных уравнений на разных этапах приближений и точного уравнения для $\sigma = {}^1/_3$ и при различных значениях параметра λ.

Вычисления показали, что в случае изгибных колебаний при малых λ ($\lambda \sim 0.1$) асимптотический метод позволяет определить более десяти первых частот с погрешностью, не превышающей 0,5%. Табл. 1 иллюстрирует практическую сходимость предлагаемого асимптотического метода при $\lambda = 0.1$, 0.5. В строке *I* приведены значения частот, полученных асимптотическим методом, в *II* — точные значения частот, в *III* и *IV* — соответственно значения частот, вычисленные по теории Миндлина и по классической теории.

Произведен численный анализ сходимости асимптотического метода при различных p (p — число членов в разложении (1.20), n — номер частоты в порядке ее возрастания). Для табл. 1 $p = 8$.

Таблица 1

λ	0.1						0.5				
n	1	2	3	...	9	10	1	2	...	5	6
I	1.336	3.815	6.770		20.08	22.58	3.158	6.330		9.472	10.02
II	1.336	3.815	6.770		20.11	22.59	3.158	6.324		9.397	10.12
III	1.329	3.769	6.647		20.51	21.81	3.066	6.096		11.93	12.68
IV	1.468	4.921	10.35				7.341	24.61		135.6	192.4

При бо́льших значениях λ ($\lambda \geqslant 0.2$) асимптотический метод позволяет определить шесть — семь первых частот с погрешностью, не превышающей 1—2%.

В случае симметричных колебаний при малых λ ($\lambda < 0.1$) асимптотический метод позволяет определить более десяти первых частот с погрешностью, не превышающей 2%. Для $\lambda \geqslant 0.1$ сходимость метода несколько хуже, чем в модельной задаче о кососимметричных колебаниях. Результаты счета собственных частот при $\lambda = 0.4$, $p = 6$ приведены в табл. 2.

Таблица 2

n	I	II	III	IV
1	5.562	5.485	6.016	6.637
2	7.447	7.448	9.165	12.15
3	8.391	8.157	9.945	17.62
4	10.04	9.868	11.90	23.08

Таблица 3

	I		III
n \ N	1	2	
1	1.269	1.269	1.220
2	4.379	4.372	4.245
3	6.468	6.691	6.603
4	7.545	7.536	7.280
5	10.16	10.26	10.25
6	10.71	10.82	11.04

Далее предложенным методом вычислены частоты изгибных колебаний круглой плиты при различных граничных условиях на боковой поверхности.

2. Рассмотрим осесимметричную задачу об изгибных колебаниях круглой плиты с шарнирным опиранием на боковой поверхности

$$\sigma_z = \tau_{rz} = 0, \quad z = \pm h$$
$$\sigma_r = w = 0, \ r = a$$

Граничные условия на боковой поверхности можно представить в виде

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}\left[2A\sin\lambda A\zeta\,\cos\lambda B - (\Delta^2 + A^2)\frac{\sin\lambda B\zeta}{B}\cos\lambda A\right] + \right.$$
$$\left. + (\Delta^2 + A^2)\frac{\sigma\Omega^2}{2(1-\sigma)}\frac{\sin\lambda B\zeta}{B}\cos\lambda A\right\}\psi\Big|_{\rho=1} = 0$$

$$[2\Delta^2\cos\lambda A\,\zeta\,\cos\lambda B - (\Delta^2 + A^2)\cos\lambda B\zeta\,\cos\lambda A]\,\psi\,|_{\rho=1} = 0$$

Левые части этих соотношений раскладываются в ряды по степеням ζ. На первом этапе асимптотического процесса имеем

$$\psi = M_1 I_0(\sqrt{\mu_1}\,\rho) + M_2 I_0(\sqrt{\mu_2}\,\rho)$$

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}[2A^2\cos\lambda B-(\Delta^2+A^2)\cos\lambda A]+\right.$$
$$\left.+(\Delta^2+A^2)\frac{\sigma\Omega^2}{2(1-\sigma)}\cos\lambda A\right\}\psi\Big|_{\rho=1}=0$$
$$[2\Delta^2\cos\lambda B-(\Delta^2+A^2)\cos\lambda A]\,\psi\,|_{\rho=1}=0$$

Отсюда получаем однородную систему линейных алгебраических уравнений относительно M_n

$$\sum_{i=1}^{2}\Big\{[2\alpha_i^2\cos\lambda\beta_i-(\mu_i+\alpha_i^2)\cos\lambda\alpha_i][\mu_i I_0(\sqrt{\mu_i})-\sqrt{\mu_i}I_1(\sqrt{\mu_i})]+\tag{2.1}$$
$$+(\mu_i+\alpha_i^2)\frac{\sigma\Omega^2}{2(1-\sigma)}\cos\lambda\alpha_i I_0(\sqrt{\mu_i})\Big\}M_i=0$$
$$\sum_{i=1}^{2}[2\mu_i\cos\lambda\beta_i-(\mu_i+\alpha_i^2)\cos\lambda\alpha_i]\,I_0(\sqrt{\mu_i})\,M_i=0$$
$$\alpha_i^2=\mu_i+\Omega^2,\quad \beta_i^2=\mu_i+(1-2\sigma)\,\Omega\,/\,2\,(1-\sigma)$$

Подставляя в определитель этой системы значения μ_1, μ_2 из (1.20) и приравнивая затем определитель нулю, получим частотное уравнение на первом этапе. На втором этапе имеем

$$\psi=\sum_{i=1}^{4}M_iI_0(\sqrt{\mu_i}\rho)\tag{2.2}$$
$$\sum_{i=1}^{4}\Big\{[2\alpha_i^2\cos\lambda\beta_i-(\mu_i+\alpha_i^2)\cos\lambda\alpha_i][\mu_iI_0(\sqrt{\mu_i})-\sqrt{\mu_i}I_1(\sqrt{\mu_i})]+$$
$$+(\mu_i+\alpha_i^2)\frac{\sigma\Omega^2}{2(1-\sigma)}\cos\lambda\alpha_iI_0(\sqrt{\mu_i})\Big\}M_i=0$$
$$\sum_{i=1}^{4}[2\mu_i\cos\lambda\beta_i-(\mu_i+\alpha_i^2)\cos\lambda\alpha_i]\,I_0(\sqrt{\mu_i})\,M_i=0$$
$$\sum_{i=1}^{4}\Big\{2\alpha_i^4\cos\lambda\beta_i-(\mu_i+\alpha_i^2)\,\beta_i^2\cos\lambda\alpha_i]\,]\mu_iI_0(\sqrt{\mu_i})-\sqrt{\mu_i}\,I_1(\sqrt{\mu_i})]+$$
$$+(\mu_i+\alpha_i^2)\frac{\sigma\Omega^2}{2(1-\sigma)}\beta_i^2\cos\lambda\alpha_iI_0(\sqrt{\mu_i})\Big\}M_i=0$$
$$\sum_{i=1}^{4}[2\mu_i\alpha_i^2\cos\lambda\beta_i-(\mu_i+\alpha_i^2)\,\beta_i^2\cos\lambda\alpha_i]\,I_0(\sqrt{\mu_i})\,M_i=0$$

Аналогично предыдущему из (2.2), (1.20) получим уравнение для определения собственных частот на втором этапе.

Заметим, что главный минор второго порядка в определителе системы (2.2) совпадает с определителем системы (2.1). Результаты счета собственных частот при $\lambda=0.3$ даны в табл. 3. В колонке I приведены значения частот для $N=1,2$ (N — номер приближения).

3. Далее асимптотическим методом решается задача об изгибных колебаниях круглой плиты, боковая поверхность которой жестко защемлена

$$\sigma_z=\tau_{rz}=0,\quad z=\pm h\tag{3.1}$$
$$u_r=w=0,\quad r=a\tag{3.2}$$

Условие (3.2) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left[2A\sin\lambda A\zeta\cos\lambda B-(\Delta^2+A^2)\frac{\sin\lambda B\zeta}{B}\cos\lambda A\right]\psi\Big|_{\rho=1}=0$$

$$[2\Delta^2\cos\lambda A\zeta\cos\lambda B-(\Delta^2+A^2)\cos\lambda B\zeta\cos\lambda A]\,\psi\,|_{\rho=1}=0$$

Аналогично изложенному были получены частотные уравнения на первых двух этапах приближения. Собственные частоты приведены в табл. 4 при $\lambda = 0.3$. Обозначения столбцов те же, что и прежде.

Таблица 4

n \ N	I: 1	I: 2	III	IV
1	1.692	1.732	1.763	3.065
2	4.430	4.506	4.406	11.93
3	7.546	7.563	7.270	26.73
4	8.385	8.313	8.750	47.75
5	10.64	10.66	10.28	
6	12.37	12.32	13.62	

Таблица 5

n \ N	I: 1	I: 2	I: 3	IV
1	2.463	2.460	2.460	4.538
2	4.754	4.750	4.750	19.26
3	6.372	6.162	6.215	43.91
4	8.629	8.057	8.038	78.45
5	9.895	9.174	9.071	122.8

Рассмотрена задача о кососимметричных и симметричных колебаниях круглой плиты со свободной боковой поверхностью. Граничные условия удовлетворялись путем разложения их в ряды по полиномам Лежандра. Собственные частоты кососимметричных колебаний приведены в табл. 5 при $\lambda = 0.5$.

Выводы о сходимости асимптотического метода для последних трех задач такие же, как и в модельной задаче о кососимметричных колебаниях.

Поступила 25 VII 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А. И.* Пространственные задачи теории упругости. М., Гостехиздат, 1955.
2. *Mindlin R. D.* Waves and vibrations in isotropic, elactic plates. In: Proc. 1 st Symposium of Naval Structural Mechanics, Stanford University, 1958. N. Y., Pergamon Press, 1960.
3. *Deresiewicz H., Mindlin R. D.* Axially simmetric flexural vibrations of a circular disk. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1955, vol. 77, p. 86—88.
4. (Lord) Rayleigh John W. Srtut. Theory of sound, vol. 1—2. N. Y., Dover, 1945.
5. *Kane T. R., Mindlin R. D.* High-frequency extensional vibrations of plates. Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 2, 277—283.